Sujet A

Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Interrogation 2

11/04/2012, Durée : une heure et quart

Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

NOM : **PRÉNOM :**

Exercice 1. Intervalle de confiance

On considère un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda \geq 1$, c'est-à-dire la loi de probabilité est donnée par $\mathbb{P}(X_1 = x) = (1 - \frac{1}{\lambda})^{x-1} \frac{1}{\lambda}$ pour $x \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $\mathbb{E}(X_1) = \lambda$ et $\mathrm{Var}\,(X_1) = \lambda(\lambda - 1)$.

1. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_{MV}$ de λ.

2. En utilisant une approximation gaussienne de la loi de $\hat{\lambda}_{MV}$, donner un intervalle de confiance de niveau α pour λ.

3. Application : On observe la durée de vie de 100 ampoules de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{\lambda}$ et on trouve une durée de vie moyenne de 1000 heures. On rappelle aussi que pour une loi gaussienne Y de moyenne 0 et de variance 1 on a

$$\mathbb{P}(Y \leq -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(Y \leq -1.96) = 0.025; \mathbb{P}(Y \leq -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(Y \leq -1.28) = 0.10.$$

Calculer l'intervalle de confiance de niveau 0.95 pour λ. (Indication : pour λ grand, $\mathrm{Var}\,(X_1) \approx \lambda^2$)

Exercice 2. Estimation paramétrique

Soit (X_1, X_2) un échantillon i.i.d. de taille 2 de la variable aléatoire X dont la densité est donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$$

avec un paramètre $\theta > 0$.

1. La fonction f_θ est elle vraiment une densité pour toute valeur du paramètre θ ?

2. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire celle de $\max(X_1, X_2)$, puis la densité g_θ de $\max(X_1, X_2)$.

3. Montrer que les estimateurs de θ suivants sont sans biais,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3}{4}(X_1 + X_2), \quad \hat{\theta}_2 = \frac{5}{4} \max(X_1, X_2).$$

(Rappel : $b(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\hat{\theta} - \theta$)

4. Calculer le risque quadratique moyen (RQM) de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. (Rappel : $\mathrm{RQM}(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}\,(\hat{\theta}) + b^2(\hat{\theta})$)

5. Quel estimateur choisir ?