Sujet B

Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Interrogation 2

27/03/2013, Durée : une heure et quart

Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

NOM : **PRÉNOM :**

Rendez votre copie avec la feuille de sujet signée s.v.p. !

Exercice 1. Loi normale

On considère une suite de variables aléatoires $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et une suite de variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ telles que

$$X_i = \theta \times \sqrt{i} + \varepsilon_i$$

où θ est un paramètre réel.

On rappelle que la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)$.

On rappelle aussi que pour une variable aléatoire Y suivant la loi gaussienne de moyenne 0 et de variance 1 on a

$$\mathbb{P}(Y \leq -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(Y \leq -1.96) = 0.025; \mathbb{P}(Y \leq -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(Y \leq -1.28) = 0.10.$$

1. Les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont elles indépendantes ? identiquement distribuées ?
2. Montrer que la vraisemblance d'une réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ de $(X_1, \dots, X_n)$ en fonction de θ est

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \theta \times \sqrt{i})^2}.$$

3. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.
4. Quelle est l'espérance de $\hat{\theta}$? Sa variance ?
5. Montrer que $\hat{\theta}$ converge en probabilité vers θ lorsque n tend vers l'infini.
6. Donner un intervalle de confiance à 95% pour θ.

Exercice 2. Loi uniforme

On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d. avec X_i, une variable aléatoire de loi uniforme à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. On pose $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\{\min(X_1, \dots, X_n) \leq x\} = \{\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i > x\}^{\complement},$$

calculer la fonction de répartition de Z_n : $F_{Z_n}(z) = \mathbb{P}(Z_n \leq z)$.

2. En déduire que la densité de Z_n sera $f_{Z_n}(z) = n(1-z)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(z)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathrm{Var}\,(Z_n)$.
4. Pour $z \in [0,1]$, calculer $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z)$, en déduire la loi de la variable $Z = \lim_{n\to\infty} Z_n$.
5. Pour $0 < \varepsilon < 1$, calculer $\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon)$, en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) < \infty$.