Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Interrogation 2
27/03/2014, Durée : une heure et vingt minutes
Le barème est indicatif. Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.
sujet B

Questions de cours *(5 points)*

1. Montrer que le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires égal à 1 ou -1 si l'une des variables est une fonction affine de l'autre variable. C'est à dire que $\rho_{X,Y} = \pm 1$ si $Y = aX + b$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, où X et Y sont les variables aléatoires. Quelles conditions doivent remplir a et b pour que $\rho_{X,Y} = 1$? Justifier votre réponse.

2. Soit $\hat{\theta}$ un estimateur du paramètre θ, b le biais de $\hat{\theta}$. Montrer que le risque quadratique moyen $\mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2$ est égal à $\mathrm{Var}\,(\hat{\theta}) + b^2$.

Exercice 1. Variables à densité *(9 points)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité est donnée par

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{4xy}{\theta^4} \mathbb{1}_{(0,\theta]\times(0,\theta]}(x, y)$$

avec un paramètre $\theta > 0$.

1. La fonction $f_{X,Y}(x, y)$ est elle vraiment une densité de probabilité pour toute valeur du paramètre θ ?
2. Donner les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
3. Donner la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$, puis la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.
4. Déterminer la loi de la somme $Z = X + Y$.
5. Soit (X_1, X_2) un échantillon i.i.d. de taille deux de la variable aléatoire X. A partir de la fonction de répartition de X déduire celle de $\max(X_1, X_2)$.
6. Considérons deux estimateurs de θ suivants

$$\hat{\theta}_1 = \lambda(X_1 + X_2) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_2 = \mu \max(X_1, X_2)$$

où λ et μ sont les constantes. Calculer λ et μ pour que $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ soient sans biais.
7. Calculer les risques quadratiques moyens (RQM) de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. En déduire lequel des deux estimateurs est meilleur.
8. Déterminer le meilleur estimateur, au sens du RQM, de la forme $T_c = c(X_1 + X_2)$, où c est une constante. Est il sans biais ?

Exercice 2. Estimateur sans biais de la variance *(6 points)*

Soit (X_1, X_2) un échantillon i.i.d. de taille 2 de la variable aléatoire X dont l'espérance m et la variance σ^2 sont inconnus. Montrer que $\hat{\theta} = (X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2$ où $\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ est l'estimateur sans biais de σ^2. (Indication : montrer d'abord que $\hat{\theta} = X_1^2 + X_2^2 - 2\overline{X}^2$, ensuite $\mathbb{E}(\overline{X}^2) = \sigma^2/2 + m^2$.)