$\boxed{\text{A}}$

Statistiques et Probabilités, L2 MIASHS, Interrogation 2
14/12/2015, Durée : une heure et demie
Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Ecrivez le N° étudiant Paris 1 et "Sujet A/B" sur votre copie s.v.p. !

Exercice 1 Lecture de la table *(3 points)*

Dans cet exercice on va utiliser une constante n qui est égale au dernier chiffre de votre N° étudiant.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $(-1)^n$ et de variance 4.

1. $\mathbb{P}(X < -1,5) = ?$
2. $\mathbb{P}(-3,2 \leq X < 3,2) = ?$
3. Trouver x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 53,59\%$.

Exercice 2 Couple de variables continues *(8 points)*

Dans cet exercice on va utiliser une constante a qui est en fonction du dernier chiffre de votre N° étudiant,

$$a = \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

où n est le dernier chiffre de votre N° étudiant.

Soit $f(x, y) = 4(x-a)(b-y)\mathbb{1}_{[a,b]\times[a,b]}(x, y)$ avec $b > a$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[a,b]\times[a,b]}(x, y)$ vaut 1 si $x \in [a, b]$ et $y \in [a, b]$, vaut 0 sinon.

1. A quelle condition f est elle la densité d'un couple de variables aléatoires (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales (support et densité). Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
3. Donner la densité de la variable $Z = X + Y$.

$\boxed{\text{A}}$

Exercice 3 Loi de Paréto *(9 points)*

On considère une suite de variables aléatoires i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de loi de Paréto, c'est à dire la densité de X_1 est

$$f(x) = \frac{1}{kx^{\frac{1}{k}+1}} \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)$$

où k est un paramètre strictement positif et inconnu.

1. Montrer que $\mathbb{E}(\ln X_1) = k$ et $\mathrm{Var}\,(\ln X_1) = k^2$.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{k}$ de k.
3. Quelle est l'espérance de $\hat{k}$? Sa variance ?
4. Montrer, sans utiliser les résultats du cours sur les estimateur du maximum de vraisemblance, que l'estimateur $\hat{k}$ est convergent.
5. En faisant une approximation gaussienne, donner un intervalle de confiance à 95% pour k.