

# B

Statistiques et Probabilités, L2 MIASHS, Interrogation 2

14/12/2015, Durée : une heure et demie

*Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.*

**Ecrivez le N° étudiant Paris 1 et "Sujet A/B" sur votre copie s.v.p.!**

## Exercice 1 Lecture de la table (3 points)

Dans cet exercice on va utiliser une constante  $n$  qui est égale au dernier chiffre de votre N° étudiant.

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance  $(-1)^n$  et de variance 4.

1.  $\mathbb{P}(X < -1,5) = ?$
2.  $\mathbb{P}(-3,2 \leq X < 3,2) = ?$
3. Trouver  $x$  tel que  $\mathbb{P}(X > x) = 53,59\%$ .

## Exercice 2 Loi de Paréto (9 points)

On considère une suite de variables aléatoires i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$  de loi de Paréto, c'est à dire la densité de  $X_1$  est

$$f(x) = \frac{1}{\theta x^{\frac{1}{\theta}+1}} \mathbb{I}_{[1, \infty[}(x)$$

où  $\theta$  est un paramètre strictement positif et inconnu.

1. Montrer que  $\mathbb{E}(\ln X_1) = \theta$  et  $\text{Var}(\ln X_1) = \theta^2$ .
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ .
3. Quelle est l'espérance de  $\hat{\theta}$ ? Sa variance?
4. Montrer, sans utiliser les résultats du cours sur les estimateur du maximum de vraisemblance, que l'estimateur  $\hat{\theta}$  est convergent.
5. En faisant une approximation gaussienne, donner un intervalle de confiance à 95% pour  $\theta$ .

# B

## Exercice 3 Couple de variables continues (8 points)

Dans cet exercice on va utiliser une constante  $a$  qui est en fonction du dernier chiffre de votre N° étudiant,

$$a = \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

où  $n$  est le dernier chiffre de votre N° étudiant.

Soit  $f(x, y) = 4(x-a)(b-y)\mathbb{I}_{[a,b] \times [a,b]}(x, y)$  avec  $b > a$ . La fonction indicatrice  $\mathbb{I}_{[a,b] \times [a,b]}(x, y)$  vaut 1 si  $x \in [a, b]$  et  $y \in [a, b]$ , vaut 0 sinon.

1. A quelle condition  $f$  est elle la densité d'un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  ?
2. Déterminer les lois marginales (support et densité). Les variables  $X$  et  $Y$  sont elles indépendantes ?
3. Donner la densité de la variable  $Z = X + Y$ .