

Statistiques et Probabilités, L2 MIASHS, Interrogation 2

01/04/2015, Durée : une heure et vingt minutes

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de multiplications ou fractions. La table doit être rendu avec la copie.

sujet B

Exercice 1. Table de la loi normale (5 points)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 85 et de variance 9.

1. $\mathbb{P}(X < 89, 5) = ?$
2. $\mathbb{P}(79 \leq X < 86, 5) = ?$
3. Trouver x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 55.96\%$.

Exercice 2. Variables à densité (9 points)

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{C}{|x|^{\frac{7}{2}}}, & |x| > 1, \\ K, & |x| \leq 1, \end{cases}$$

où C et K sont constantes à déterminer.

1. Quelles conditions doivent vérifier C et K pour que la fonction soit bien définie comme la densité d'une v.a. ?
2. Donner la fonction de répartition de X .
3. Calculer l'espérance de X .
4. Calculer la variance de X .
5. Soit Y_1, \dots, Y_n des v.a. définies par

$$Y_i = 2X_i + a, \quad i = 1, \dots, n,$$

où X_1, \dots, X_n sont des v.a. i.i.d. de même loi de X et a est un paramètre inconnu. Supposons que l'espérance et la variance des X_i sont connues, notées par m et σ^2 . On dispose de 100 observations de Y_i et on a $\bar{Y} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} Y_i = 5, 2$. En utilisant une approximation de la loi de \bar{Y} construire un intervalle de confiance à 97% pour a .

Exercice 3. Loi uniforme (6 points)

On considère un couple aléatoire $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ suivant la loi uniforme sur le disque de \mathbb{R}^2 de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. On rappelle que la surface d'un disque de rayon R est πR^2 .

1. Montrer que la densité de cette loi uniforme est

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbb{I}_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}}(x, y).$$

2. Calculer $\mathbb{E} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?