

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Écrivez "Sujet AJ/BJ" sur votre copie et la rendez avec LE SUJET s.v.p. !

Exercice 1. Loi uniforme (12 points)

On considère un échantillon (X_1, \dots, X_n) i.i.d. avec X_i , une variable aléatoire de loi uniforme à valeurs dans l'intervalle $[0, \theta]$, où θ est un paramètre positif inconnu. Rappelons que la densité de la loi uniforme sur $[a, b]$ est $f(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(t)$.

1. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .
2. On pose $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Calculer la fonction de répartition de X_i et en déduire celle de Z_n . (Indication : $\{\max(X_1, \dots, X_n) \leq x\} = \{\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i \leq x\}$)
3. En déduire que la densité de Z_n est $f_{Z_n}(z) = \frac{n}{\theta^n} z^{n-1} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(z)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$, $\mathbb{E}(Z_n^2)$ puis $\text{Var}(Z_n)$.
5. Pour $z \in [0, \theta]$, calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z)$, en déduire la loi de la variable $Z = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$.
6. Pour $0 < \varepsilon < \theta$, calculer $\mathbb{P}(|Z_n - \theta| > \varepsilon)$, en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Z_n - \theta| > \varepsilon) < \infty$.

Exercice 2. Loi exponentielle (8 points)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 3. On lui associe la variable aléatoire discrète $Y = [X]$, où les crochets désignent la partie entière. On rappelle que la fonction de répartition de X est $F(x) = 1 - \exp(-3x)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$.
2. Quelle est la loi de Y ?
3. Considérons la variable aléatoire $Z := X - [X]$. Montrer que $\mathbb{P}(Z \leq z) = \frac{1 - \exp(-3z)}{1 - \exp(-3)}$ pour $z \in [0, 1)$. (Indication : $\{Z \leq z\} = \bigcup_{y=0}^{\infty} \{y \leq X \leq y + z\}$)
4. En déduire la densité de Z .
5. Calculer $\mathbb{E}Z$.