AM

Statistiques et Probabilités, L2 MIASHS, Interrogation 2
13/12/2017, Durée : deux heures

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Écrivez "Sujet AM/BM" sur votre copie et la rendez avec LE SUJET s.v.p. !

Exercice 1. Loi normale *(10 points)*

On considère une suite de variables aléatoires $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et une suite de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ telles que

$$X_i = \theta \times i^2 + \varepsilon_i$$

où θ est un paramètre réel.

On rappelle que la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)$.

On rappelle aussi que pour une variable aléatoire Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$ on a

$$\mathbb{P}(Y \leq -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(Y \leq -1.96) = 0.025; \mathbb{P}(Y \leq -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(Y \leq -1.28) = 0.10.$$

1. Les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ sont elles indépendantes ? identiquement distribuées ?

2. Montrer que la vraisemblance d'une réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ de $(X_1, \ldots, X_n)$ en fonction de θ est

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \theta \times i^2)^2}.$$

3. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.

4. Quelle est l'espérance de $\hat{\theta}$? Sa variance ?

5. Donner un intervalle de confiance à 95% pour θ.

Exercice 2. Loi uniforme *(6 points)*

Soit une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $Y = 2 - X$. Rappelons que la densité de la loi uniforme sur $[a,b]$ est $f(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$.

1. Calculer la fonction de répartition de Y.

2. En déduire que sa densité est $g(y) = \mathbb{1}_{[1,2]}(y)$.

3. Calculer $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}Y^2$ puis $\operatorname{Var} Y$.

Exercice 3. Moments de la loi gaussienne standard *(4 points)*

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Que valent les $\mathbb{E}X^{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$? Justifier votre réponse.

2. On pose $c_n = \mathbb{E}X^{2n}$. Montrer en intégrant par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{2n+1} c_{n+1},$$

en déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}X^{2n}$.