

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Écrivez "Sujet AM/BM" sur votre copie et la rendez avec LE SUJET s.v.p. !

Exercice 1. Loi uniforme (6 points)

Soit une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Y = 3 - X$. Rappelons que la densité de la loi uniforme sur $[a, b]$ est $f(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(t)$.

1. Calculer la fonction de répartition de Y .
2. En déduire que sa densité est $g(y) = \mathbb{I}_{[2,3]}(y)$.
3. Calculer $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}Y^2$ puis $\text{Var } Y$.

Exercice 2. Moments de la loi gaussienne standard (4 points)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Que valent les $\mathbb{E}X^{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$? Justifier votre réponse.
2. On pose $a_n = \mathbb{E}X^{2n}$. Montrer en intégrant par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{\sigma^2(2n+1)} a_{n+1},$$

en déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}X^{2n}$.

Exercice 3. Loi normale (10 points)

On considère une suite de variables aléatoires $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et une suite de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) telles que

$$X_i = \frac{\theta}{i} + \varepsilon_i$$

où θ est un paramètre réel.

On rappelle que la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)$.

On rappelle aussi que pour une variable aléatoire Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ on a

$$\mathbb{P}(Y \leq -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(Y \leq -1.96) = 0.025; \mathbb{P}(Y \leq -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(Y \leq -1.28) = 0.10.$$

1. Les variables (X_1, \dots, X_n) sont elles indépendantes? identiquement distribuées?
2. Montrer que la vraisemblance d'une réalisation (x_1, \dots, x_n) de (X_1, \dots, X_n) en fonction de θ est

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \frac{\theta}{i})^2}.$$

3. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ .
4. Quelle est l'espérance de $\hat{\theta}$? Sa variance?
5. Donner un intervalle de confiance à 90% pour θ .