Université de Paris et Université Paris 1

Master 2 MO 2021 – 2022

Analyse des séries financières

Examen final, Février 2022

3h00, sans aucun document

I. Exercice théorique

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires centrées indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}\left[\varepsilon_0^2\right]=1$. Soit $a_0(\cdot)$ et $a_1(\cdot)$ deux fonctions $\mathcal{C}^1\big([0,1]\big)$ à valeurs réelles et on suppose que

$$\overline{a_0}=\sup_{x\in[0,1]}|a_0(x)|<\infty,\qquad \inf_{x\in[0,1]}a_0(x)\geq 0,\qquad \inf_{x\in[0,1]}a_1(x)\geq 0\quad\text{et}\quad \overline{a_1}=\sup_{x\in[0,1]}|a_1(x)|<1.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on s'intéresse à la suite de variables $(X_t^{(n)})_{0\leq t\leq n}$ telles que $X_0^{(n)}=0$ et

$$X_t^{(n)}=\varepsilon_t\,\sqrt{a_0\big(\frac{t}{n}\big)+a_1\big(\frac{t}{n}\big)\,\big(X_{t-1}^{(n)}\big)^2}\quad\text{pour tout }1\leq t\leq n.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(X_t^{(n)})_{0\leq t\leq n}$ soit stationnaire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, montrer que pour tout $1\leq t\leq n$, il existe une fonction $H_t^{(n)}:\mathbb{R}^t\to\mathbb{R}$ telle que $X_t^{(n)}=H_t^{(n)}\big(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\ldots,\varepsilon_1\big)$.

3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé et $0\leq t\leq n$, déterminer $\mathbb{E}\left[X_t^{(n)}\right]$.

4. Pour $p\geq 1$ et Z une variable aléatoire, on note $\|Z\|_p=\big(\mathbb{E}\left[|Z|^p\right]\big)^{1/p}$. On suppose que $\|\varepsilon_0\|_{2p}<\infty$ et on note $M_t^{(n)}=\max_{0\leq k\leq t}\big\|(X_k^{(n)})^2\big\|_p$. Montrer que $M_t^{(n)}\leq\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,M_{t-1}^{(n)}+\overline{a_0}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2$ pour tout $1\leq t\leq n$. En déduire que si $\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2<1$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\max_{0\leq t\leq n}\big\|(X_t^{(n)})^2\big\|_p\leq\frac{\overline{a_0}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2}{1-\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2}.$$

   On supposera désormais que $\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2<1$.

5. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $1\leq t\leq n-1$,

$$\operatorname{cov}\big(\big(X_t^{(n)}\big)^2,\,\big(X_{t+1}^{(n)}\big)^2\big)=a_1\big(\frac{t+1}{n}\big)\operatorname{var}\big(\big(X_t^{(n)}\big)^2\big).$$

6. Déduire de ce qui précéde, que pour n suffisamment grand, si a_0 ou a_1 prennent au moins 2 valeurs distinctes sur $[0,1]$, alors $(X_t^{(n)})_{1\leq t\leq n}$ n'est pas stationnaire.

7. Soit $u \in]0,1[$. On veut estimer $a_0(u)$ et $a_1(u)$ à partir d'une trajectoire observée $(X_1^{(n)},\dots,X_n^{(n)})$ où n est suffisamment grand. On commence par définir $(X_t^u)_{t\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$X_t^u = \varepsilon_t \sqrt{a_0(u) + a_1(u)\left(X_{t-1}^u\right)^2} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}\,.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(X_t^u)_{t\in\mathbb{Z}}$ soit stationnaire et montrer que cette condition est impliquée par la condition $\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2 < 1$.

8. Pour $\alpha_0 > 0$ et $0 \le \alpha_1$, on pose:

$$\Phi(x_1,x_2) = \log(\alpha_0 + \alpha_1\, x_2) + \frac{x_1}{\alpha_0 + \alpha_1\, x_2} \quad \text{pour} \quad (x_1,x_2) \in [0,\infty[^2.$$

Montrer que pour $(x_1,x_2,x_1',x_2') \in [0,\infty[^4$

$$\big|\Phi(x_1,x_2) - \Phi(x_1',x_2')\big| \le \frac{1}{\alpha_0}\,\big|x_1 - x_1'\big| + \frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}\,(\alpha_0 + x_1')\,\big|x_2 - x_2'\big|.$$

En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le t \le n$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\big|\Phi\big((X_t^{(n)})^2,(X_{t-1}^{(n)})^2\big) - \Phi\big((X_t^u)^2,(X_{t-1}^u)^2\big)\big|\Big]\\ &\qquad \le \frac{1}{\alpha_0}\,\mathbb{E}\Big[\big|(X_t^{(n)})^2 - (X_t^u)^2\big|\Big] + \frac{\alpha_1\sqrt{2}}{\alpha_0^2}\Big(\big(\alpha_0^2 + \mathbb{E}\big[(X_t^u)^4\big]\big)\,\mathbb{E}\Big[\big((X_{t-1}^{(n)})^2 - (X_{t-1}^u)^2\big)^2\Big]\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le t \le n$, montrer que:

$$\big\|(X_t^{(n)})^2-(X_t^u)^2\big\|_2 \le \|\varepsilon_0\|_4^2\,\Big(\big|a_0\big(\frac{t}{n}\big)-a_0(u)\big|+\frac{\overline{a_0}\,\|\varepsilon_0\|_4^2}{1-\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2}\,\big|a_1\big(\frac{t}{n}\big)-a_1(u)\big|+\overline{a_1}\,\big\|(X_{t-1}^{(n)})^2-(X_{t-1}^u)^2\big\|_2\Big).$$

10. Soit $\kappa \in]0,1[$ et $v_n = \big[n^\kappa\big]$. On considère n suffisamment grand pour que $v_n \le u\,n \le n - v_n$ et pour simplifier les notations on supposera que $u\,n \in \mathbb{N}^*$. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout t vérifiant $\big|t - u\,n\big| \le v_n$:

$$\big\|(X_t^{(n)})^2 - (X_t^u)^2\big\|_2 \le C\,\Big(\frac{v_n}{n} + \big(\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2\big)^{t-u\,n+v_n}\big\|(X_{u\,n-v_n}^{(n)})^2 - (X_{u\,n-v_n}^u)^2\big\|_2\Big).$$

En déduire qu'il existe $C' > 0$ ne dépendant pas de α_0 et α_1, tel que pour $\big|t - u\,n\big| \le v_n$:

$$\mathbb{E}\Big[\big|\Phi\big((X_t^{(n)})^2,(X_{t-1}^{(n)})^2\big) - \Phi\big((X_t^u)^2,(X_{t-1}^u)^2\big)\big|\Big] \le C'\,\Big(\frac{v_n}{n} + \big(\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2\big)^{t-u\,n+v_n}\Big),$$

puis, que pour (α_0,α_1) dans un compact Θ inclus dans $\big\{(x,y) \in]0,1[\times[0,1[,\; y\,\|\varepsilon_0\|_4^2 < 1\big\}$ et contenant $(a_0(u),a_1(u))$, alors:

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^{(n)})^2,(X_{t-1}^{(n)})^2\big) - \frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^u)^2,(X_{t-1}^u)^2\big)\Big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

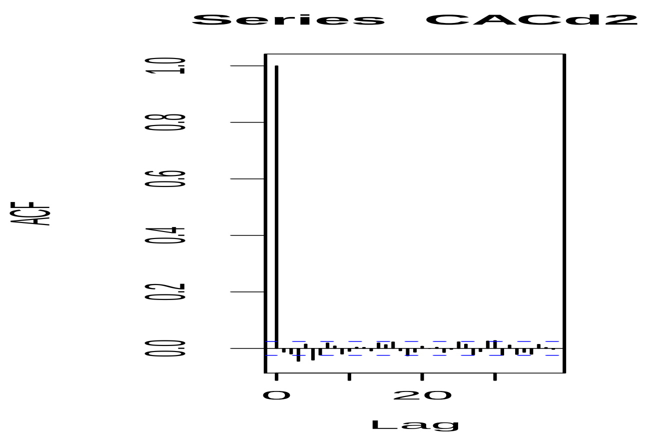
11. On considère la trajectoire $\big(X_t^{(n)}\big)_{|t-u\,n|\le v_n}$ et l'estimateur $(\widehat{a_0(u)},\widehat{a_1(u)})$ de $(a_0(u),a_1(u))$ par quasi-maximum de vraisemblance. Déduire de ce qui précède que $(\widehat{a_0(u)},\widehat{a_1(u)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} (a_0(u),a_1(u))$.

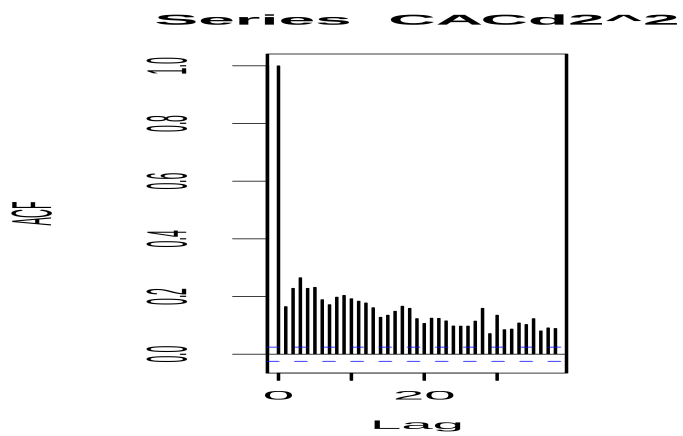
II. Exercice d'application du logiciel `R`

On s'intéresse à modéliser la cotation quotidienne en clôture du log-return du CAC40 (variable `CACd2`) du 25/01/1997 au 25/01/2022. On utilise le logiciel `R` à cet effet.

1. Voici les premières commandes effectuées:

```
acf(CACd2)
Box.test(CACd2, lag = 10, type = c("Ljung-Box"))
acf(CACd2^2)
Box.test(CACd2^2, lag = 10, type = c("Ljung-Box"))
```





Avec pour résultats numériques:

```
Box-Ljung test

data:  CACd2
X-squared = 38.777, df = 10, p-value = 2.778e-05

Box-Ljung test

data:  CACd2^2
X-squared = 2802.3, df = 10, p-value < 2.2e-16
```

Question II.1: Que conclure quant à la série `CACd2` *et quel type de processus peut-on escompter pour modéliser* `CACd2`*?*

2. On exécute alors:

```
Lik=function(vartheta,X)
{l=length(X); H.t=rep(var(X),2)
  for (i in c(1:(l-1)))
        H.t[i+1] = vartheta[1]+vartheta[2]%*%X[i]^2+vartheta[3]%*%H.t[i]
  sum(X[5:l]^2/H.t[5:l]+log(H.t[5:l]))  }
Fit=function(X,init)
{ res <- nlminb(init,Lik,lower=c(0.0000001,rep(0,2)),upper=c(100,rep(0.99,2)),X=X) }
init=c(2e-6,0,0)
Esti=Fit(CACd2,init); Esti$par
```

Avec pour résultats numériques:

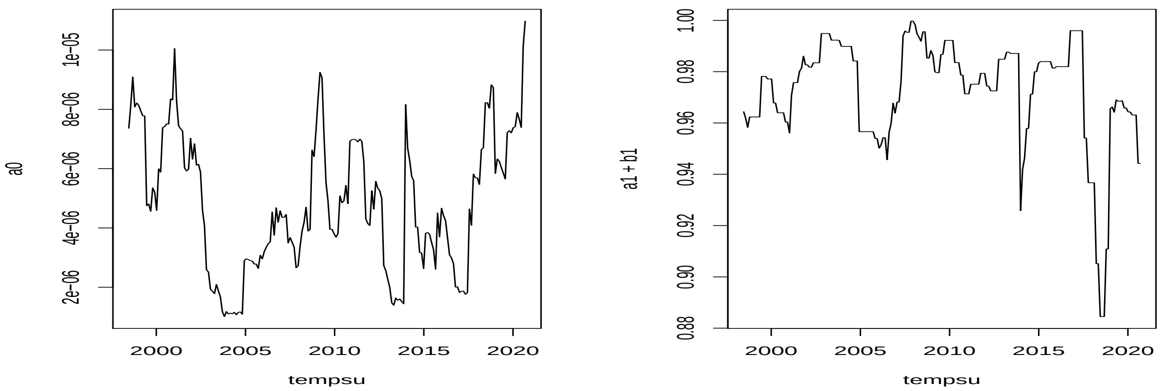
```
 [1] 2.840795e-06 9.718613e-02 8.898610e-01
```

Question II.2: Expliquer ce qui a été fait. A quel résultat aboutit-on (formaliser...)?

3. On continue alors par:

```
vn=floor(n^0.67); m=199; init=Esti$par
u=(vn+1)/n+(n-2*vn-1)/n*c(0:m)/m
for (k in c(1:(m+1)))
{t=u[k]*n-vn+c(0:(2*vn))
Y=CACd2[t]; Esti=Fit(Y,init); init=Esti$par
a0[k]=Esti$par[1]; a1[k]=Esti$par[2]; b1[k]=Esti$par[3]}
tempsu=1997+25/365+u*25; plot(tempsu,a0,'l'); plot(tempsu,a1+b1,'l')
```

On obtient alors:



Question II.3: Qu'a-t-on fait ici? Que représentent les 2 graphes (formaliser)? Reconnait-on sur les graphes d'éventuelles crises expliquant des changements de dynamique financière?

4. On tape enfin:

```
Ind=as.factor(floor(c(0:(m))/20))
mod0=lm(a0~1); mod1=lm(a0~Ind)
anova(mod1,mod0)
```

Et on obtient les réultats:

```
Analysis of Variance Table
Model 1: a0 ~ Ind
Model 2: a0 ~ 1
  Res.Df        RSS Df   Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    190 4.4235e-10
2    199 1.0435e-09 -9 -6.0112e-10 28.688 < 2.2e-16 ***
```

Question II.4: Qu'a-t-on fait et pourquoi a-t-on exécuté ces commandes? Que peut-on en déduire?