Université de Paris et Université Paris 1

Master 2 MO 2021 – 2022

Analyse des séries financières

Examen final, Février 2022

3h00, sans aucun document

I. Exercice théorique

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires centrées indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}\left[\varepsilon_0^2\right]=1$. Soit $a_0(\cdot)$ et $a_1(\cdot)$ deux fonctions $\mathcal{C}^1\big([0,1]\big)$ à valeurs réelles et on suppose que

$$\overline{a_0}=\sup_{x\in[0,1]}|a_0(x)|<\infty,\qquad \inf_{x\in[0,1]}a_0(x)\geq 0,\qquad \inf_{x\in[0,1]}a_1(x)\geq 0\quad\text{et}\quad \overline{a_1}=\sup_{x\in[0,1]}|a_1(x)|<1.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on s'intéresse à la suite de variables $(X_t^{(n)})_{0\leq t\leq n}$ telles que $X_0^{(n)}=0$ et

$$X_t^{(n)}=\varepsilon_t\sqrt{a_0\big(\frac{t}{n}\big)+a_1\big(\frac{t}{n}\big)\,\big(X_{t-1}^{(n)}\big)^2}\quad\text{pour tout }1\leq t\leq n.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(X_t^{(n)})_{0\leq t\leq n}$ soit stationnaire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, montrer que pour tout $1\leq t\leq n$, il existe une fonction $H_t^{(n)}:\mathbb{R}^t\to\mathbb{R}$ telle que $X_t^{(n)}=H_t^{(n)}\big(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\dots,\varepsilon_1\big)$.
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé et $0\leq t\leq n$, déterminer $\mathbb{E}\left[X_t^{(n)}\right]$.
4. Pour $p\geq 1$ et Z une variable aléatoire, on note $\|Z\|_p=\big(\mathbb{E}\left[|Z|^p\right]\big)^{1/p}$. On suppose que $\|\varepsilon_0\|_{2p}<\infty$ et on note $M_t^{(n)}=\max_{0\leq k\leq t}\big\|(X_k^{(n)})^2\big\|_p$. Montrer que $M_t^{(n)}\leq\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,M_{t-1}^{(n)}+\overline{a_0}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2$ pour tout $1\leq t\leq n$. En déduire que si $\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2<1$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\max_{0\leq t\leq n}\big\|(X_t^{(n)})^2\big\|_p\leq\frac{\overline{a_0}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2}{1-\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_{2p}^2}.$$

   On supposera désormais que $\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2<1$.

5. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $1\leq t\leq n-1$,

$$\operatorname{cov}\big(\big(X_t^{(n)}\big)^2,\,\big(X_{t+1}^{(n)}\big)^2\big)=a_1\big(\frac{t+1}{n}\big)\operatorname{var}\big(\big(X_t^{(n)}\big)^2\big).$$

6. Déduire de ce qui précéde, que pour n suffisamment grand, si a_0 ou a_1 prennent au moins 2 valeurs distinctes sur $[0,1]$, alors $(X_t^{(n)})_{1\leq t\leq n}$ n'est pas stationnaire.

7. Soit $u \in]0,1[$. On veut estimer $a_0(u)$ et $a_1(u)$ à partir d'une trajectoire observée $(X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)})$ où n est suffisamment grand. On commence par définir $(X_t^u)_{t\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$X_t^u = \varepsilon_t \sqrt{a_0(u) + a_1(u)\,\big(X_{t-1}^u\big)^2} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}\,.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(X_t^u)_{t\in\mathbb{Z}}$ soit stationnaire et montrer que cette condition est impliquée par la condition $\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2 < 1$.

8. Pour $\alpha_0 > 0$ et $0 \le \alpha_1$, on pose:

$$\Phi(x_1, x_2) = \log(\alpha_0 + \alpha_1\, x_2) + \frac{x_1}{\alpha_0 + \alpha_1\, x_2} \quad \text{pour} \quad (x_1, x_2) \in [0, \infty[^2.$$

Montrer que pour $(x_1, x_2, x_1', x_2') \in [0, \infty[^4$

$$\big|\Phi(x_1, x_2) - \Phi(x_1', x_2')\big| \le \frac{1}{\alpha_0}\,\big|x_1 - x_1'\big| + \frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}\,(\alpha_0 + x_1')\,\big|x_2 - x_2'\big|.$$

En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le t \le n$,

$$\mathbb{E}\Big[\big|\Phi\big((X_t^{(n)})^2, (X_{t-1}^{(n)})^2\big) - \Phi\big((X_t^u)^2, (X_{t-1}^u)^2\big)\big|\Big] \\ \le \frac{1}{\alpha_0}\,\mathbb{E}\Big[\big|(X_t^{(n)})^2 - (X_t^u)^2\big|\Big] + \frac{\alpha_1\sqrt{2}}{\alpha_0^2}\Big(\big(\alpha_0^2 + \mathbb{E}\big[(X_t^u)^4\big]\big)\,\mathbb{E}\Big[\big((X_{t-1}^{(n)})^2 - (X_{t-1}^u)^2\big)^2\Big]\Big)^{1/2}.$$

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le t \le n$, montrer que:

$$\big\|(X_t^{(n)})^2 - (X_t^u)^2\big\|_2 \le \|\varepsilon_0\|_4^2\,\Big(\big|a_0\big(\frac{t}{n}\big) - a_0(u)\big| + \frac{\overline{a_0}\,\|\varepsilon_0\|_4^2}{1 - \overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2}\,\big|a_1\big(\frac{t}{n}\big) - a_1(u)\big| + \overline{a_1}\,\big\|(X_{t-1}^{(n)})^2 - (X_{t-1}^u)^2\big\|_2\Big).$$

10. Soit $\kappa \in]0,1[$ et $v_n = \big[n^\kappa\big]$. On considère n suffisamment grand pour que $v_n \le u\,n \le n - v_n$ et pour simplifier les notations on supposera que $u\,n \in \mathbb{N}^*$. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout t vérifiant $\big|t - u\,n\big| \le v_n$:

$$\big\|(X_t^{(n)})^2 - (X_t^u)^2\big\|_2 \le C\,\Big(\frac{v_n}{n} + \big(\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2\big)^{t-u\,n+v_n}\,\big\|(X_{u\,n-v_n}^{(n)})^2 - (X_{u\,n-v_n}^u)^2\big\|_2\Big).$$

En déduire qu'il existe $C' > 0$ ne dépendant pas de α_0 et α_1, tel que pour $\big|t - u\,n\big| \le v_n$:

$$\mathbb{E}\Big[\big|\Phi\big((X_t^{(n)})^2, (X_{t-1}^{(n)})^2\big) - \Phi\big((X_t^u)^2, (X_{t-1}^u)^2\big)\big|\Big] \le C'\,\Big(\frac{v_n}{n} + \big(\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2\big)^{t-u\,n+v_n}\Big),$$

puis, que pour (α_0, α_1) dans un compact Θ inclus dans $\big\{(x,y) \in]0,1[\times[0,1[,\ y\,\|\varepsilon_0\|_4^2 < 1\big\}$ et contenant $(a_0(u), a_1(u))$, alors:

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^{(n)})^2, (X_{t-1}^{(n)})^2\big) - \frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^u)^2, (X_{t-1}^u)^2\big)\Big|\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

11. On considère la trajectoire $\big(X_t^{(n)}\big)_{|t-u\,n|\le v_n}$ et l'estimateur $(\widehat{a_0(u)}, \widehat{a_1(u)})$ de $(a_0(u), a_1(u))$ par quasi-maximum de vraisemblance. Déduire de ce qui précède que $(\widehat{a_0(u)}, \widehat{a_1(u)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} (a_0(u), a_1(u))$.

Proof. 1. Comme $X_0^{(n)}=0$ pour que $(X_t^{(n)})_{0\leq t\leq n}$ soit stationnaire, il faut que $X_1^{(n)}=0$, d'où $a_0(1/n)=a_1(1/n)=0$ car $\varepsilon_1\neq 0$ p.s. Par extension $a_0(k/n)=a_1(k/n)=0$ pour tout $1\leq k\leq n$ et tout $n\in\mathbb{N}$. Comme les k/n sont dense dans $[0,1]$ et que les fonctions a_0 et a_1 sont continues, on en déduit que $a_0\equiv 0$ et $a_1\equiv 0$.

2. Par itération, pour $t\geq 2$, $X_t^{(n)}=\varepsilon_t\Big(a_0(\frac{t}{n})+a_1(\frac{t}{n})\varepsilon_{t-1}^2\big(a_0(\frac{t-1}{n})+a_1(\frac{t-1}{n})(X_{t-2}^{(n)})^2\big)\Big)^{1/2}$, on peut continuer l'itération jusqu'à obtenir $X_0^{(n)}$ qui vaut 0 et on aura seulement une fonction des $(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq t}$ (démonstation par récurrence également possible).

3. En utilisant la question 2., on a $X_t^{(n)}$ indépendant de ε_{t+1} puisque (ε_k) bruit blanc. D'où $\mathbb{E}\,[X_t^{(n)}]=\mathbb{E}\,[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}\,\big[(a_0(t/n)+a_1(t/n)(X_{t-1}^{(n)})^2)^{1/2}\big]=0$ pour $t\geq 1$, et $\mathbb{E}\,[X_0^{(n)}]=\mathbb{E}\,[0]=0$.

4. On a $\|(X_t^{(n)})^2\|_p=\|\varepsilon_t^2\|_p\|a_0(\frac{t}{n})+a_1(\frac{t}{n})(X_{t-1}^{(n)})^2\|_p$ par indépendance, d'où pour tout $1\leq t\leq n$ et tout $1\leq k\leq t$

$$\begin{array}{rcll} \|(X_k^{(n)})^2\|_p &=& \|\varepsilon_k\|_{2p}^2\,\big\|a_0(\frac{k}{n})+a_1(\frac{k}{n})(X_{k-1}^{(n)})^2\big\|_p & \\ &\leq& \|\varepsilon_k\|_{2p}^2\,\big(|a_0(\frac{k}{n})|+|a_1(\frac{k}{n})|\big\|(X_{k-1}^{(n)})^2\big\|_p\big) & \text{inégalité triangulaire)} \\ &\leq& \|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,\big(\overline{a}_0+\overline{a}_1\,\big\|(X_{k-1}^{(n)})^2\big\|_p\big) & \\ \Longrightarrow\quad \|(X_k^{(n)})^2\|_p &\leq& \|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,\big(\overline{a}_0+\overline{a}_1\,M_{t-1}^{(n)}\big) & \text{pour tout } 1\leq k\leq t \\ \Longrightarrow\quad M_t^{(n)} &\leq& \|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,\big(\overline{a}_0+\overline{a}_1\,M_{t-1}^{(n)}\big) & \end{array}$$

Par itération, $M_t^{(n)}\leq\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,\big(\overline{a}_0+\overline{a}_1\,\big(\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,\big(\overline{a}_0+\overline{a}_1\,M_{t-2}^{(n)}\big)\big)\big)=\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,\overline{a}_0\big(1+\overline{a}_1\,\big(\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\big)+\big(\overline{a}_1\,\big(\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\big)^2M_{t-2}^{(n)}$, soit

$$M_t^{(n)}\leq\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\,\overline{a}_0\big(1+\overline{a}_1\,\big(\|\varepsilon_0\|_{2p}^2+\cdots+\big(\overline{a}_1\,\big(\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\big)^{k-1}\big)+\big(\overline{a}_1\,\big(\|\varepsilon_0\|_{2p}^2\big)^kM_{t-k}^{(n)}\quad\text{pour tout } 1\leq k\leq t$$

Si on étend à $k=t$, et on utilise la somme d'une suite géométrique et $X_0^{(n)}=M_0^{(n)}=0$ on obtient le résultat.

5. Tout d'abord cette covariance $\operatorname{cov}\big(\big(X_t^{(n)}\big)^2\,,\,\big(X_{t+1}^{(n)}\big)^2\big)$ existe car $\mathbb{E}\,\big[\big(X_t^{(n)}\big)^4\big]<\infty$ avec la condition. Ensuite,

$$\operatorname{cov}\big(\big(X_t^{(n)}\big)^2\,,\,\big(X_{t+1}^{(n)}\big)^2\big)=\operatorname{cov}\big(\big(X_t^{(n)}\big)^2\,,\,\varepsilon_{t+1}^2\big(a_0(\frac{t+1}{n})+a_1(\frac{t+1}{n})(X_t^{(n)})^2\big)\big)=\operatorname{cov}\big(\big(X_t^{(n)}\big)^2\,,\,\varepsilon_{t+1}^2a_1(\frac{t+1}{n})(X_t^{(n)})^2\big)$$

car ε_{t+1}^2 et $\big(X_t^{(n)}\big)^2$ sont indépendants, donc $\operatorname{cov}\big(\varepsilon_{t+1}^2,\big(X_t^{(n)}\big)^2\big)=0$. On utilise ensuite $\mathbb{E}\,[\varepsilon_0^2]=1$.

6. Supposons que a_1 prennent deux valeurs distinctes. Du fait que a_1 est continue et que n est suffisamment grand, on peut ecrire qu'il existe $1\leq t_1\leq n-1$ tel que $a_1(t_1/n)\neq a_1((t_1+1)/n)$. Grâce à la propriété du 5., on a donc: $\operatorname{cov}\big(\big(\big(X_{t_1}^{(n)}\big)^2\,,\,\big(X_{t_1+1}^{(n)}\big)^2\big)=a_1\big(\frac{t_1+1}{n}\big)\operatorname{var}\big(\big(X_{t_1}^{(n)}\big)^2\big)$ et $\operatorname{cov}\big(\big(\big(X_{t_1}^{(n)}\big)^2\,,\,\big(X_{t_1-1}^{(n)}\big)^2\big)=a_1\big(\frac{t_1}{n}\big)\operatorname{var}\big(\big(X_{t_1-1}^{(n)}\big)^2\big)$. Or si $(X_t^{(n)})_{1\leq t\leq n}$ est stationnaire alors $\operatorname{cov}\big(\big(\big(X_{t_1}^{(n)}\big)^2\,,\,\big(X_{t_1+1}^{(n)}\big)^2\big)=\operatorname{cov}\big(\big(\big(X_{t_1}^{(n)}\big)^2$ et $\operatorname{var}\big(\big(X_{t_1-1}^{(n)}\big)^2\big)=\operatorname{var}\big(\big(X_{t_1}^{(n)}\big)^2\big)$. Ceci implique que $a_1\big(\frac{t_1+1}{n}\big)=a_1\big(\frac{t_1}{n}\big)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons maintenant que a_o prennent deux valeurs distinctes et a_1 est constante (sinon on sait déjà que $(X_t^{(n)})_{1\leq t\leq n}$ n'est pas stationnaire), et comme précédemment il existe $1\leq t_0\leq n-1$ tel que $a_0(t_0/n)\neq a_0((t_0+1)/n)$. alors $\mathbb{E}\,\big[\big(X_{t_0+1}^{(n)}\big)^2\big]=a_0((t_0+1)/n)+a_1((t_0+1)/n)\,\mathbb{E}\,\big[\big(X_{t_0}^{(n)}\big)^2\big]$ et $\mathbb{E}\,\big[\big(X_{t_0}^{(n)}\big)^2\big]=a_0((t_0)/n)+a_1((t_0)/n)\,\mathbb{E}\,\big[\big(X_{t_0-1}^{(n)}\big)^2\big]$. Or si $(X_t^{(n)})_{1\leq t\leq n}$ est stationnaire alors $\mathbb{E}\,\big[\big(X_{t_0+1}^{(n)}\big)^2\big]=\mathbb{E}\,\big[\big(X_{t_0}^{(n)}\big)^2\big]=\mathbb{E}\,\big[\big(X_{t_0-1}^{(n)}\big)^2\big]$, ce qui est contradiction avec $a_0(t_0/n)\neq a_0((t_0+1)/n)$ et $a_1(t_0/n)=a_1((t_0+1)/n)$.

7. $(X_t^u)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARCH(1). On sait que pour un GARCH$(1,1)$ la CNS de stationnarité stricte est $\mathbb{E}\,[\log(\alpha_1\varepsilon_0^2+\beta_1)]<0$. Donc ici la condition devient $\mathbb{E}\,[\log(a_1(u)\varepsilon_0^2)]<0$. Comme $\mathbb{E}\,[\varepsilon_0^2]=1$, alors d'après l'inégalité de Jensen $\big(\mathbb{E}\,[\varepsilon_0^2]\big)^2\leq E[\varepsilon_0^4]$, donc $\|\varepsilon_0\|_4\geq 1$. Ainsi La condition $\overline{a_1}\,\|\varepsilon_0\|_4^2<1$ implique que $\overline{a_1}<1$ et donc que $a_(u)<1$. Par conséquent, en utilisant encore l'inégalité de Jensen,

$$\mathbb{E}\,[\log(a_1(u)\varepsilon_0^2)]=\log(a_1(u))+\mathbb{E}\,[\log(\varepsilon_0^2)]\leq\log(a_1(u))+\log\big(\mathbb{E}\,[\varepsilon_0^2]\big)<0,$$

puisque $\mathbb{E}\,[\varepsilon_0^2]=1$.

8. On a grâce à l'inégalité des accroissements finis,

$$\big|\log(\alpha_0+\alpha_1\,x_2)-\log(\alpha_0+\alpha_1\,x_2)\big|\leq\sup_{x\geq 0}\Big\{\Big|\frac{\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1\,x}\Big|\Big\}\times|x_2-x_2'|=\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\times|x_2-x_2'|.$$

De même, et cela mène au résultat,

$$\Big|\frac{x_1}{\alpha_0+\alpha_1\,x_2}-\frac{x_1'}{\alpha_0+\alpha_1\,x_2'}\Big|\;\leq\;\Big|\frac{x_1}{\alpha_0+\alpha_1\,x_2}-\frac{x_1'}{\alpha_0+\alpha_1\,x_2}\Big|+\Big|\frac{x_1'}{\alpha_0+\alpha_1\,x_2}-\frac{x_1'}{\alpha_0+\alpha_1\,x_2'}\Big|\;\leq\;\frac{1}{\alpha_0}\,|x_1+x_1'|+|x_1'|\,\frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}.$$

On remplace ensuite x_1,x_1',x_2,x_2' par $(X_t^{(n)})^2,(X_t^u)^2,(X_{t-1}^{(n)})^2,(X_{t-1}^u)^2$ et on passe à l'espérance. On obtient alors:

$$\mathbb{E}\Big[\big|\Phi\big((X_t^{(n)})^2,(X_{t-1}^{(n)})^2\big)-\Phi\big((X_t^u)^2,(X_{t-1}^u)^2\big)\big|\Big]\leq\frac{1}{\alpha_0}\,\mathbb{E}\Big[\big|(X_t^{(n)})^2-(X_t^u)^2\big|\Big]+\frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}\,\mathbb{E}\Big[\Big(\big(\alpha_0+(X_t^u)^2\big)\,\big((X_{t-1}^{(n)})^2-(X_{t-1}^u)^2\big)\Big].$$

On utilise ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$.

9. Avec les équations définissant ces processus, on obtien:

$$\begin{aligned}
(X_t^{(n)})^2-(X_t^u)^2 &= \varepsilon_t^2\Big(a_0\big(\frac{t}{n}\big)-a_0(u)+\big(a_1\big(\frac{t}{n}\big)(X_{t-1}^{(n)})^2-a_1(u)(X_{t-1}^u)^2\big)\Big)\\
&= \varepsilon_t^2\Big(a_0\big(\frac{t}{n}\big)-a_0(u)+\big(a_1\big(\frac{t}{n}\big)-a_1(u)\big)(X_{t-1}^{(n)})^2+a_1(u)\big((X_{t-1}^{(n)})^2-(X_{t-1}^u)^2\big)\Big)\\
\Longrightarrow \big\|(X_t^{(n)})^2-(X_t^u)^2\big\|_2 &\leq \big\|\varepsilon_t^2\big\|_2\,\Big(\big|a_0\big(\frac{t}{n}\big)-a_0(u)\big|+\big|a_1\big(\frac{t}{n}\big)-a_1(u)\big|\,\big\|(X_{t-1}^{(n)})^2\big\|_2+|a_1(u)|\big\|\big((X_{t-1}^{(n)})^2-(X_{t-1}^u)^2\big)\big\|_2\Big)
\end{aligned}$$

toujours grâce à l'indépendance et à l'inégalité triangulaire. On en déduit le résultat.

10. En utilisant $u\,n-v_n\leq t\leq u\,n+v_n$ et le fait que les fonctions a_0 et a_1 sont de classe $\mathcal{C}^1([0,1])$, on en déduit que $\big|a_0\big(\frac{t}{n}\big)-a_0(u)\big|\leq\sup_{x\in[0,1]}|a_0'(t)|\,\frac{v_n}{n}$ et $\big|a_1\big(\frac{t}{n}\big)-a_1(u)\big|\leq\sup_{x\in[0,1]}|a_1'(t)|\,\frac{v_n}{n}$. On en déduit de l'inégalité précédente, qu'il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $u\,n-v_n\leq t\leq u\,n+v_n$

$$\big\|(X_t^{(n)})^2-(X_t^u)^2\big\|_2\leq c\,\frac{v_n}{n}+\big(\|\varepsilon_0\|_4^2\overline{a_1}\big)\times\big\|\big((X_{t-1}^{(n)})^2-(X_{t-1}^u)^2\big)\big\|_2.$$

Par itération, on a pour tout $k=1\dots,t-u\,n+v_n$,

$$\big\|(X_t^{(n)})^2-(X_t^u)^2\big\|_2\leq c\,\frac{v_n}{n}\Big(1+\big(\|\varepsilon_0\|_4^2\overline{a_1}\big)+\cdots+\big(\|\varepsilon_0\|_4^2\overline{a_1}\big)^{k-1}\Big)+\big(\|\varepsilon_0\|_4^2\overline{a_1}\big)^k\times\big\|\big((X_{t-k}^{(n)})^2-(X_{t-k}^u)^2\big)\big\|_2.$$

D'où le résultat pour $k=t-u\,n+v_n$, en utilisant le fait que $\big(\|\varepsilon_0\|_4^2\overline{a_1}\big)<1$.
L'inégalité qui suit en découle facilement en utilisant le résultat du 8.
Enfin, la dernière inégalité vient du fait que $\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\big(\|\varepsilon_0\|_4^2\overline{a_1}\big)^{t-u\,n+v_n}<\infty$ donc:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^{(n)})^2,(X_{t-1}^{(n)})^2\big)-\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^u)^2,(X_{t-1}^u)^2\big)\Big|\Big]\\
&\qquad\leq\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\mathbb{E}\Big[\Big|\Phi\big((X_t^{(n)})^2,(X_{t-1}^{(n)})^2\big)-\Phi\big((X_t^u)^2,(X_{t-1}^u)^2\big)\Big|\Big]\\
&\qquad\qquad\leq\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}C'\,\frac{v_n}{n}+\big(\|\varepsilon_0\|_4^2\overline{a_1}\big)^{t-u\,n+v_n}\leq C''\,\big(\frac{v_n}{n}+\frac{1}{v_n}\big)\;\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\;0.
\end{aligned}$$

11. Pour le processus (X_t^u) qui est stationnaire, on sait d'après le cours, le résultat sur la quasi-vraisemblance gaussienne:

$$\sup_{\alpha_0,alpha_1}\Big|\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^u)^2,(X_{t-1}^u)^2\big)-\mathbb{E}\big[\Phi\big((X_1^u)^2,(X_0^u)^2\big)\big]\Big|\;\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}}\;0,$$

et $\mathbb{E}\big[\Phi\big((X_1^u)^2,(X_0^u)^2\big)\big]$ admet un unique minimum en $(a_0(u),a_1(u))$. Ici $(X_t^u)_{1\leq t\leq n}$ n'est pas observé mais $(X_1^{(n)},\dots,X_n^{(n)})$ l'est. De ce qui précède on déduit à l'aide de l'inégalité triangulaire et de l'Inégalité de Markov:

$$\sup_{\alpha_0,\alpha_1}\Big|\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^{(n)})^2,(X_{t-1}^{(n)})^2\big)-\mathbb{E}\big[\Phi\big((X_1^u)^2,(X_0^u)^2\big)\big]\Big|\;\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}}\;0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{argmin}_{\alpha_0,\alpha_1}\frac{1}{2\,v_n}\sum_{t=u\,n-v_n}^{u\,n+v_n}\Phi\big((X_t^{(n)})^2,(X_{t-1}^{(n)})^2\big)\;\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}}\;\operatorname*{argmin}_{\alpha_0,\alpha_1}\mathbb{E}\big[\Phi\big((X_1^u)^2,(X_0^u)^2\big)\big]\\
&\qquad\qquad\Longrightarrow\quad\big(\widehat{a_0(u)},\widehat{a_1(u)}\big)\;\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}}\;(a_0(u),a_1(u)).
\end{aligned}$$

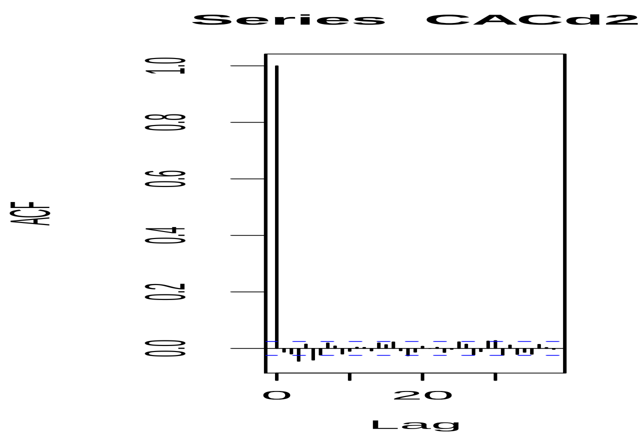
$\square$

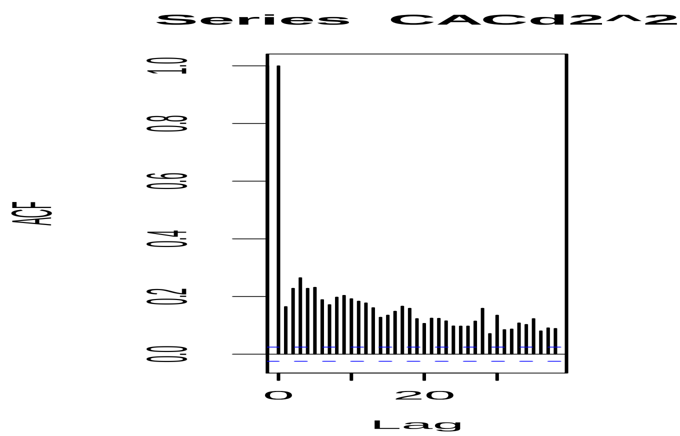
II. Exercice d'application du logiciel `R`

On s'intéresse à modéliser la cotation quotidienne en clôture du log-return du CAC40 (variable `CACd2`) du 25/01/1997 au 25/01/2022. On utilise le logiciel `R` à cet effet.

1. Voici les premières commandes effectuées:

```
acf(CACd2)
Box.test(CACd2, lag = 10, type = c("Ljung-Box"))
acf(CACd2^2)
Box.test(CACd2^2, lag = 10, type = c("Ljung-Box"))
```





Avec pour résultats numériques:

```
Box-Ljung test

data:  CACd2
X-squared = 38.777, df = 10, p-value = 2.778e-05

Box-Ljung test

data:  CACd2^2
X-squared = 2802.3, df = 10, p-value < 2.2e-16
```

Question II.1: Que conclure quant à la série `CACd2` *et quel type de processus peut-on escompter pour modéliser* `CACd2`*?*

2. On exécute alors:

```
Lik=function(vartheta,X)
{l=length(X); H.t=rep(var(X),2)
  for (i in c(1:(l-1)))
        H.t[i+1] = vartheta[1]+vartheta[2]%*%X[i]^2+vartheta[3]%*%H.t[i]
  sum(X[5:l]^2/H.t[5:l]+log(H.t[5:l]))  }
Fit=function(X,init)
{ res <- nlminb(init,Lik,lower=c(0.0000001,rep(0,2)),upper=c(100,rep(0.99,2)),X=X) }
init=c(2e-6,0,0)
Esti=Fit(CACd2,init); Esti$par
```

Avec pour résultats numériques:

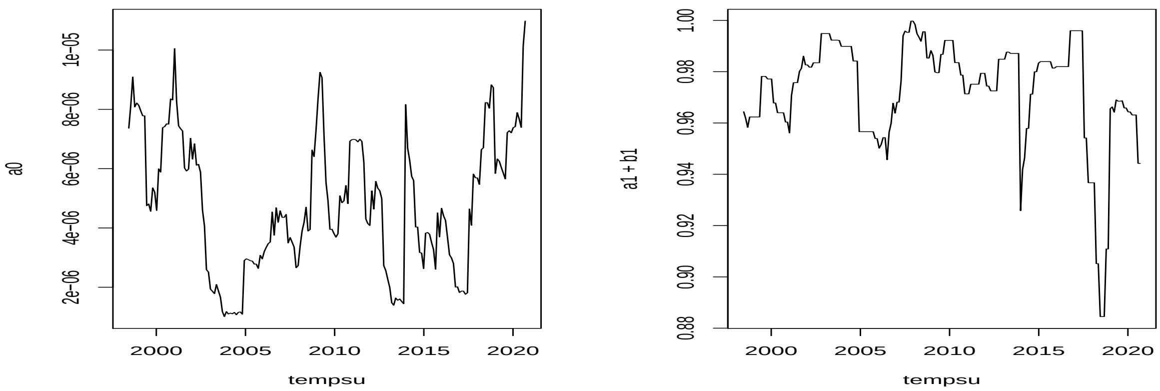
```
 [1] 2.840795e-06 9.718613e-02 8.898610e-01
```

Question II.2: Expliquer ce qui a été fait. A quel résultat aboutit-on (formaliser...)?

3. On continue alors par:

```
vn=floor(n^0.67); m=199; init=Esti$par
u=(vn+1)/n+(n-2*vn-1)/n*c(0:m)/m
for (k in c(1:(m+1)))
{t=u[k]*n-vn+c(0:(2*vn))
Y=CACd2[t]; Esti=Fit(Y,init); init=Esti$par
a0[k]=Esti$par[1]; a1[k]=Esti$par[2]; b1[k]=Esti$par[3]}
tempsu=1997+25/365+u*25; plot(tempsu,a0,'l'); plot(tempsu,a1+b1,'l')
```

On obtient alors:



Question II.3: Qu'a-t-on fait ici? Que représentent les 2 graphes (formaliser)? Reconnait-on sur les graphes d'éventuelles crises expliquant des changements de dynamique financière?

4. On tape enfin:

```
Ind=as.factor(floor(c(0:(m))/20))
mod0=lm(a0~1); mod1=lm(a0~Ind)
anova(mod1,mod0)
```

Et on obtient les réultats:

```
Analysis of Variance Table
Model 1: a0 ~ Ind
Model 2: a0 ~ 1
  Res.Df        RSS Df   Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    190 4.4235e-10
2    199 1.0435e-09 -9 -6.0112e-10 28.688 < 2.2e-16 ***
```

Question II.4: Qu'a-t-on fait et pourquoi a-t-on exécuté ces commandes? Que peut-on en déduire?