Statistique et Probabilités, L2 MIASHS, Partiel
09/01/2019, Durée : deux heures

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Exercice 1. Variables uniformes *(9 points)*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme continue sur l'intervalle $[0,3]$.

1. Quelles sont les densités de X et Y ? Quelle est la densité du couple (X,Y) ?
2. Calculer l'espérance du couple, la matrice de variance-covariance.
3. Donner la loi de la variable $Z = X + Y$ (support et densité).
4. Donner la loi de la variable $U = X - Y$ (support et densité).

Exercice 2. Estimation paramétrique *(9 points)*
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ la réalisation d'un n-échantillon i.i.d. d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{p}$.

On rappelle que la loi $\mathcal{G}(\frac{1}{p})$ est $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{p}(1 - \frac{1}{p})^{k-1}$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathrm{V}(X) = p(p-1)$.

On rappelle aussi que pour une variable aléatoire Y suivant la loi gaussienne de moyenne 0 et de variance 1 on a

$$\mathbb{P}(Y \le -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(Y \le -1.96) = 0.025; \mathbb{P}(Y \le -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(Y \le -1.28) = 0.10.$$

1. Donner la vraisemblance de $(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction de p. En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance de p, $\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$.
2. Calculer le biais et le risque quadratique moyen de $\hat{p}$.
3. Montrer, sans utiliser les résultats du cours sur les estimateurs du maximum de vraisemblance, que $\hat{p}$ est convergent.
4. En utilisant une approximation gaussienne de la loi de $\hat{p}$ et en remplaçant $p(p-1)$ par $\hat{p}(\hat{p}-1)$, donner un intervalle de confiance de niveau α pour p.
5. On a trouvé une moyenne de 600 observations $\sum_{i=1}^{600} x_i/600 = 3$. Calculer l'intervalle de confiance de niveau 90% pour p.

Exercice 3. Chaîne de Markov *(3 points)*
On considère la chaîne de Markov à trois états ($X_t \in E = \{e_1, e_2, e_3\}$) avec $\mathbb{P}(X_0 = e_2) = 1$ et la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1. Tous les états sont ils récurrents ? Si non, les quels ne le sont pas ?
2. Calculer la probabilité de la suite $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = (e_2, e_2, e_3, e_1, e_1)$.
3. Calculer la mesure invariante.