Partiel
Statistiques et Probabilités, L2 MASS
14/05/2012, Durée : deux heures
Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

NOM : **PRÉNOM :**

Exercice 1. Test d'hypothèse

On note $X_1, \ldots, X_n$ les durées de vie de n tubes fluorescents. On suppose que $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Normale d'espérance μ et d'écart-type $\sigma = 120$. Sur un échantillon de 100 tubes fluorescents, on a observé une durée de vie moyenne de 1570 heures.

1. À l'aide de cet échantillon, tester l'hypothèse $H_0 : \mu = 1600$ contre l'hypothèse $H_1 : \mu \neq 1600$, avec un niveau de test

a) $\alpha = 0.05$,

b) $\alpha = 0.01$.

2. Sur un autre échantillon de taille n inconnue, la moyenne observée a été de 1580 heures et au risque d'erreur de première espèce de 5% l'hypothèse nulle a été rejetée. Quelle serait donc la valeur minimale de n ?

On rappelle que pour une loi gaussienne Y de moyenne 0 et de variance 1 on a

$$\mathbb{P}(Y \leq -2.58) = 0.005; \mathbb{P}(Y \leq -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(Y \leq -1.96) = 0.025;$$

$$\mathbb{P}(Y \leq -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(Y \leq -1.28) = 0.10.$$

Exercice 2. Chaîne de Markov

On considère la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(U_n = -1) = p$ et $\mathbb{P}(U_n = 1) = 1 - p$, $p \in (0, 1)$. On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$X_{n+1} = U_{n+1} X_n \quad \text{avec} \quad X_0 = a$$

où a est un nombre réel donné.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

2. Donner l'espace des états, la matrice de transition et une représentation graphique de celle ci.

3. Tous les états sont ils récurrents ?

4. Calculer la mesure invariante de la chaîne.

5. On note $\mathbb{1}_{\{x\neq y\}}(x, y)$ la fonction qui vaut 1 si $x \neq y$, et 0 sinon. Montrer que la vraisemblance d'une réalisation $(x_0, \ldots, x_n)$ de $(X_0, \ldots, X_n)$ en fonction de p est

$$L(p, x_0, \ldots, x_n) = p^{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \neq x_{i-1}\}}(x_i, x_{i-1})} (1 - p)^{n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \neq x_{i-1}\}}(x_i, x_{i-1})}.$$

6. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}$ de p.

7. Montrer que $\hat{p}$ est sans biais et convergent.

Tournez s.v.p. −>

Exercice 3. Couple de variables aléatoires continues

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires continues i.i.d. avec la densité commune $f(x)$ et la fonction de répartition commune $F(x)$. Étant donnés $X_1, \ldots, X_n$, on définit deux nouvelles variables aléatoires

$$U = \min(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad V = \max(X_1, \ldots, X_n),$$

qui sont respectivement le minimum et le maximum de l'échantillon i.i.d..

1. En notant $G(u)$ et $H(v)$ les fonctions de répartition des variables aléatoires U et V, montrer que

$$G(u) = 1 - (1 - F(u))^n \quad \text{et} \quad H(v) = (F(v))^n.$$

2. En déduire les densités de U et V en fonction de $F(x)$ et $f(x)$.
3. Montrer que pour $u \leq v$, $\mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbb{P}(V \leq v) - \mathbb{P}(U > u, V \leq v)$.
4. Montrer que pour $u \leq v$, $\mathbb{P}(U > u, V \leq v) = (F(v) - F(u))^n$.
5. En déduire la fonction de répartition du couple de variables aléatoires (U, V) en fonction de $F(x)$.
6. En déduire la densité jointe du couple de variables aléatoires (U, V) en fonction de $F(x)$ et $f(x)$.

Tournez s.v.p. –>