Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Partiel
24/04/2013, Durée : deux heures
Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

Veuillez trouver le tableau des lois discrètes usuelles au verso !

Exercice 1. Couple d'entiers

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ et une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient, pour un $a \in \mathbb{R}$,

$$\forall i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a^i}{j!}.$$

1. Calculer a.
2. Déterminer la loi de X et celle de Y.
3. Donner les noms des lois obtenues dans la question précédente.
4. Les variables X et Y sont elles indépendantes ? Pourquoi ?
5. On note $S = X - Y$. Donner l'espérance et la variance de S.

Exercice 2. Chaîne de Markov

On considère la suite des variables aléatoires i.i.d. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

y	-1	0	1
$\mathbb{P}(Y_n = y)$	$1/3$	$1/6$	$1/2$

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$X_0 = a \quad \text{et} \quad X_{n+1} = Y_n X_n$$

où a est un nombre réel donné et $a \neq 0$.

1. Montrer que $X_0, X_1, X_2, \ldots$ est une chaîne de Markov.
2. En notant les états $e_1 = -a, e_2 = 0, e_3 = a$, donner la matrice de transition M et une représentation graphique de celle ci.
3. Quels sont les états récurrents et les états transitoires de cette chaîne ?
4. Calculer la mesure invariante μ de la chaîne.
5. A-t-on $M^n(1,0,0)^T \to \mu$, lorsque $n \to \infty$? Pourquoi ?
6. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_1 = a)$, $\mathbb{P}(X_2 = a)$ et $\mathbb{P}(X_1 = a \mid X_2 = a)$.

Exercice 3. Régression

On dispose d'une suite des variables aléatoires indépendantes $(Y_1, \ldots, Y_n)$. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une suite des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. La variable Y_i est liée à ε_i par la relation

$$Y_i = ax_i + 2\varepsilon_i$$

où a est un paramètre réel et $(x_1, \ldots, x_n)$ est une suite des nombres réels donnés.

On rappelle que la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)$.

Tournez la page s.v.p. –>

On rappelle aussi que pour une variable aléatoire X suivant la loi gaussienne de moyenne 0 et de variance 1 on a

$$\mathbb{P}(X \leq -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(X \leq -1.96) = 0.025; \mathbb{P}(X \leq -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(X \leq -1.28) = 0.10.$$

1. Montrer que la vraisemblance d'une réalisation $(y_1, \ldots, y_n)$ de $(Y_1, \ldots, Y_n)$ en fonction de a est

$$L(a, y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}(y_i - ax_i)^2}.$$

2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{a}$ de a.

3. Quelle est l'espérance de $\hat{a}$? Sa variance ?

4. On dispose de deux jeux de données suivants. Lequel choisissez vous pour estimer a ? Pourquoi ?

x_i	8	11	5	6	4
y_i	17	21	10	11	8

x_i	47	43	58	45	36
y_i	95	87	118	89	74

5. On veut tester $H_0 : a = 0$ contre $H_1 : a = 1$. Montrer que la région de rejet du test le plus puissant de H_0 contre H_1 est de la forme

$$W = \{T > C\} \quad \text{avec} \quad T = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i.$$

6. On a observé $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100$, donner l'intervalle de rejet de la statistique T pour le niveau de test $\alpha = 5\%$.

Tournez la page s.v.p. –>