Université Lille 1, Sciences et Technologies

Master 2 Mathématiques et Finance
Mathématiques du Risque et Finance Computationnelle

Modèle de Taux, Surface de Volatilité et Introduction au Risque Crédit

9 janvier 2014

Alexis FAUTH

Partie 0. Questions de Cours

1. Quelle est la valeur des Treasury Bonds à maturité 10 ans aujourd'hui ?
2. Donner la définition d'une obligation zéro-coupon ?
3. Qu'est ce que les taux Libor ?
4. A quoi correspondent les accords de Bâle I ?
5. Quelles sont les modifications apportées à Bâle II par rapport à Bâle I ? A Bâle III par rapport à Bâle II ?

Partie 1. Volatilité Locale

Soit X_t un processus d'Itô de drift μ et de coefficient de diffusion σ vérifiant l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu(t)f(t,x)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(t)f(t,x))$$

avec f la densité de X_t et

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

avec $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard et μ et σ des processus adaptés.

1. Quel est l'intérêt de l'EDP de Dupire par rapport à l'EDP de Black and Scholes ?
2. Démontrer l'EDP de Dupire pour un tel processus.

Partie 2. Modèle de Taux

Exercice 1.

Soit $(r_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le taux court sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ et $B(t,T)$ le zéro-coupon à l'instant t et de maturité T tel que $0 \leq t \leq T$. La diffusion proposée par Ho-Lee est

$$dr_t = adt + \sigma dW_t \tag{1}$$

où $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard et a, $\sigma > 0$ des constantes.

1. Montrer que la solution de (1) est
$$r_t = r_0 + at + \sigma W_t.$$
2. Montrer que pour tout mouvement brownien standard $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ on a l'égalité
$$\int_t^T W_s ds = (T-t)W_t + \int_t^T (T-s)dW_s.$$
3. En utilisant un pricing par martingale, montrer que le zéro-coupon correspondant est
$$B(t,T) = \exp\left(-(T-t)r_t - \frac{a}{2}(T-t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right).$$
4. En déduire le taux forward de ce modèle.
5. En déduire le taux forward instantanée de ce modèle.
6. On suppose $a = 0$. Déterminer la diffusion du taux forward instantanée et vérifier la condition de non-arbitrage HJM.

Exercice 2.

Soit $(r_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le taux court sous la probabilité historique $\mathbb{P}$ et $B(t,T)$ le zéro-coupon à l'instant t et de maturité T tel que $0 \leq t \leq T$. La diffusion de r_t est

$$dr_t = \mu_r(t,r_t)dt + \sigma_r(t,r_t)dW_t \tag{2}$$

avec $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard et μ et σ des fonctions de t et r.

1. Montrer que l'EDP des taux de diffusion (2) sous la probabilité risque-neutre est
$$\frac{\partial B}{\partial t} + (\mu_r - \sigma_r\lambda)\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = rB \tag{3}$$
où λ est la prime de risque.

   Le diffusion des taux court proposé par Cox, Ingersoll, Ross (CIR) est
$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \tag{4}$$
2. On pose $\lambda(t,r) = \lambda\sqrt{r_t}$ avec λ une constante. En déduire la diffusion du taux court, (4), sous la probabilité rique-neutre $\mathbb{Q}$, puis, l'EDP (3) correspondante.
3. On suppose qu'un zéro-coupon $B(t,T)$ sur r_t ayant la diffusion (4) est de la forme $B(t,T) = A(\tau)e^{-C(\tau)r_t}$ où A et C sont des fonctions de $\tau = T - t$. Montrer que l'EDP des taux se ramène au système
$$\begin{cases} C'(\tau) + \tilde{\kappa}C(\tau) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 C^2(\tau) - 1 = 0 \\ -A'(\tau) - \tilde{\kappa}\tilde{\theta}A(\tau)C(\tau) = 0 \end{cases}$$
avec $C(\tau) = 0$ et $A(\tau) = 1$ et où $\tilde{\kappa}$ et $\tilde{\theta}$ sont les paramètres de (4) ajustés au risque.
4. Soit l'équation différentielle
$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$
avec a, b et c des fonctions différentes de 0 pour tout x. Montrer que résoudre cette équation revient à résoudre
$$u'' - d(x)u' + e(x)u = 0$$
où
$$y = -u'/(c(x)u), \quad d(x) = b(x) + (c'(x)/c(x)), \quad e(x) = a(x)c(x)$$
5. En déduire que
$$A(\tau) = \left(\frac{2\rho e^{\tau(\tilde{\kappa}+\rho)/2}}{(\tilde{\kappa}+\rho)(e^{\rho\tau}-1)+2\rho}\right)^{\frac{2\tilde{\kappa}\tilde{\theta}}{\sigma^2}} \qquad \text{et} \qquad C(\tau) = \frac{2(e^{\rho\tau}-1)}{(\tilde{\kappa}+\rho)(e^{\rho\tau}-1)+2\rho}.$$
6. Quel est l'expression de la courbe des taux en fonction de A et C ?

Exercice 3.

On note C le prix d'un call de maturité $T_j \geq T_i$ à l'instant $t \leq T_i$ de strike K sur le zéro-coupon $B(T_i,T_j)$ de tenor $\{T_0,\cdots,T_n\}$ et de diffusion sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$

$$\frac{dB(t,T_i)}{B(t,T_i)} = r_t dt + \sigma_i dW_t^i, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad i = 1,\cdots,n$$

où les $(W_t^i)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont des mouvements brownien standards indépendants. On introduit la mesure T_i-forward neutre $\tilde{\mathbb{Q}}$ ainsi que le mouvement brownien $(\tilde{W}^i)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sous cette mesure

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{B(0,T_i)}e^{-\int_0^{T_i} r_s ds}, \qquad d\tilde{W}_t^i = dW_t^i - \sigma_i dt$$

1. Montrer que pour toute fonction g suffisamment régulière et X une v.a.r.
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(X)e^{-\int_t^{T_i} r_s ds}|\mathcal{F}_t) = B(t,T_i)\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}(g(X)|\mathcal{F}_t)$$
2. Montrer que
$$d\left(\frac{B(t,T_j)}{B(t,T_i)}\right) = \frac{B(t,T_j)}{B(t,T_i)}(\sigma_j - \sigma_i)d\tilde{W}_t^i$$
3. En déduire que le prix du call est alors donné par
$$B(t,T_j)\phi\left(\frac{v}{2} + \frac{1}{v}\log\frac{B(t,T_j)}{KB(t,T_i)}\right) - B(t,T_i)K\phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{1}{v}\log\frac{B(t,T_j)}{KB(t,T_i)}\right)$$
où ϕ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite et $v = v(t,T_i,T_j)$ est une fonction à déterminer.