Université Lille 1, Sciences et Technologies

Master 2 Mathématiques et Finance
Mathématiques du Risque et Finance Computationnelle

Modèle de Taux, Surface de Volatilité et Introduction au Risque Crédit

10 mars 2014
Alexis FAUTH

Exercice 1.

Soit $(r_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un taux d'intérêt tel que

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

où $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique $\mathbb{P}$.

1. Ecrire la diffusion de r_t sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer le prix d'un zéro-coupon $B(t,T)$ à l'instant t, de maturité T, écrit sur r_t, par la méthode de votre choix.

Exercice 2.

Soit $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le cours d'un actif financier risqué, $\Delta(t,S_t)$ le montant investi dans l'actif, r le taux sans risque supposé constant et, V un portefeuille autofinancé composé de S et r. La condition d'autofinancement peut s'écrire

$$dV_t = rV_tdt + \Delta(t,S_t)(dS_t - rS_tdt). \tag{1}$$

Le cours de l'actif est décrit sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ par

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma_t dW_t) \tag{2}$$

où $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{Q}$ et σ_t est la vraie volatilité locale de l'actif, déterministe ou aléatoire. Enfin, nous notons C^{BS} le prix d'un call de payoff $(S_T-K)_+$ évalué avec le modèle de Black & Scholes où la volatilité du processus est donc supposé constante, que nous noterons σ^{BS}.

1. Expliquer avec des 'mots' l'équation (1) puis, la démontrer.
2. Montrer que
$$dV_t = rV_tdt + \sigma_tS_t\Delta(t,S_t)dW_t.$$
3. En considérant la diffusion (2), déterminer $dC(t,S_t)$ en fonction de r, S_t et σ_t.
4. Démontrer l'EDP de Black & Scholes
$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial C^{BS}}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial C^{BS}}{\partial x}(t,x)\left(\sigma^{BS}\right)^2 S_t^2\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial x^2}(t,x) = rC^{BS}(t,x).$$
5. En supposant que $C = C^{BS}$, déduire des deux questions précédentes que
$$dC^{BS}(t,x) = rC^{BS}(t,S_t)dt + \frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{BS}\right)^2 - \sigma_t^2\right)S_t^2\gamma(t,S_t)dt + \sigma_tS_t\Delta(t,S_t)dW_t$$
où $\Delta(t,x) = \frac{\partial C^{BS}}{\partial x}(t,x)$ et $\Gamma(t,x) = \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial x^2}(t,x)$.
6. Notons $\varepsilon_t = V_T - C_t^{BS}$ l'erreur de réplication vérifiant $\varepsilon_T = V_T^{BS} - (S_T-K)_+$. Déduire des résultats précédents que
$$d\varepsilon_t = r\varepsilon_tdt + \frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{BS}\right)^2 - \sigma_t^2\right)S_t^2\Gamma(t,S_t)dt$$
7. En déduire que
$$\varepsilon_T = \int_0^T e^{-r(T-t)}\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{BS}\right)^2 - \sigma_t^2\right)S_t^2\Gamma(t,S_t)dt$$
et que
$$\varepsilon_T = \int_0^T e^{-r(T-t)}\frac{1}{2}\frac{\sigma^{BS}}{T-t}\left(1 - \frac{\sigma_t^2}{\left(\sigma^{BS}\right)^2}\right)\mathcal{V}(t,S_t)dt$$
où $\mathcal{V}(t,S_t)$ est à déterminer.
8. Interpréter ces deux derniers résultats (équations).