Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Partiel
05/05/2015, Durée : deux heures

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de multiplications ou fractions. La table doit être rendu avec la copie.

Exercice 1. Table de la loi normale *(3 points)*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 8 et de variance 16.

1. $\mathbb{P}(X < 18) = ?$
2. $\mathbb{P}(-4 \leq X < 9,2) = ?$
3. Trouver x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 55.96\%$.

Exercice 2. Variables à densité *(5 points)*

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{ab^4} & \text{si } |x| \leq b, \\ \\ \frac{1}{ax^4} & \text{si } |x| > b, \end{cases}$$

où $a, b > 0$.

1. Montrer que a et b doivent vérifier la condition $ab^3 = \frac{8}{3}$.
2. On pose $b = 2$ pour les questions suivantes.
a. Donner la fonction de répartition de X.
b. Calculer l'espérance de X.
c. Calculer la variance de X.

Exercice 3. Chaîne de Markov *(6 points)*

On considère la chaîne de Markov définie sur un espace E de matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est l'ensemble des états récurrents ? Calculer la mesure invariante.
2. On suppose que l'on observe la trajectoire $(X_1, \ldots, X_5)$, où X_1 suit la loi uniforme sur E.
a) Calculer la probabilité que les X_i soient tous égaux.
b) Calculer la probabilité que les X_i soient tous égaux sauf un.
c) Calculer la probabilité que deux X_i soient égaux au premier élément de E et les trois autres au second.

Tournez la page s.v.p. –>

Exercice 4. Variables discrètes *(6 points)*

On considère une suite $(Y_1, \dots, Y_n)$ i.i.d. telle que $\mathbb{P}(Y_1 = 2) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = 3)$, où $p \in [0,1]$ est un paramètre réel.

1. Calculer $\mathbb{E}(Y_i)$, ainsi que $\mathrm{Var}(Y_i)$.

2. Montrer que la vraisemblance d'une réalisation $(y_1, \dots, y_n)$ de $(Y_1, \dots, Y_n)$ en fonction de p est :

$$L_p(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{3-y_i}(1-p)^{y_i-2}.$$

3. Calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{p}$ de p.

4. Quelle est l'espérance de $\hat{p}$? Sa variance ?

5. Montrer que $\hat{p}$ converge vers p en probabilité.

6. On dispose de 10000 observations de Y_i et on a $\hat{p} = 0,25$ et $\widehat{\mathrm{Var}\,(Y_i)} = 1$. À l'aide de cet échantillon, tester l'hypothèse $H_0 : p = 0,2$ contre l'hypothèse $H_1 : p \neq 0,2$ avec un niveau de test $\alpha = 0.01$.

Tournez la page s.v.p. −>