Statistiques et Probabilités, L2 MIASHS, Partiel
17/01/2018, Durée : deux heures

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Exercice 1. Urne *(7 points)*

Une urne contient 7 boules : 2 bleues, 3 vertes et 2 rouges. On en prélève 3 d'un coup. On note respectivement X et Y les nombres de boules bleues et vertes dans l'échantillon tiré.

1. Donner les ensembles de valeurs possibles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ pour les variables aléatoires X et Y.

2. Pour quelles valeurs du couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ on a $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$?

3. Donner la loi jointe du couple aléatoire (X, Y).

4. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X > Y)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(2 \text{ rouges})$.

Exercice 2. Bernoulli *(8 points)*

Dans cet exercice $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre p, c.a.d. $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ pour tout i.

Test d'hypothèse

Dans un premier temps on teste l'hypothèse $H_0 : p = 1/2$ contre l'hypothèse $H_1 : p = 1/4$. On dispose d'un échantillon de taille deux X_1 et X_2. On choisit la statistique du test $T = \max(X_1, X_2)$ et la région de rejet $W = \{0\}$.

1. Calculer les risques de 1ère et 2ème espèce α et β.

Chaîne de Markov

Dans un deuxième temps on définit une chaîne de Markov $Y_1, Y_2, \ldots$ par l'égalité suivante

$$Y_{n+1} = (-1)^{X_n} \cdot Y_n \quad \text{avec} \quad Y_1 = a, \quad n = 1, 2, \ldots$$

où a est un réel non nul.

2. Donner l'espace d'états et la matrice de transition.

3. Calculer la mesure invariante de la chaîne.

4. On note $\mathbb{1}_{\{x \neq y\}}(x, y)$ la fonction qui vaut 1 si $x \neq y$, et 0 sinon. Montrer que la vraisemblance d'une réalisation $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ de $(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ en fonction de p est

$$L(p, y_1, \ldots, y_{n+1}) = p^{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{y_i \neq y_{i+1}\}}(y_i, y_{i+1})} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{y_i \neq y_{i+1}\}}(y_i, y_{i+1})}.$$

5. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}$ de p.

Exercice 3. Couple aléatoire continu *(5 points)*

Soit $f(x, y) = C\mathbb{1}_{\{x \geq 0, |y| \leq \theta\}}(x, y)e^{-2x}$, avec $\theta > 0$.

1. A quelle condition f est elle la densité d'un couple de variables aléatoires réelles $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$?

2. Déterminer les lois marginales (support et densité). Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

3. Calculer l'espérance du couple $\mathbb{E}(X, Y)$.