Partiel, Session de juin

Statistiques et Probabilités, L2 MASS

14/06/2012, Durée : deux heures

Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

NOM : **PRÉNOM :**

Exercice 1. Test d'hypothèse

On considère un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de variable aléatoire binomiale $Bin(k, \frac{\lambda}{k})$, c'est-à-dire la loi de probabilité est donnée par $\mathbb{P}(X_1 = x) = C_k^x \left(\frac{\lambda}{k}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^{k-x}$ pour $x \in \{0, \ldots, k\}$, $\mathbb{E}(X_1) = \lambda$ et $\mathrm{Var}\,(X_1) = \lambda(1 - \frac{\lambda}{k})$.

1. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_{MV}$ de λ.

2. Supposons que le paramètre k est connue. En utilisant une approximation gaussienne de la loi de $\hat{\lambda}_{MV}$ et en majorant le produit $\lambda(1 - \frac{\lambda}{k})$, donner un intervalle de confiance de niveau α pour λ. (Indication : $\lambda(1 - \frac{\lambda}{k}) = k\frac{\lambda}{k}(1 - \frac{\lambda}{k})$ et $0 < \frac{\lambda}{k} < 1$)

3. Application : Un ordinateur de type serveur doit satisfaire les requêtes de 25 terminaux (clients). À un instant donné, chaque terminal sollicite indépendamment le serveur avec une probabilité $\frac{\lambda}{25}$. Soit X le nombre de terminaux sollicitant le serveur à un instant donné. Sur un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de taille $n = 100$, on a observé le nombre moyen de terminaux sollicitant le serveur à un instant donné de 5.5.

a) Quelle est la loi de X ? Donner le nom et les paramètres de loi.

b) À l'aide de cet échantillon, tester l'hypothèse $H_0 : \lambda = 6$ contre l'hypothèse $H_1 : \lambda \neq 6$, avec un niveau de test $\alpha = 0.05$.

c) Sur un autre échantillon de taille n inconnue, la moyenne observée a été de 6.3 et au risque d'erreur de première espèce de 5% l'hypothèse nulle n'a pas été rejetée. Quelle serait donc la valeur maximale de n ?

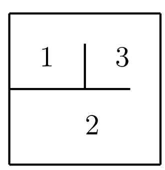
On rappelle que pour une loi gaussienne Y de moyenne 0 et de variance 1 on a

$$\mathbb{P}(Y \leq -2.58) = 0.005; \mathbb{P}(Y \leq -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(Y \leq -1.96) = 0.025;$$

$$\mathbb{P}(Y \leq -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(Y \leq -1.28) = 0.10.$$

Exercice 2. Chaîne de Markov

Une souris évolue dans un appartement de plan succinct



en choisissant au bout de chaque minute de rester dans la pièce où elle était ou une seule ouverture pour se rendre dans une autre pièce.

i) Si elle est dans la pièce n°3 (état e_3), il y a une chance sur deux qu'elle reste dans cette pièce pour la minute suivante. Si elle sort de cette pièce, il y a une chance sur deux

Tournez s.v.p. –>

qu'elle aille dans la pièce n°1 (état e_1) et une chance sur deux qu'elle aille dans la pièce n°2 (état e_2).

ii) Si elle est dans la pièces n°2, elle n'y reste pas pour la minute suivante.

iii) Si elle est dans la pièce n°1, il y a une chance sur trois qu'elle se rend dans la pièce n°3 pour la minute suivante.

Cette évolution peut être représentée par une chaîne de Markov notée $X_1, \ldots, X_n, \ldots$

1. Donner la matrice de transition. Tous les états sont ils récurrents ?

2. Calculer la mesure invariante.

3. Montrer par deux méthodes qu'il existe un chemin de longueur 2 qui va de e_3 à e_3. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = e_1 \mid X_1 = e_1)$.

4. Supposons que la souris est dans la pièce n°1 pendant la première minute. Dans quelle pièce se trouvera t elle le plus probablement à la 180ème minute (soit au bout de 3 heures) ?

Exercice 3. Estimation paramétrique

Soit (X_1, X_2) un échantillon i.i.d. de taille 2 de la variable aléatoire X dont la densité est donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{C}{x^3} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x)$$

avec un paramètre $\theta > 0$.

1. Quelle condition la constante C doit elle vérifier pour que la fonction $f_\theta(x)$ soit vraiment une densité de variable aléatoire ?

2. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire celle de $\min(X_1, X_2)$, puis la densité g_θ de $\min(X_1, X_2)$.

3. Montrer que les estimateurs de θ suivants sont sans biais,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2), \quad \hat{\theta}_2 = \frac{3}{4}\min(X_1, X_2).$$

(Rappel : $b(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\hat{\theta} - \theta$)

4. Calculer le risque quadratique moyen (RQM) de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. (Rappel : $\mathrm{RQM}(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}\,(\hat{\theta}) + b^2(\hat{\theta})$)

5. Quel estimateur choisir ?

Tournez s.v.p. −>