LECTURE NOTES on STOCHASTIC CALCULUS

Ciprian TUDOR
Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1

October 13, 2007

MASTER M2: Mathématiques Appliquées à l'Economie et à la Finance

CHAPTER 2: THE BROWNIAN MOTION

Attention: the proofs and the exercises are not yet translated

1 CHAPTER 2: THE BROWNIAN MOTION

Lors de ses observations microscopiques de particules de pollen en suspension dans l'eau, le botaniste anglais Brown est frappé en 1827 par le mouvement erratique et apparemment imprévisible de ces particules.

Ce mouvement, dénommé depuis mouvement brownien, fut expliqué physiquement par Einstein (1905), qui en donna également les pricipales caractéristiques. Si B_t dénote la position horizontale de la particule de pollen au temps t, Einstein suggère que

(1) $(\forall t, s \geq 0 : (B_{t+s} - B_t) \perp\!\!\!\perp \sigma(B_u; 0 \leq u \leq t)$.

(2) $(\forall t, s \geq 0 : (B_{t+s} - B_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$.

(3) Les trajectoires du processus B sont continues.

Il voit en effet le déplacement de la particule $(B_{t+s} - B_t)$ comme une conséquence des chocs des molécules d'eau sur la particule: On conoit aisément que l'effet de tels chocs est en moyenne nul et que les chocs peuvent être considérés comme indépendants et équidistribués. Le point (1) suit alors l'indépendance des chocs évoquée plus haut. Le point (2) provient d'une utilisation intuitive du théorème central limite: Une somme d'un grand nombre de chocs indépendants suit essentiellement un loi normale dont la variance est proportionnelle au nombre de chocs considérés dans la somme et donc l'intervalle de temps considéré. Le point (3) est évident si l'on considère que B_t est la trajectoire d'une particule physique.

Le modèle physique du mouvement brownien décrit plus haut semble justifier heuristiquement son existence. La preuve mathématique de l'existence d'un espace probabilisé et d'un processus sur cet espace qui a les trois propriétés décrites par Einstein n'a été réalisée qu'en 1920 par Wiener.

1.1 The construction of the Brownian motion

Definition 1.1 *If $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ is a filtration on $(\Omega, \mathcal{F})$, a stochastic process B_t adapted to the filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ is a $\mathcal{F}_t$ standard Brownian motion if*

- *1) $B_0 = 0$*
- *2) $\forall\ 0 \leq t < s < \infty$, $B_s - B_t$ is independent of $\mathcal{F}_t$ and it has a normal law with zero mean and variance $s - t$.*
- *3) the trajectories $B(\omega)$ are continuous $\forall \omega$.*

In this section we will explicitly construct a Brownian motion on the following probability space: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ where $\Omega = I\!\!R^{I\!\!N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{I\!\!R^{I\!\!N}}$ et $P = (\mathcal{N}(0,1))^{\otimes I\!\!N}$

(NB. **L'existence of this space follows from the Kolmogorov consistency theorem.** Rappelons le cadre général. Soit $(E_t, \mathcal{E}_t)_{t\in T}$ une famille d'espaces mesurables où $\mathcal{E}_t = \mathcal{B}(E_t)$ pour tout $t \in T$. Pout tout $F \subset T$, F fini, soit P_F une probabilité sur $\mathcal{E}^F$. Supposons que

1. pour tout $A \in \mathcal{E}^F$ on a

$$P_F(A) = \sup\left(P_F(K), K \subset A, K \text{ compact }\right)$$

2. la famille $\left(E^F, \mathcal{E}^F, P_F\right)_{F \subset T, F \text{ fini}}$ vérifie *la propriété de consistence*

$$P_{F_2} \circ \left(\pi_{F_1}^{F_2}\right)^{-1} = P_{F_1}$$

   pour tous $F_1 \subset F_2 \subset T$, F_1, F_2 finis, où $\pi_{F_1}^{F_2}$ représente la projection de E^{F_2} à E^{F_1}.

Alors il existe une probabilité P sur $(E^T, \mathcal{E}^T)$ telle que

$$P \circ (\pi_F^T)^{-1} = P_F$$

pour tout F fini.)

Exercice 1.2 *Appliquer le résultat précedent pour $E_t = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$,$T = \mathbb{N}$ et P_F la loi normale $|F|$-dimensionnelle.*

Soit $\omega = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$.

Remark 1.3 *Under the probability P, ξ_n are independent identically distributed $N(0,1)$ random variables. (This fact comes from the construction of the probability $P = N(0,1)^{\mathbb{N}}$.)*

Consider an hilbertian basis $\{e_i\}$ of $L^2([0,\infty[)$ and let us construct the linear application

$$F : L^2([0,\infty[) \to L^2(\Omega) \text{ telle que } \forall i \in \mathbb{N} : F(e_i) = \xi_i.$$

Lemma 1.4 *The application F is well-defined and it is an isometry from $L^2([0,\infty[)$ onto $L^2(\Omega)$. moreover, for every $g \in L^2([0,\infty[)$, $F(g)$ has a centered Gaussian law with variance $\|g\|^2$.*

Preuve:
Soit $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel engendré par les e_i. Si $g \in \mathcal{G}$, g peut s'écrire comme une somme finie $g = \sum_{i=0}^N \alpha_i e_i$, où

$$\alpha_i =< e_i, g >= \int_{\mathbb{R}} e_i(x) g(x)\, dx.$$

Par linéarité, on trouve $F(g) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \xi_i$, ce qui définit donc F sur $\mathcal{G}$ de manière univoque puisque les α_i sont univoquement déterminés.

Puisque $\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i^2$ et comme les ξ_i sont des v.a indépendantes normales centrées et réduites, on a

$$F(g) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=0}^{N} \alpha_i^2) = \mathcal{N}(0, \|g\|_{L^2([0,\infty[}^2).$$

En particulier, si $g \in \mathcal{G}$, $\|F(g)\|_{L^2(\Omega)}^2 := E[F(g)^2] = \|g\|_{L^2([0,\infty[}^2$. Ainsi F est une isométrie de $\mathcal{G}$ vers $L^2(\Omega)$ qui peut s'étendre par uniforme continuité $L^2([0,\infty[)$, $\mathcal{G}$ étant dense dans $L^2([0,\infty[)$.

Montrons la dernière assertion: si $g \in L^2([0,\infty[)$, il existe une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ qui converge vers g au sens $L^2([0,\infty[)$. $\{F(g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $F(g)$ au sens $L^2(\Omega)$. Par choix d'une sous-suite, on peut considérer que la convergence a également lieu $P-pp$. Par le théorème de la convergence dominée, on obtient ainsi

$$E[\exp(i\alpha F(g_n))] \to E[\exp(i\alpha F(g))].$$

Or puisque $F(g_n) \sim \mathcal{N}(0, \|g_n\|_{L^2([0,\infty[}^2)$, on a $E[\exp(i\alpha F(g_n))] = \exp(-\alpha^2 \|g_n\|_{L^2([0,\infty[}^2)$ et en passant la limite: $E[\exp(i\alpha F(g))] = \exp(-\alpha^2 \|g\|_{L^2([0,\infty[}^2)$, ce qui démontre que $F(g) \sim \mathcal{N}(0, \|g\|_{L^2([0,\infty[}^2)$ ■

We set $B_s := F(\mathbf{1}_{[0,s]})$.

Lemma 1.5 *The process B defined above satisfies the properties 1) and 2) from the definition 1.1 with respect to its natural filtration $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \in [0,t])$.*

Preuve: Il est évident que $B_0 := F(0) = 0$ P-pp.

Montrons que $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$. A cette fin, montrons d'abord que $\forall t_1 < \ldots < t_n < t < t+s$ le vecteur $\vec{B} = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}, B_{t+s} - B_t)$ est un vecteur gaussien:

si $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}) \in R^{n+1}$, on a:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} v_i B_{t_i} + v_{n+1}(B_{t+s} - B_t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} v_i F(\mathbf{1}_{[0,t_i]}) + v_{n+1} F(\mathbf{1}_{]t,t+s]}) \\
&= F(\sum_{i=0}^{n} v_i \mathbf{1}_{[0,t_i]} + v_{n+1} \mathbf{1}_{]t,t+s]})
\end{aligned}$$

car F est linéaire. Ainsi $\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle$ suit une loi normale, comme il résulte du lemme précédent. Ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{v}$, $\vec{B}$ est bien un vecteur gaussien.

Montrons ensuite que $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. Puisque $\vec{B}$ est gaussien, il suffit de montrez que $cov(B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) = 0$ (exercice 1.56, Ch.1-2).

Or, nous avons :

$$\begin{aligned}
cov(B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) &= E[(B_{t_i} - E(B_{t_i}))(B_{t+s} - B_t - E(B_{t+s} - B_t)] \\
&= E[B_{t_i}(B_{t+s} - B_t)] = \langle B_{t_i}, B_{t+s} - B_t)\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \langle F(\mathbf{1}_{[0,t_i]}), F(\mathbf{1}_{]t,t+s]})\rangle_{\mathbf{L^2}(\Omega)} = \langle \mathbf{1}_{[0,t_i]}, \mathbf{1}_{]t,t+s]}\rangle_{\mathbf{L^2}([0,\infty[)} \\
&= \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t_i]}(x)\mathbf{1}_{]t,t+s]}(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Donc $(B_{t+s} - B_t) \perp\!\!\!\perp \cup_{T \text{ fini } \subset [0,t]} \sigma(B_v, v \in T)$. Enfin, $\cup_{T \text{ fini } \subset [0,t]} \sigma(B_v, v \in T)$ est une algèbre d'ensembles qui engendre $\mathcal{F}_t$ et on peut donc utiliser l'exercice 1.20, Ch.1 pour conclure l'indépendance de $B_{t+s} - B_t$ et de $\mathcal{F}_t$.

Montrons enfin que $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$.

En effet $B_{t+s} - B_t = F(\mathbf{1}_{[0,t+s]}) - F(\mathbf{1}_{[0,t]}) = F(\mathbf{1}_{]t,t+s]})$ suit une loi normale centrée et on a:

$$\|\mathbf{1}_{]t,t+s]}\|^2_{\mathbf{L^2}([0,\infty[)} = \int_0^\infty \mathbf{1}^2_{]t,t+s]}(x)dx = s.$$

Donc $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$. ■

Ainsi il reste à montrer la continuité des trajectoires. Notons cependant que B_t a été défini plus haut comme $F(\mathbf{1}_{[0,t[})$ où F est une application valeurs dans L^2 et non dans $\mathcal{L}^2$. Ainsi B_t n'est en fait défini qu' un ensemble de probabilité nulle près! Peut-on choisir pour tout t un représentant $\bar{B}_t \in \mathcal{L}^2$ de la classe d'équivalence $B_t \in L^2$, de telle sorte que le processus résultant ait ses trajectoires continues? Pour répondre affirmativement cette question, nous allons nous servir du théorème suivant:

Theorem 1.6 *(Kolmogorov continuity criterium) If X is a stochastic process on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ such that it exists α, β and C strictly positive such that : $\forall\ 0 \leq s, t < \infty$*

$$E[|X_s - X_t|^\alpha] \leq C|s - t|^{1+\beta},$$

then it exists a modification $\bar{X}$ of X such that $\forall \delta \in [0, \frac{\beta}{\alpha}[$:

$$E\left[\left(sup\{\frac{|\bar{X}_s - \bar{X}_t|}{|s - t|^\delta}, 0 \leq s, t \leq 1, s \neq t\}\right)^\alpha\right] < \infty.$$

In particular $\bar{X}$ is a stochastic process with continuous paths on $[0, \infty[$.

Idée de la preuve: On donnera les étapes de la preuve. On considère $t \in [0, 1]$.

1. Par l'inegalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} E|X_t - X_s|^\alpha \leq C\varepsilon^{-\alpha}|t - s|^{1+\beta}$$

donc $X_s - X_t \to 0$ en probabilité si $s \to t$. Posons

$$t = \frac{k}{2^n}, s = \frac{k-1}{2^n} \text{ et } \varepsilon = 2^{-\gamma n}(0 < \gamma < \beta/\alpha)$$

dans l'inegalité précédente. On obtient

$$P\left(|X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \leq C 2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \\ & = P\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \\ & \leq C 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}. \end{aligned}$$

Commee la série $\sum_n 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}$ converge, par le lemme de Borel-Cantelli, il existe en ensemble $\Omega^\star$ de probabilité égale à 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega^\star$,

$$\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| < 2^{-\gamma n} \qquad \forall n \geq n^\star(\omega)$$

où $n^\star(\omega)$ est une v.a. positive et entière.

2. Posons
$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \text{ où } D_n = \{\frac{k}{2^n}, k = 0, \ldots, 2^n\}.$$
On montre que pour tout $\omega \in \Omega^\star$ et $n > n^\star(\omega)$ fixés, et pour tout $m > n$,
$$|X_t - X_s| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}, \qquad \forall t, s \in D_m, |t-s| < 2^{-n}.$$

3. On prouve que $X_t(\omega), t \in D$ est uniformément continue en t pour tout $\omega \in \Omega^\star$.

4. On construit la modification voulue $\tilde{X}$ de X comme il suit: $\tilde{X}_t(\omega) = 0$ si $\omega \notin \Omega^\star$; $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ si $\omega \in \Omega^\star$ et $t \in D$; si $\omega \in \Omega^\star$ et $t \notin D$, on considère une suite $s_n \in D, s_n \to_{n\to\infty} t$. Alors la suite $X_{s_n}(\omega)$ est de Cauchy (étape précédente) et donc elle a une limite qui dépend de t. On pose alos $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_n X_{s_n}(\omega)$.

■

Exercice 1.7 *Montrez que, sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que $P(\Omega') = 1$ vérifiant: $\forall \omega \in \Omega'$, la trajectoire $t \in [0,1] \to X_t(\omega)$ est δ-Höldérienne pour tout δ dans $[0, \beta/\alpha[$. En d'autres termes:*

$$\forall \delta \in [0, \beta/\alpha[, \exists K(\delta) < \infty : \forall t, s \in [0,1] : |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq K(\delta)|t-s|^\delta$$

Montrez que si X vérifie l'inégalité du théorème précédent pour tout $s, t \geq 0$, alors il existe une modification $\bar{X}$ de X dont les trajectoires sont continues sur $[0, \infty[$.

We apply the Kolmogorov's criterium to the process B constructed above: we have $B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, s-t)$. So $B_s - B_t$ has the same law as $\sqrt{s-t}Z$ where $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Hence:

$$E[|B_s - B_t|^\alpha] = E[\sqrt{s-t}^\alpha |Z|^\alpha] = |s-t|^{\frac{\alpha}{2}} C_\alpha \leq C_\alpha |s-t|^{1+\beta}$$

with $C_\alpha := E[|Z|^\alpha] < \infty$ and $\beta := \frac{\alpha}{2} - 1$. Since β has to be strictly positive, we need $\alpha > 2$. In this way we obtain a modification of B with holderian trajectories of any order $\delta < \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$. Since α is arbitrary large, we established the theorem:

Theorem 1.8 *It exists a modification $\bar{B}$ of the process B with locally holderian paths of order δ, for every δ in $[0, 1/2[$.*

Remark 1.9 *Let $\bar{\mathcal{F}}_t$ be the completion $\mathcal{F}_t$. Show that $\bar{B}$ is adapted to $\bar{\mathcal{F}}_t$ and it is a $\bar{\mathcal{F}}_t$-Brownian motion.*

Exercice 1.10 (TO BE DONE IN CLASS) *Montrez que si B est un mouvement brownien, alors $cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, où $s \wedge t$ est une notation pour* $\min(s,t)$.

Montrez que si X est un processus continu gaussien centré —i.e. pour toute famille finie $\{t_1, \ldots, t_n\}$, le vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est gaussien centré— et si $\forall s, t \geq 0 : cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, alors B est un mouvement brownien sur sa filtration naturelle.

On the space $\Omega_0 := \mathcal{C}([0, \infty[)$, we introduce the process X_t, $\omega_0 \in \Omega_0 \to X_t(\omega_0) := \omega(t)$. Let $\mathcal{G}_t$ be its natural filtration.

Corollary 1.11 *On $(\Omega_0, \mathcal{G}_\infty)$ there exists a unique probability measure* Π *such that X_t is a $\mathcal{G}_t$-Brownian motion under* Π. Π *is called* the Wiener measure.

Preuve:

1) *existence:* Soit l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel nous avons construit le mouvement brownien $\hat{B}$. Nous pouvons voir $\hat{B}$ comme une application qui $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire $\hat{B}_.(\omega) : t \to \hat{B}_t(\omega)$. Ainsi, $\hat{B}_.$ est une application de Ω dans Ω_0. Elle est clairement mesurable de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}_\infty$, puisque $\forall t$: $\hat{B}_t$ est $\mathcal{F}$-mesurable. On prend pour Π la mesure image de P par $\hat{B}_.$: $\Pi := P_{\hat{B}_.}$ cd $\forall C \in \mathcal{G}_\infty : \Pi(C) := P(\hat{B}_.^{-1}(C))$.

Sous Π, montrons que $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. En effet, pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
\Pi(\{\omega_0 | X_t(\omega_0) \in A\}) &= \Pi(X_t^{-1}(A)) = P(\hat{B}_.^{-1}(X_t^{-1}(A))) \\
&= P(\{\omega | \hat{B}_.(\omega) \in X_t^{-1}(A)\}) \\
&= P(\{\omega | X_t(\hat{B}_.(\omega)) \in A\}) \\
&= P(\{\omega | \hat{B}_t(\omega) \in A\})
\end{aligned}$$

Or $\hat{B}$ est un mouvement brownien sous P.

Cet argument se généralise aisément pour montrer que $X(\omega_0)$ est un mouvement brownien sous Π (en réalité, on peut montrer que les processus X et $\hat{B}$ sont équivalents, c.à. d. ils ont les mêmes distributions fini-dimensionnelles.)

2) *unicité:* Si Π et Π' sont deux mesures sur $(\Omega_0, \mathcal{G}_\infty)$ telles que X soit un mouvement brownien, alors, pour tout ensemble J fini dans $\mathbb{R}^+$, Π et Π' concident sur $\mathcal{G}_J := \sigma(X_t, t \in J)$. En effet, du caractère brownien de X, on déduit que le vecteur aléatoire $(X_t, t \in J)$ est gaussien centré et $cov(X_t, X'_t) = t \wedge t'$. La loi de $(X_t, t \in J)$ est donc entièrement déterminée et est identique sous Π et Π'.

En d'autres termes $\mathcal{G}_J \subset \mathcal{U} := \{A \in \mathcal{G}_\infty | \Pi(A) = \Pi'(A)\}$. Partant $\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J \subset \mathcal{U}$.

Or $\mathcal{U}$ se révèle être une classe monotone suite la σ-additivité de Π et Π'. Il résulte donc du théorème des classes monotones que $\sigma(\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J) \subset \mathcal{U}$. Or $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J)$. Par la définition de $\mathcal{U}$, on en déduit que Π et Π' concident sur $\mathcal{G}_\infty$. ■

1.2 Basic properties of the Brownian motion

Theorem 1.12 *If B is a Brownian motion, then*

1. *(self-similarity) $\forall c > 0$ $X_t = c^{-1} B_{c^2 t}$ is a Brownian motion (for its natural filtration).*
2. *$Y_t = t B_{t^{-1}}$, $Y_0 = 0$ is a Brownian motion (for its natural filtration).*
3. *$\forall\ \delta > 0$ $Z_t = B_{t+\delta} - B_\delta$ is a Brownian motion (for its natural filtration).*

Preuve:

1. Les trajectoires X_t sont continues, car celles de B_t le sont. De plus $X_0 = c^{-1} B_0 = 0$. Observons que $X_{t+s} - X_t = c^{-1}(B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t}) = c^{-1}(B_{t'+s'} - B_{t'})$ avec $t' = c^2 t$ et $s' = c^2 s$ donc $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(B_\mu, \mu \leq t') = \sigma(B_\mu, \mu \leq c^2 t) = \sigma(X_v, v \leq t)$ donc $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(X_v, v \leq t)$. Puisque $B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t} \sim \mathcal{N}(0, c^2 s)$, il est clair que $X_{t+s} - X_t = c^{-1}(B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t}) \sim \mathcal{N}(0, s)$. Ainsi X_t est un mouvement brownien.

2. Y est clairement un processus gaussien centré (voir exercice 1.10): Pour tout J fini $\subset]0, \infty[$, le vecteur aléatoire $(Y_t, t \in J)$ est l'image du vecteur gaussien centré $(B_t, t \in J)$ par une application linéaire. De plus $cov(Y_t, Y_s) = ts \cdot cov(B_{\frac{1}{t}}, B_{\frac{1}{s}}) = ts(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}) = s \wedge t$.

Ainsi, pour tout J fini $\subset]0,\infty[$, les vecteurs aléatoires $(Y_t, t \in J)$ et $(B_t, t \in J)$ ont même loi, puisqu'ils sont des vecteur gaussiens centrés de même matrice de covariance. Pour pouvoir appliquer l'exercice 1.10 et conclure que Y est un mouvement brownien, il nous suffit de montrer que les trajectoires de Y sont continues. Par continuité de celles de B, les trajectoires de Y sont clairement continues pour $t > 0$ et il nous suffit de montrer que $P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\}) = 1$. Puisque $t \in]0,\infty[\to Y_t(\omega)$ est une fonction continue, nous avons

$$\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\} = \{\omega | \lim_{q\searrow 0, q\in\mathbb{Q}} Y_t(\omega) = 0\}$$

Si $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles finis dont l'union est $\mathbb{Q}_+$, l'ensemble $\{\omega | \lim_{q\searrow 0, q\in\mathbb{Q}} Y_t(\omega) = 0\}$ est égal

$$\{\omega | \forall k \in \mathbb{N}\colon \exists M \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon \forall q \in J_n \cap]0, 1/M]\colon |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}.$$

Par monotonie des suites d'ensembles considérées, la probabilité $P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\})$ peut s'écrire comme

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M]; |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}).$$

Puisque $(Y_t, t \in \forall q \in J_n \cap]0, 1/M])$ a la même loi que $(B_t, t \in \forall q \in J_n \cap]0, 1/M])$, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} &P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M\} \, |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}) \\ &= P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M\} \, |B_q(\omega)| \leq 1/k\}), \end{aligned}$$

et donc

$$P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\}) = P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} B_t(\omega) = 0\}) = 1.$$

3. Les Z_t ont leurs trajectoires continues et $Z_0 = B_\delta - B_\delta = 0$
   $Z_{t+s} - Z_t = B_{t+s+\delta} - B_\delta + B_{t+\delta} - B_\delta = B_{t+\delta+s} - B_{t+\delta}$ ceci est indépendant de $\sigma(B_\mu, \mu \leq t + \delta) \supset \sigma(Z_v, v \leq t)$.
   Enfin, $Z_{t+s} - Z_t = B_{t+\delta+s} - B_{t+\delta} \sim \mathcal{N}(0, s)$ Donc Z_t est un mouvement brownien. ■

Theorem 1.13 *(The 0-1 law)*
If B is a Brownian motion with respect to $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, then

$$\forall A \in \mathcal{F}_{0^+} : P(A) \in \{0, 1\}.$$

Preuve: Soit $0 < \epsilon < \delta$. Posons $\mathcal{F}_{\epsilon,\delta} = \sigma(B_t - B_\epsilon, \epsilon \leq t \leq \delta)$. Puisque $\forall t \in [0, \delta]$:

$$B_t = \lim_{\epsilon\searrow 0} (B_t - B_\epsilon)$$

il suit que B_t, $0 \leq t \leq \delta$ est $\sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta})$-mesurable. Ainsi

$$\mathcal{F}_\delta \subset \sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}) \text{ donc } \mathcal{F}_\delta = \sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}).$$

Si $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, alors $\forall \epsilon > 0$, $A \in \mathcal{F}_\epsilon$ qui est indépendant de $\mathcal{F}_{\epsilon,\delta}$, donc, en utilisant l'exercice 1.20, Ch.1, A est indépendant de $\sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}) = \mathcal{F}_\delta \ni A^c$. Ainsi A est indépendant de A^c, et donc $P(A)P(A^c) = P(A \cap A^c) = 0$, d'où $P(A)(1 - P(A)) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
■

Corollary 1.14 *If B is a Brownian motion, then*

$$P(\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0) = 1.$$

Preuve: Soit $A_\epsilon = \{\sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0\}$. On a alors:

$$A = \{\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0\} = \cap_n A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{F}_{0^+}$$

donc, d'après le théorème précédent $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
Or $P(A) = \lim P(A_{\frac{1}{n}}) \geq \lim P(B_{\frac{1}{n}} > 0) = \frac{1}{2}$ donc $P(A) = 1$. ■

Remark 1.15 *Since $-B$ is also a Brownian motion (why?) one can similarly show that : $P(\forall \epsilon > 0, \inf_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t < 0) = 1$, and thus*

$$P(\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0 \text{ et } \inf_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t < 0) = 1.$$

So, before leaving the origin 0, the trajectory of the Brownian motion oscillates infinitely many times between the positive values and the negative values, as the function $t \to t\sin(1/t)$. Between two oscillations, the trajectory reaches the horizontal axis and then $P(\{\omega | \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} : t_n \searrow 0 \text{ et } B_{t_n}(\omega) = 0\}) = 1$.

Corollary 1.16 $P(\sup_{t \geq 0} B_t = \infty) = 1$.

Preuve: Soient $c > 0$ et $\delta > 0$, alors

$$\begin{aligned} P(\sup_{t \geq 0} B_t \geq c) &= P(\sup_{t \geq 0} \frac{\delta}{c} B_t \geq \delta) \\ &= P(\sup_{t \geq 0} \frac{\delta}{c} B_{\frac{\delta}{c}t} \geq \delta) \\ &= P(\sup_{t \geq 0} X_t \geq \delta), \end{aligned}$$

où X est un mouvement brownien, comme il résulte du Théorème 1.12(la propriété d'autosimilarité). En prenant la limite de la dernière ligne lorsque $\delta \searrow 0$, on obtient $P(\sup_{t \geq 0} X_t > 0)$ qui vaut 1 par le corollaire précédent. Ainsi $\forall c > 0$, $P(\sup_{t \geq 0} B_t \geq c) = 1$, ce qui nous permet de conclure $P(\sup_{t \geq 0} B_t = \infty) = 1$. ■

Remark 1.17 *Since the Brownian trajectories are continuous , the previous corollary indicates in fact that* $\limsup_{t\nearrow\infty} B_t = \infty$. *By symmetry, we also have* $\liminf_{t\nearrow\infty} B_t = -\infty$, *and then the Brownian reaches infinitely many every point in* $\mathbb{R}$ *(we say that the Brownian is recurrent)*

Stochastic processes related to the Brownian motion

- The Brownian bridge: consider the process

$$X_t = B_t - tB_1$$

with $t \in [0, 1]$.

Exercice 1.18 (TO BE DONE IN CLASS) *Montrer qu'll s'agit d'un processus gaussian centré de covariance*

$$E(X_t X_s) = \min(s, t) - st.$$

- the Ornstein-Uhlenbeck process, which is a centered Gaussian process with covariance

$$E(X_t X_s) = e^{-\beta|t-s|}$$

où $\beta > 0$.

- the geometric Brownian motion proposed by Black, Scholes and Merton to model financial markets:

$$X_t = e^{\sigma B_t + \mu t}$$

with $t \geq 0$, $\sigma > 0$ and $\mu \in \mathbb{R}$.

- the fractional Brownian motion: this is a centered Gaussian process B^H with covariance

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

where $H \in (0, 1)$ is called the Hurst parameter.

Exercice 1.19 (TO BE DONE IN CLASS) *Montrer que si* $H = \frac{1}{2}$ *on retrouve le mouvement brownien. Montrer que* B^H *est* H *-autosimilaire, c.à.d pour tout* $c > 0$, $c^H B_{ct}, t \geq 0$ *est un mouvement brownien fractionnaire;*

1.3 Quadratic variation:

Let B be a Brownian motion and suppose that $s > t$. For any partition Δ of the interval $[t, s]$ (i.e. $\Delta = \{t = t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n = s\}$), we set: $|\Delta|$=$\max_{i=1}^{i=n-1}(t_{i+1} - t_i)$. Finally let us denote by $T_{s,t}^{\Delta}$ the random variable

$$T_{s,t}^{\Delta} = \sum_{i=1}^{i=n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Theorem 1.20 *If $\{\Delta^n\}_{n\in N}$ is a sequence of partitions of the interval [s,t] such that $|\Delta^n|$ $\to$ 0 when $n \to \infty$. Then*

$$T_{s,t}^{\Delta^n} \to s - t$$

in $L^2(\Omega)$.

Preuve: Calculons $E[T_{s,t}^{\Delta^n}]$: puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$, $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ peut s'écrire $\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_i$ avec $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ainsi:

$$E[T_{s,t}^{\Delta^n}] = \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)E[Z_i^2] = \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = t_n - t_1 = s - t.$$

$$\begin{aligned}
var[T_{s,t}^{\Delta^n}] &= \sum_{i=1}^{i=n-1} var[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{i=1}^{i=n-1} var[(t_{i+1} - t_i)Z_i^2] \\
&= \sum_{i=1}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 var(Z_i^2) \\
&\leq \sum_{i=1}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)|\Delta^n| var(Z^2) \\
&= (s - t) var(Z^2)|\Delta^n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Or

$$var[T_{s,t}^{\Delta^n}] = E[(T_{s,t}^{\Delta^n} - (s - t))^2] = \|T_{s,t}^{\Delta^n} - (s - t)\|_{L^2}^2$$

d'où $T_{s,t}^{\Delta^n} \to s - t$ dans L^2 ■

If $f : [0, \infty[\to I\!R$, we define

$$V_{t,s}(f) := \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

where Δ is a finite partition of $[t,s]$. The term $V_{t,s}(f)$ is called the variation of the function f on the interval $[t,s]$.

Remark 1.21 *We recall the following result that characterizes the classe of functions with bounnded variation: : $V_{t,s}(f) < \infty$ if and only if there exist two increasing functions g and $h : [s,t] \to I\!R$ with $f = g - h$.*

Corollary 1.22 *If B is a Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, there exist a subset Ω' of Ω with probability $P(\Omega') = 1$ such that $\forall \omega \in \Omega' : \forall s > t \geq 0 : V_{t,s}(B_.(\omega)) = \infty$.*

Preuve: Pour toute paire de nombres rationnels $p < q$, choisissons une suite $\Delta^n_{p,q}$ de découpages de $[p,q]$ telle que $|\Delta^n_{p,q}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème 1.20, $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}$ converge au sens L^2 vers $p-q$. Par selection d'une sous-suite, nous pouvons supposer la convergence P-pp. Ainsi, il existe un ensemble $\Omega_{p,q} \subset \Omega$ de probabilité $P(\Omega_{p,q}) = 1$ sur lequel $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}$ converge ponctuellement vers $p-q$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de paires de rationnels, l'ensemble $\Omega' := \cap_{(p,q)\in \mathbb{Q}^2_+} \Omega_{p,q}$ a une probabilité $P(\Omega') = 1$.

Soit $\omega \in \Omega'$. Soit $s > t$ et choisissons une paire de rationnels $p < q$ dans $[t,s]$. Puisque $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}(\omega)$ converge vers $q-p > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N$, $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}(\omega) > (q-p)/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(q-p)/2 &< \sum_{i=1}^{n-1} (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot V_{p,q}(B_.(\omega)) \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot V_{s,t}(B_.(\omega))
\end{aligned}$$

Puisque $|\Delta^n_{p,q}|$ tend vers 0 et que la trajectoire $B_.(\omega)$ est uniformément continue sur $[s,t]$, $(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|)$ tend vers 0 avec n. Ceci n'est possible que si $V_{s,t}(B_.(\omega)) = \infty$. ■

The above corollary shows that the trajectoties of the Brownian motion are neither increasing nor decresing on any interval!

Corollary 1.23 *If B is a Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, there exists a subset Ω' of Ω with $P(\Omega') = 1$ such that $\forall \omega \in \Omega'$, the trajectory $B_.(\omega)$ is not holderian of order $\alpha > 1/2$ on any interval.*

Preuve: Reprenons l'ensemble Ω' construit dans la démonstration précédente. Soit $\omega \in \Omega'$, et supposons la trajectoire $B_.(\omega)$ höldérienne d'ordre $\alpha > 1/2$ sur l'intervalle $[t,s]$:

$$\exists K < \infty : \forall t_1, t_2 \in [t,s] : |B_{t_1}(\omega) - B_{t_2}(\omega)| \leq K|t_1 - t_2|^\alpha$$

Si p, q sont des rationnels tels que $t < p < q < s$, alors

$$\begin{aligned}
T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) &= \sum_{i=1}^{n-1}(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\
&\leq K^2 \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|^{2\alpha} \\
&\leq K^2 |\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| \\
&= K^2 |\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1}(p - q)
\end{aligned}$$

Puisque $T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) \to q - p > 0$ et $|\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} \to 0$ $(\alpha > 1/2)$, les dernières inégalités ne sont possibles que si $K = \infty$. ■

Remark 1.24 *Show that with probability 1,are not holderian of order 1/2 on any interval; (the proof is not mandatory, it can be found in various monographs.)*

More generally, one can define the variation of order $p > 0$ of a process X as the limit (in probability) of the sequence

$$T_t^{\Delta,p}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p$$

where the partition Δ is as before.

Exercice 1.25 (TO BE DONE IN CLASS) *Montrer que si*

$$\lim_{|\Delta| \to 0} T_t^{\Delta,p}(X) = L_t$$

en probabilité, où L_t *est une v.a. à valeurs dans* $[0, \infty[$ *alors*

$$\forall q > p, \lim_{|\Delta| \to 0} T_t^{\Delta,q}(X) = 0$$

en probabilité et

$$\forall 0 < q < p, \lim_{|\Delta| \to 0} T_t^{\Delta,p}(X) = \infty$$

en probabilité sur l'ensemble $(L_t > 0)$.

Exercice 1.26 (TO BE DONE IN CLASS) *En déduire que les trajectoires du brownien ne sont pas à variation bornée.*