Cours de CALCUL STOCHASTIQUE

Ciprian TUDOR
Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1

October 13, 2007

MASTER M2: Mathématiques Appliquées à l'Economie et à la Finance

CHAPITRE 2

ATTENTION: Ces notes de cours représentent une version rémaniée du cours enseigné par Bernard De Meyer dans le cadre du DEA MMME 2004-2005, à l'Université de Paris 1.

1 CHAPITRE 2: Mouvement brownien

Lors de ses observations microscopiques de particules de pollen en suspension dans l'eau, le botaniste anglais Brown est frappé en 1827 par le mouvement erratique et apparemment imprévisible de ces particules.

Ce mouvement, dénommé depuis mouvement brownien, fut expliqué physiquement par Einstein (1905), qui en donna également les pricipales caractéristiques. Si B_t dénote la position horizontale de la particule de pollen au temps t, Einstein suggère que

(1) $(\forall t, s \geq 0 : (B_{t+s} - B_t) \perp\!\!\!\perp \sigma(B_u; 0 \leq u \leq t)$.

(2) $(\forall t, s \geq 0 : (B_{t+s} - B_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$.

(3) Les trajectoires du processus B sont continues.

Il voit en effet le déplacement de la particule $(B_{t+s} - B_t)$ comme une conséquence des chocs des molécules d'eau sur la particule: On conoit aisément que l'effet de tels chocs est en moyenne nul et que les chocs peuvent être considérés comme indépendants et équidistribués. Le point (1) suit alors l'indépendance des chocs évoquée plus haut. Le point (2) provient d'une utilisation intuitive du théorème central limite: Une somme d'un grand nombre de chocs indépendants suit essentiellement un loi normale dont la variance est proportionnelle au nombre de chocs considérés dans la somme et donc l'intervalle de temps considéré. Le point (3) est évident si l'on considère que B_t est la trajectoire d'une particule physique.

Le modèle physique du mouvement brownien décrit plus haut semble justifier heuristiquement son existence. La preuve mathématique de l'existence d'un espace probabilisé et d'un processus sur cet espace qui a les trois propriétés décrites par Einstein n'a été réalisée qu'en 1920 par Wiener.

1.1 Construction d'un mouvement brownien

Définition 1.1 *Si $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$,un processus B_t adapté la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien standard si:*

- *1) $B_0 = 0$*
- *2) $\forall\ 0 \leq t < s < \infty$, $B_s - B_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ et suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $s - t$.*
- *3) les trajectoires $B(\omega)$ sont continues $\forall \omega$.*

Dans cette section, nous construisons explicitement un mouvement brownien sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivant: $\Omega = I\!R^{I\!N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{I\!R^{I\!N}}$ et $P = (\mathcal{N}(0,1))^{\bigotimes I\!N}$

(NB. L'existence de cet espace provient du théorème de consistence de Kolmogorov. Rappelons le cadre général. Soit $(E_t, \mathcal{E}_t)_{t\in T}$ une famille d'espaces mesurables où $\mathcal{E}_t = \mathcal{B}(E_t)$ pour tout $t \in T$. Pout tout $F \subset T$, F fini, soit P_F une probabilité sur $\mathcal{E}^F$. Supposons que

1. pour tout $A \in \mathcal{E}^F$ on a

$$P_F(A) = \sup\left(P_F(K), K \subset A, K \text{ compact }\right)$$

2. la famille $\left(E^F, \mathcal{E}^F, P_F\right)_{F \subset T, F \text{ fini}}$ vérifie *la propriété de consistence*

$$P_{F_2} \circ \left(\pi_{F_1}^{F_2}\right)^{-1} = P_{F_1}$$

pour tous $F_1 \subset F_2 \subset T$, F_1, F_2 finis, où $\pi_{F_1}^{F_2}$ représente la projection de E^{F_2} à E^{F_1}.

Alors il existe une probabilité P sur $(E^T, \mathcal{E}^T)$ telle que

$$P \circ (\pi_F^T)^{-1} = P_F$$

pour tout F fini.)

Exercice 1.2 *Appliquer le résultat précedent pour $E_t = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$,$T = \mathbb{N}$ et P_F la loi normale $|F|$-dimensionnelle.*

Soit $\omega = (\xi_n)_{n \in I\!N} \in \Omega$.

Remarque 1.3 *Sous P, les ξ_n sont des variables aléatoires, normales, centrées, réduites et indépendantes. (Cela vient en fait de la construction de la probabilité $P = N(0,1)^{\mathbb{N}}$.)*

Considérons $\{e_i\}$ une base hilbertienne de $L^2([0, \infty[)$ et construisons l'application linéaire:

$$F : L^2([0, \infty[) \to L^2(\Omega) \text{ telle que } \forall i \in I\!N : F(e_i) = \xi_i.$$

Lemme 1.4 *F est bien définie et est une isométrie de $L^2([0, \infty[)$ vers $L^2(\Omega)$. De plus, pour tout $g \in L^2([0, \infty[)$, $F(g)$ suit une loi normale centrée de variance $\|g\|^2$.*

Preuve:
Soit $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel engendré par les e_i. Si $g \in \mathcal{G}$, g peut s'écrire comme une somme finie $g = \sum_{i=0}^N \alpha_i e_i$, où

$$\alpha_i =< e_i, g >= \int_{I\!R} e_i(x) g(x)\, dx.$$

Par linéarité, on trouve $F(g) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \xi_i$, ce qui définit donc F sur $\mathcal{G}$ de manière univoque puisque les α_i sont univoquement déterminés.

Puisque $\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^N \alpha_i^2$ et comme les ξ_i sont des v.a indépendantes normales centrées et réduites, on a

$$F(g) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=0}^N \alpha_i^2) = \mathcal{N}(0, \|g\|^2_{L^2([0,\infty[}).$$

En particulier, si $g \in \mathcal{G}$, $\|F(g)\|^2_{L^2(\Omega)} := E[F(g)^2] = \|g\|^2_{L^2([0,\infty[}$. Ainsi F est une isométrie de $\mathcal{G}$ vers $L^2(\Omega)$ qui peut s'étendre par uniforme continuité $L^2([0,\infty[)$, $\mathcal{G}$ étant dense dans $L^2([0,\infty[)$.

Montrons la dernière assertion: si $g \in L^2([0,\infty[)$, il existe une suite $\{g_n\}_{n\in I\!N} \subset \mathcal{G}$ qui converge vers g au sens $L^2([0,\infty[)$. $\{F(g_n)\}_{n\in I\!N}$ converge donc vers $F(g)$ au sens $L^2(\Omega)$. Par choix d'une sous-suite, on peut considérer que la convergence a également lieu $P-pp$. Par le théorème de la convergence dominée, on obtient ainsi

$$E[\exp(i\alpha F(g_n))] \to E[\exp(i\alpha F(g))].$$

Or puisque $F(g_n) \sim \mathcal{N}(0, \|g_n\|^2_{L^2([0,\infty[})$, on a $E[\exp(i\alpha F(g_n))] = \exp(-\alpha^2\|g_n\|^2_{L^2([0,\infty[})$ et en passant la limite: $E[\exp(i\alpha F(g))] = \exp(-\alpha^2\|g\|^2_{L^2([0,\infty[})$, ce qui démontre que $F(g) \sim \mathcal{N}(0, \|g\|^2_{L^2([0,\infty[})$ ■

Définissons alors $B_s := F(\mathbf{1}_{[0,s]})$.

Lemme 1.5 *Le processus B ainsi construit vérifie les propriétés 1) et 2) de la définition 1.1 relativement sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \in [0,t])$.*

Preuve: Il est évident que $B_0 := F(0) = 0$ P-pp.

Montrons que $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$. A cette fin, montrons d'abord que $\forall t_1 < \ldots < t_n < t < t+s$ le vecteur $\vec{B} = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}, B_{t+s} - B_t)$ est un vecteur gaussien:

si $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}) \in R^{n+1}$, on a:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} v_i B_{t_i} + v_{n+1}(B_{t+s} - B_t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} v_i F(\mathbf{1}_{[0,t_i]}) + v_{n+1} F(\mathbf{1}_{]t,t+s]}) \\
&= F(\sum_{i=0}^{n} v_i \mathbf{1}_{[0,t_i]} + v_{n+1}\mathbf{1}_{]t,t+s]})
\end{aligned}$$

car F est linéaire. Ainsi $\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle$ suit une loi normale, comme il résulte du lemme précédent. Ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{v}$, $\vec{B}$ est bien un vecteur gaussien.

Montrons ensuite que $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. Puisque $\vec{B}$ est gaussien, il suffit de montrez que $cov(B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) = 0$ (exercice 1.56, Ch.1-2).

Or, nous avons :

$$\begin{aligned}
cov(B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) &= E[(B_{t_i} - E(B_{t_i}))(B_{t+s} - B_t - E(B_{t+s} - B_t)] \\
&= E[B_{t_i}(B_{t+s} - B_t)] = \langle B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \langle F(\mathbf{1}_{[0,t_i]}), F(\mathbf{1}_{]t,t+s]}) \rangle_{\mathbf{L^2}(\Omega)} = \langle \mathbf{1}_{[0,t_i]}, \mathbf{1}_{]t,t+s]} \rangle_{\mathbf{L^2}([0,\infty[)} \\
&= \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t_i]}(x)\mathbf{1}_{]t,t+s]}(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Donc $(B_{t+s}-B_t) \perp\!\!\!\perp \cup_{T \text{ fini } \subset[0,t]} \sigma(B_v, v \in T)$. Enfin, $\cup_{T \text{ fini } \subset[0,t]} \sigma(B_v, v \in T)$ est une algèbre d'ensembles qui engendre $\mathcal{F}_t$ et on peut donc utiliser l'exercice 1.20, Ch.1 pour conclure l'indépendance de $B_{t+s}-B_t$ et de $\mathcal{F}_t$.

Montrons enfin que $B_{t+s}-B_t \sim \mathcal{N}(0,s)$.

En effet $B_{t+s}-B_t = F(\mathbf{1}_{[0,t+s]}) - F(\mathbf{1}_{[0,t]}) = F(\mathbf{1}_{]t,t+s]})$ suit une loi normale centrée et on a:

$$\|\mathbf{1}_{]t,t+s]}\|^2_{\mathbf{L^2}([0,\infty[)} = \int_0^\infty \mathbf{1}^2_{]t,t+s]}(x)dx = s.$$

Donc $B_{t+s}-B_t \sim \mathcal{N}(0,s)$. ■

Ainsi il reste à montrer la continuité des trajectoires. Notons cependant que B_t a été défini plus haut comme $F(\mathbf{1}_{[0,t[})$ où F est une application valeurs dans L^2 et non dans $\mathcal{L}^2$. Ainsi B_t n'est en fait défini qu' un ensemble de probabilité nulle près! Peut-on choisir pour tout t un représentant $\bar{B}_t \in \mathcal{L}^2$ de la classe d'équivalence $B_t \in L^2$, de telle sorte que le processus résultant ait ses trajectoires continues? Pour répondre affirmativement cette question, nous allons nous servir du théorème suivant:

Théorème 1.6 *(critère de continuité de Kolmogorov)*

Si X est un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel qu'il existe α, β et C strictement positifs tels que : $\forall\ 0 \le s,t < \infty$

$$E[|X_s - X_t|^\alpha] \le C|s-t|^{1+\beta},$$

alors il existe une modification $\bar{X}$ de X telle que $\forall \delta \in [0, \frac{\beta}{\alpha}[$:

$$E\left[\left(sup\{\frac{|\bar{X}_s - \bar{X}_t|}{|s-t|^\delta}, 0 \le s,t \le 1, s \neq t\}\right)^\alpha\right] < \infty.$$

En particulier $\bar{X}$ est un processus trajectoires continues sur $[0,\infty[$.

Idée de la preuve: On donnera les étapes de la preuve. On considère $t \in [0,1]$.

1. Par l'inegalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_t - X_s| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^\alpha} E|X_t - X_s|^\alpha \le C\varepsilon^{-\alpha}|t-s|^{1+\beta}$$

donc $X_s - X_t \to 0$ en probabilité si $s \to t$. Posons

$$t = \frac{k}{2^n}, s = \frac{k-1}{2^n} \text{ et } \varepsilon = 2^{-\gamma n}(0 < \gamma < \beta/\alpha)$$

dans l'inegalité précédente. On obtient

$$P\left(|X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \ge 2^{-\gamma n}\right) \le C2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}$$

et par conséquent

$$
\begin{aligned}
& P\left(\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \\
& = P\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \\
& \leq C 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}.
\end{aligned}
$$

Commee la série $\sum_n 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}$ converge, par le lemme de Borel-Cantelli, il existe en ensemble $\Omega^\star$ de probabilité égale à 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega^\star$,

$$
\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| < 2^{-\gamma n} \qquad \forall n \geq n^\star(\omega)
$$

où $n^\star(\omega)$ est une v.a. positive et entière.

2. Posons
$$
D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \text{ où } D_n = \{\frac{k}{2^n}, k = 0, \dots, 2^n\}.
$$
On montre que pour tout $\omega \in \Omega^\star$ et $n > n^\star(\omega)$ fixés, et pour tout $m > n$,
$$
|X_t - X_s| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}, \qquad \forall t, s \in D_m, |t-s| < 2^{-n}.
$$

3. On prouve que $X_t(\omega), t \in D$ est uniformément continue en t pour tout $\omega \in \Omega^\star$.

4. On construit la modification voulue $\tilde{X}$ de X comme il suit: $\tilde{X}_t(\omega) = 0$ si $\omega \notin \Omega^\star$; $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ si $\omega \in \Omega^\star$ et $t \in D$; si $\omega \in \Omega^\star$ et $t \notin D$, on considère une suite $s_n \in D, s_n \to_{n\to\infty} t$. Alors la suite $X_{s_n}(\omega)$ est de Cauchy (étape précédente) et donc elle a une limite qui dépend de t. On pose alos $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_n X_{s_n}(\omega)$.

■

Exercice 1.7 *Montrez que, sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que $P(\Omega') = 1$ vérifiant: $\forall \omega \in \Omega'$, la trajectoire $t \in [0,1] \to X_t(\omega)$ est δ-Höldérienne pour tout δ dans $[0, \beta/\alpha[$. En d'autres termes:*

$$
\forall \delta \in [0, \beta/\alpha[, \exists K(\delta) < \infty : \forall t, s \in [0,1] : |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq K(\delta)|t-s|^\delta
$$

Montrez que si X vérifie l'inégalité du théorème précédent pour tout $s, t \geq 0$, alors il existe une modification $\bar{X}$ de X dont les trajectoires sont continues sur $[0, \infty[$.

Appliquons le théorème de Kolmogorov au processus B construit plus haut: On a $B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, s-t)$. Donc $B_s - B_t$ a même loi que $\sqrt{s-t}Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi:

$$E[|B_s - B_t|^\alpha] = E[\sqrt{s-t}^\alpha |Z|^\alpha] = |s-t|^{\frac{\alpha}{2}} C_\alpha \leq C_\alpha |s-t|^{1+\beta}$$

avec $C_\alpha := E[|Z|^\alpha] < \infty$ et $\beta := \frac{\alpha}{2} - 1$. Puisque il faut que β soit strictement positif, il faut que $\alpha > 2$. Ainsi on obtient une modification de B dont les trajectoires sont localement höldériennes d'ordre $\delta < \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$. Puisque α est arbitrairement grand, nous avons établi le théorème suivant:

Théorème 1.8 *Il existe une modification $\bar{B}$ du processus B dont les trajectoires sont localement höldériennes d'ordre δ, pout tout δ dans* $[0, 1/2[$.

Remarque 1.9 *Soit $\bar{\mathcal{F}}_t$ la complétion de $\mathcal{F}_t$. Montrez que $\bar{B}$ est adapté $\bar{\mathcal{F}}_t$ et est un $\bar{\mathcal{F}}_t$-mouvement brownien.*

Exercice 1.10 (IL SERA FAIT EN TD) *Montrez que si B est un mouvement brownien, alors $cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, où $s \wedge t$ est une notation pour* $\min(s,t)$.

Montrez que si X est un processus continu gaussien centré —i.e. pour toute famille finie $\{t_1, \ldots, t_n\}$, le vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est gaussien centré— et si $\forall s, t \geq 0 : cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, alors B est un mouvement brownien sur sa filtration naturelle.

Sur $\Omega_0 := \mathcal{C}([0, \infty[)$, on définit le processus X_t, $\omega_0 \in \Omega_0 \to X_t(\omega_0) := \omega(t)$. Soit $\mathcal{G}_t$ sa filtration naturelle.

Corollaire 1.11 *Sur $(\Omega_0, \mathcal{G}_\infty)$ il existe une mesure de probabilité Π unique, telle que X_t soit un $\mathcal{G}_t$-mouvement brownien. Π est appelée mesure de Wiener.*

Preuve:

1) *existence:* Soit l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel nous avons construit le mouvement brownien $\hat{B}$. Nous pouvons voir $\hat{B}$ comme une application qui $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire $\hat{B}_.(\omega) : t \to \hat{B}_t(\omega)$. Ainsi, $\hat{B}_.$ est une application de Ω dans Ω_0. Elle est clairement mesurable de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}_\infty$, puisque $\forall t$: $\hat{B}_t$ est $\mathcal{F}$-mesurable. On prend pour Π la mesure image de P par $\hat{B}_.$: $\Pi := P_{\hat{B}_.}$ cd $\forall C \in \mathcal{G}_\infty : \Pi(C) := P(\hat{B}_.^{-1}(C))$.

Sous Π, montrons que $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. En effet, pour $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Pi(\{\omega_0 | X_t(\omega_0) \in A\}) &= \Pi(X_t^{-1}(A)) = P(\hat{B}_.^{-1}(X_t^{-1}(A))) \\
&= P(\{\omega | \hat{B}_.(\omega) \in X_t^{-1}(A)\}) \\
&= P(\{\omega | X_t(\hat{B}_.(\omega)) \in A\}) \\
&= P(\{\omega | \hat{B}_t(\omega) \in A\})
\end{aligned}$$

Or $\hat{B}$ est un mouvement brownien sous P.

Cet argument se généralise aisément pour montrer que $X(\omega_0)$ est un mouvement brownien sous Π (en réalité, on peut montrer que les processus X et $\hat{B}$ sont équivalents, c.à. d. ils ont les mêmes distributions fini-dimensionnelles.)

2) *unicité:* Si Π et Π' sont deux mesures sur $(\Omega_0, \mathcal{G}_\infty)$ telles que X soit un mouvement brownien, alors, pour tout ensemble J fini dans $I\!R^+$, Π et Π' concident sur $\mathcal{G}_J := \sigma(X_t, t \in J)$. En effet, du caractère brownien de X, on déduit que le vecteur aléatoire $(X_t, t \in J)$ est gaussien centré et $cov(X_t, X'_t) = t \wedge t'$. La loi de $(X_t, t \in J)$ est donc entièrement déterminée et est identique sous Π et Π'.

En d'autres termes $\mathcal{G}_J \subset \mathcal{U} := \{A \in \mathcal{G}_\infty | \Pi(A) = \Pi'(A)\}$. Partant $\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J \subset \mathcal{U}$.

Or $\mathcal{U}$ se révèle être une classe monotone suite la σ-additivité de Π et Π'. Il résulte donc du théorème des classes monotones que $\sigma(\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J) \subset \mathcal{U}$. Or $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J)$. Par la définition de $\mathcal{U}$, on en déduit que Π et Π' concident sur $\mathcal{G}_\infty$. ■

1.2 Quelques propriétés du mouvement brownien

Théorème 1.12 *Si B est un mouvement brownien, alors :*

1. *(autosimilarité) $\forall c > 0$ $X_t = c^{-1} B_{c^2 t}$ est un mouvement brownien.*
2. *$Y_t = t B_{t^{-1}}$ est un mouvement brownien, $Y_0 = 0$.*
3. *$\forall\ \delta > 0$ $Z_t = B_{t+\delta} - B_\delta$ est un mouvement brownien.*

Preuve:

1. Les trajectoires X_t sont continues, car celles de B_t le sont. De plus $X_0 = c^{-1} B_0 = 0$. Observons que $X_{t+s} - X_t = c^{-1}(B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t}) = c^{-1}(B_{t'+s'} - B_{t'})$ avec $t' = c^2 t$ et $s' = c^2 s$ donc $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(B_\mu, \mu \leq t') = \sigma(B_\mu, \mu \leq c^2 t) = \sigma(X_v, v \leq t)$ donc $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(X_v, v \leq t)$. Puisque $B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t} \sim \mathcal{N}(0, c^2 s)$, il est clair que $X_{t+s} - X_t = c^{-1}(B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t}) \sim \mathcal{N}(0, s)$. Ainsi X_t est un mouvement brownien.

2. Y est clairement un processus gaussien centré (voir exercice 1.10): Pour tout J fini $\subset]0, \infty[$, le vecteur aléatoire $(Y_t, t \in J)$ est l'image du vecteur gaussien centré $(B_t, t \in J)$ par une application linéaire. De plus $cov(Y_t, Y_s) = ts \cdot cov(B_{\frac{1}{t}}, B_{\frac{1}{s}}) = ts(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}) = s \wedge t$. Ainsi, pour tout J fini $\subset]0, \infty[$, les vecteurs aléatoires $(Y_t, t \in J)$ et $(B_t, t \in J)$ ont même loi, puisqu'ils sont des vecteur gaussiens centrés de même matrice de covariance. Pour pouvoir appliquer l'exercice 1.10 et conclure que Y est un mouvement brownien, il nous suffit de montrer que les trajectoires de Y sont continues. Par continuité de celles de B, les trajectoires de Y sont clairement continues pour $t > 0$ et il nous suffit de montrer que $P(\{\omega | \lim_{t \searrow 0} Y_t(\omega) = 0\}) = 1$. Puisque $t \in]0, \infty[\to Y_t(\omega)$ est une fonction continue, nous avons

$$\{\omega | \lim_{t \searrow 0} Y_t(\omega) = 0\} = \{\omega | \lim_{q \searrow 0, q \in \mathbb{Q}} Y_t(\omega) = 0\}$$

Si $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles finis dont l'union est $\mathbb{Q}_+$, l'ensemble $\{\omega | \lim_{q\searrow 0, q\in\mathbb{Q}} Y_t(\omega) = 0\}$ est égal

$$\{\omega | \forall k \in \mathbb{N}: \exists M \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: \forall q \in J_n \cap]0, 1/M]: |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}.$$

Par monotonie des suites d'ensembles considérées, la probabilité $P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\})$ peut s'écrire comme

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M]; |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}).$$

Puisque $(Y_t, t \in \forall q \in J_n \cap]0, 1/M])$ a la même loi que $(B_t, t \in \forall q \in J_n \cap]0, 1/M])$, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} &P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M\} |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}) \\ &= P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M\} |B_q(\omega)| \leq 1/k\}), \end{aligned}$$

et donc

$$P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\}) = P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} B_t(\omega) = 0\}) = 1.$$

3. Les Z_t ont leurs trajectoires continues et $Z_0 = B_\delta - B_\delta = 0$
   $Z_{t+s} - Z_t = B_{t+s+\delta} - B_\delta + B_{t+\delta} - B_\delta = B_{t+\delta+s} - B_{t+\delta}$ ceci est indépendant de $\sigma(B_\mu, \mu \leq t + \delta) \supset \sigma(Z_v, v \leq t)$.
   Enfin, $Z_{t+s} - Z_t = B_{t+\delta+s} - B_{t+\delta} \sim \mathcal{N}(0, s)$ Donc Z_t est un mouvement brownien. ■

Théorème 1.13 *(Loi du tout ou du rien)*
Si B est un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, alors

$$\forall A \in \mathcal{F}_{0^+} : P(A) \in \{0, 1\}.$$

Preuve: Soit $0 < \epsilon < \delta$. Posons $\mathcal{F}_{\epsilon,\delta} = \sigma(B_t - B_\epsilon, \epsilon \leq t \leq \delta)$. Puisque $\forall t \in [0, \delta]$:

$$B_t = \lim_{\epsilon\searrow 0} (B_t - B_\epsilon)$$

il suit que B_t, $0 \leq t \leq \delta$ est $\sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta})$-mesurable. Ainsi

$$\mathcal{F}_\delta \subset \sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}) \text{ donc } \mathcal{F}_\delta = \sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}).$$

Si $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, alors $\forall\epsilon > 0$, $A \in \mathcal{F}_\epsilon$ qui est indépendant de $\mathcal{F}_{\epsilon,\delta}$, donc, en utilisant l'exercice 1.20, Ch.1, A est indépendant de $\sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}) = \mathcal{F}_\delta \ni A^c$. Ainsi A est indépendant de A^c, et donc $P(A)P(A^c) = P(A \cap A^c) = 0$, d'où $P(A)(1 - P(A)) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
■

Corollaire 1.14 *Si B est un mouvement brownien, alors*

$$P(\forall\epsilon > 0, \sup_{0\leq t\leq\epsilon} B_t > 0) = 1.$$

Preuve: Soit $A_\epsilon = \{\sup_{0\leq t\leq \epsilon} B_t > 0\}$. On a alors:

$$A = \{\forall \epsilon > 0, \sup_{0\leq t\leq \epsilon} B_t > 0\} = \cap_n A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{F}_{0^+}$$

donc, d'après le théorème précédent $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Or $P(A) = \lim P(A_{\frac{1}{n}}) \geq \lim P(B_{\frac{1}{n}} > 0) = \frac{1}{2}$ donc $P(A) = 1$. ■

Remarque 1.15 *Puisque $-B$ est également un mouvement brownien, on montre aussi: $P(\forall \epsilon > 0, \inf_{0\leq t\leq \epsilon} B_t < 0) = 1$, et donc*

$$P(\forall \epsilon > 0, \sup_{0\leq t\leq \epsilon} B_t > 0 \ \ et \ \inf_{0\leq t\leq \epsilon} B_t < 0) = 1.$$

Ainsi, avant de quitter 0, la trajectoire générique d'un mouvement brownien oscille une infinité de fois entre les valeurs positives et négatives, comme le fait par exemple la fonction $t \to t\sin(1/t)$. Entre deux telles oscillations, le brownien s'annule, par continuité et donc $P(\{\omega | \exists \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} : t_n \searrow 0$ et $B_{t_n}(\omega) = 0\}) = 1$.

Corollaire 1.16 $P(\sup_{t\geq 0} B_t = \infty) = 1$.

Preuve: Soient $c > 0$ et $\delta > 0$, alors

$$\begin{aligned} P(\sup_{t\geq 0} B_t \geq c) &= P(\sup_{t\geq 0} \frac{\delta}{c} B_t \geq \delta) \\ &= P(\sup_{t\geq 0} \frac{\delta}{c} B_{\frac{\delta}{c}t} \geq \delta) \\ &= P(\sup_{t\geq 0} X_t \geq \delta), \end{aligned}$$

où X est un mouvement brownien, comme il résulte du Théorème 1.12(la propriété d'autosimilarité). En prenant la limite de la dernière ligne lorsque $\delta \searrow 0$, on obtient $P(\sup_{t\geq 0} X_t > 0)$ qui vaut 1 par le corollaire précédent. Ainsi $\forall c > 0$, $P(\sup_{t\geq 0} B_t \geq c) = 1$, ce qui nous permet de conclure $P(\sup_{t\geq 0} B_t = \infty) = 1$. ■

Remarque 1.17 *Puisque la trajectoire générique du mouvement brownien est continue, le corollaire précédent indique en fait que $\limsup_{t\nearrow\infty} B_t = \infty$. Par symétrie, nous avons aussi $\liminf_{t\nearrow\infty} B_t = -\infty$, et donc le mouvement brownien (de dimension 1) passe une infinité de fois par n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$: ceci s'exprime en disant que le mouvement brownien est un processus récurrent.*

Quelques processus liés au mouvement brownien

- Le pont brownien: Considérons le processus

$$X_t = B_t - tB_1$$

avec $t \in [0, 1]$.

Exercice 1.18 (IL SERA FAIT EN TD) *Montrer qu'll s'agit d'un processus gaussian centré de covariance*

$$E(X_tX_s) = \min(s,t) - st.$$

- le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui est un processus gaussien centré de covariance

$$E(X_tX_s) = e^{-\beta|t-s|}$$

  où $\beta > 0$.

- le mouvement brownien géométrique, proposé par Black, Scholes et Merton pour modeliser les actifs financiers:

$$X_t = e^{\sigma B_t + \mu t}$$

  avec $t \geq 0$, $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

- le mouvement brownien fractionnaire: il s'agit d'un processus gaussien centré B^H de covariance

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

  où $H \in (0,1)$ est l'indice de Hurst.

Exercice 1.19 (IL SERA FAIT EN TD) *Montrer que si $H = \frac{1}{2}$ on retrouve le mouvement brownien. Montrer que B^H est H -autosimilaire, c.à.d pour tout $c > 0$, $c^H B_{ct}, t \geq 0$ est un mouvement brownien fractionnaire;*

1.3 Variation quadratique:

Soit B un mouvement brownien et soit $s > t$. Pour un découpage (partition) fini Δ de l'intervalle $[t,s]$ (i.e. $\Delta = \{t = t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n = s\}$), nous posons: $|\Delta|=\max_{i=1}^{i=n-1}(t_{i+1}-t_i)$. Enfin notons $T_{s,t}^{\Delta}$ la variable aléatoire $T_{s,t}^{\Delta} = \sum_{i=1}^{i=n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$.

Théorème 1.20 *Si $\{\Delta^n\}_{n\in N}$ est une suite de partitions de [s,t] telle que $|\Delta^n| \to 0$ quand $n \to \infty$, alors*

$$T_{s,t}^{\Delta^n} \to s - t$$

dans L^2.

Preuve: Calculons $E[T_{s,t}^{\Delta^n}]$: puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$, $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ peut s'écrire $\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_i$ avec $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ ainsi:

$$E[T_{s,t}^{\Delta^n}] = \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)E[Z_i^2] = \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = t_n - t_1 = s - t.$$

$$
\begin{aligned}
var[T_{s,t}^{\Delta^n}] &= \sum_{i=1}^{i=n-1} var[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{i=1}^{i=n-1} var[(t_{i+1} - t_i) Z_i^2] \\
&= \sum_{i=1}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 var(Z_i^2) \\
&\leq \sum_{i=1}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)|\Delta^n| var(Z^2) \\
&= (s-t) var(Z^2)|\Delta^n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Or

$$
var[T_{s,t}^{\Delta^n}] = E[(T_{s,t}^{\Delta^n} - (s-t))^2] = \|T_{s,t}^{\Delta^n} - (s-t)\|_{L^2}^2
$$

d'où $T_{s,t}^{\Delta^n} \to s - t$ dans L^2 ■

Si $f : [0, \infty[\to I\!R$, on défini

$$
V_{t,s}(f) := \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|
$$

où Δ parcourt la classe des découpages finis de $[t, s]$. $V_{t,s}(f)$ s'appelle la variation de f sur l'intervalle $[t, s]$.

Remarque 1.21 *Rappelons le théorème suivant qui caractérise la classe des fonctions variation bornée: $V_{t,s}(f) < \infty$ si et seulement si il existe deux fonctions croissantes g et $h : [s, t] \to I\!R$ telles que $f = g - h$.*

Corollaire 1.22 *Si B est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, il existe un sous ensemble Ω' de Ω de probabilité $P(\Omega') = 1$ tel que $\forall \omega \in \Omega' : \forall s > t \geq 0 : V_{t,s}(B_.(\omega)) = \infty$.*

Preuve: Pour toute paire de nombres rationnels $p < q$, choisissons une suite $\Delta_{p,q}^n$ de découpages de $[p, q]$ telle que $|\Delta_{p,q}^n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème 1.20, $T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}$ converge au sens L^2 vers $p - q$. Par selection d'une sous-suite, nous pouvons supposer la convergence P-pp. Ainsi, il existe un ensemble $\Omega_{p,q} \subset \Omega$ de probabilité $P(\Omega_{p,q}) = 1$ sur lequel $T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}$ converge ponctuellement vers $p - q$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de paires de rationnels, l'ensemble $\Omega' := \cap_{(p,q)\in \mathbb{Q}_+^2} \Omega_{p,q}$ a une probabilité $P(\Omega') = 1$.

Soit $\omega \in \Omega'$. Soit $s > t$ et choisissons une paire de rationnels $p < q$ dans $[t, s]$. Puisque $T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega)$ converge vers $q - p > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N$, $T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) > (q - p)/2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(q-p)/2 &< \sum_{i=1}^{n-1} (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \right) \cdot V_{p,q}(B_.(\omega)) \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \right) \cdot V_{s,t}(B_.(\omega))
\end{aligned}$$

Puisque $|\Delta_{p,q}^n|$ tend vers 0 et que la trajectoire $B_.(\omega)$ est uniformément continue sur $[s,t]$, $(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|)$ tend vers 0 avec n. Ceci n'est possible que si $V_{s,t}(B_.(\omega)) = \infty$. ■

Le corollaire précédent implique en particulier que la trajectoire générique du mouvement brownien n'est croissante ou décroissante sur aucun intervalle!

Corollaire 1.23 *Si B est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, il existe un sous ensemble Ω' de Ω de probabilité $P(\Omega') = 1$ tel que $\forall \omega \in \Omega'$, la trajectoire $B_.(\omega)$ n'est höldérienne d'ordre $\alpha > 1/2$ sur aucun intervalle.*

Preuve: Reprenons l'ensemble Ω' construit dans la démonstration précédente. Soit $\omega \in \Omega'$, et supposons la trajectoire $B_.(\omega)$ höldérienne d'ordre $\alpha > 1/2$ sur l'intervalle $[t,s]$:

$$\exists K < \infty : \forall t_1, t_2 \in [t,s] : |B_{t_1}(\omega) - B_{t_2}(\omega)| \leq K |t_1 - t_2|^\alpha$$

Si p, q sont des rationnels tels que $t < p < q < s$, alors

$$\begin{aligned}
T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) &= \sum_{i=1}^{n-1} (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\
&\leq K^2 \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|^{2\alpha} \\
&\leq K^2 |\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| \\
&= K^2 |\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} (p-q)
\end{aligned}$$

Puisque $T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) \to q - p > 0$ et $|\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} \to 0$ $(\alpha > 1/2)$, les dernières inégalités ne sont possibles que si $K = \infty$. ■

Remarque 1.24 *(facultatif) Montrez que, avec probabilité 1, les trajectoires du mouvement brownien ne sont höldériennes d'ordre 1/2 sur aucun intervalle.(*

Plus généralement, on peut définir la variation d'ordre $p > 0$ d'un processus stochastique X comme la limite (en probabilité) de

$$T_t^{\Delta,p}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p$$

où la partition Δ est comme avant.

Exercice 1.25 (IL SERA FAIT EN TD) *Montrer que si*

$$\lim_{|\Delta|\to 0} T_t^{\Delta,p}(X) = L_t$$

en probabilité, où L_t est une v.a. à valeurs dans $[0,\infty[$ alors

$$\forall q > p, \lim_{|\Delta|\to 0} T_t^{\Delta,q}(X) = 0$$

en probabilité et

$$\forall 0 < q < p, \lim_{|\Delta|\to 0} T_t^{\Delta,p}(X) = \infty$$

en probabilité sur l'ensemble $(L_t > 0)$.

Exercice 1.26 (IL SERA FAIT EN TD) *En déduire que les trajectoires du brownien ne sont pas à variation bornée.*