Lecture Notes on STOCHASTIC CALCULUS

Ciprian TUDOR
Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1

October 26, 2007

MASTER M2: Mathématiques Appliquées à l'Economie et à la Finance

CHAPTER 3: The THEORY OF MARTINGALES

Attention: the proofs and the exercises are not yet translated.

1 CHAPITRE 3: Theory of martingales

1.1 Filtrations and Stopping Times

Definition 1.1 *Let τ be a random variable , $\tau : \Omega \to \bar{I\!R}^+$. Then$\tau$ is a stopping time with respect to $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, if $\forall t \in I\!R^+$ one has $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Exmmple 1.2 *Let X be a right- continuous process adapted to the filtration $\mathcal{F}_t$. If O is an open subset of $I\!R$, then: $\tau_O = inf\{t \geq 0 | X_t \in O\}$ is a stopping time with respect to the filtration $\mathcal{F}_{t^+}$*

Preuve: Pour tout $a \geq 0$, en utilisant de caractéristion de inf

$$\begin{aligned} \{\tau_O \leq a\} &= \{\omega : \forall \ n \ \exists \ t \in \mathbf{Q}^+, t \leq a + \frac{1}{n}, X_t \in O\} \\ &= \cap_n \{\omega : \exists t \in \mathbf{Q}^+, t \leq a + \frac{1}{n}, X_t \in O\} \\ &= \cap_n \cup_{t \in \mathbf{Q} \cap [0, a+\frac{1}{n}]} \{\omega | X_t(\omega) \in O\}. \end{aligned}$$

Or

$$\{\omega | X_t(\omega) \in O\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}}.$$

Mais

$$A_n := \cup_{t \in \mathbf{Q} \cap [0, a+\frac{1}{n}]} \{\omega | X_t(\omega \in O\} \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}}$$

et $\forall n \geq m : A_n \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}}$ d'où $\{\tau_O \leq a\} = \cap_{n \geq m} A_n \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}}$. En conséquence on obtient que

$$\{\tau_O \leq a\} \in \cap_m \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}} = \mathcal{F}_{a^+}.$$

Ceci étant vrai pour tout a, nous avons montré que τ_O est un $\mathcal{F}_{t^+}$ temps d'arrêt. ■

Exmmple 1.3 *If X is a continuous process continu, $\mathcal{F}_t$ adapted,and $A$is an closed subset of $I\!R$, then: $\tau_A(\omega) := \inf\{t | X_t(\omega) \in A\}$, with the convention $\inf \emptyset := \infty$, is a stopping time for $\mathcal{F}_t$.*

Preuve: Puisque A est fermé et X est continu, on a:

$$\{\omega | \tau_A(\omega) \leq t\} = \{\omega \inf_{0 \leq q \leq t} d(X_q(\omega), A) = 0, q \in \mathbf{Q}^+\}.$$

Or $d(x, A)$ est une fonction continue en x, donc mesurable sur $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$. $d(X_{q_n}(\omega), A)$ est alors $\mathcal{F}_t$-mesurable, par composition de fonctions mesurables et il s'ensuit que: $g := inf_{0 \leq q \leq t}\{d(X_q(\omega), A), q \in \mathbf{Q}^+\}$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable, comme infimum d'un nombre dénombrable de fonctions mesurables. Ainsi:

$$\{\tau_A \leq t\} = g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}_t.$$

τ_A est donc un temps d'arrêt. ■

Remark 1.4 *If the filtration is right-continuous, then clearly τ_O est τ_A are $\mathcal{F}_t$ stopping times.*

Exercice 1.5 *Montrez pourquoi $\tau(\omega) := \inf\{t|X_t = max_{s\geq 0} X_s\}$ n'est pas en général un temps d'arrêt sur la filtration naturelle de X.*

Definition 1.6 *If $\tau$is a $\mathcal{F}_t$ stopping time, we define*

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0 \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Exercice 1.7 *Show that $\mathcal{F}_\tau$ is a σ-algebra.*

Preuve: On a: $\emptyset \cap \{\tau \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$.

Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$. Montrons que $A^c \in \mathcal{F}_\tau$: En effet:

$$A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap (A \cap \{\tau \leq t\})^c \in \mathcal{F}_t$$

car $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_\tau$, alors $\forall n$ et $\forall t$ on a:

$$A_n \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \cup_n (A_n \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

donc

$$(\cup_n A_n) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et donc

$$\cup_n A_n \in \mathcal{F}_\tau.$$

Donc $\mathcal{F}_\tau$ est une σ-algèbre. ■

Theorem 1.8 *If τ and τ' are two $\mathcal{F}_t$ stopping times and if $\forall \omega \ \tau(\omega) \leq \tau'(\omega)$, then $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau'}$.*

Preuve: Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$ montrons que $A \in \mathcal{F}_{\tau'}$: Si $t \geq 0$, alors $\{\tau' \leq t\} \subset \{\tau \leq t\}$ donc

$$A \cap \{\tau' \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\}.$$

Puisque $A \in \mathcal{F}_\tau$, on a $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et, comme τ' est un temps d'arrêt, alors $\{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ d'où $A \cap \{\tau' \leq t\} = A \cap \{\tau' \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ donc $A \in \mathcal{F}_{\tau'}$. ■

Theorem 1.9 *If τ and τ' are $\mathcal{F}_t$ stopping times, then: $\tau \vee \tau = max(\tau, \tau')$ and $\tau \wedge \tau = min(\tau, \tau')$ are stopping times.*

Preuve: Soit $t \geq 0$, alors

$$\{\tau \vee \tau' \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

car

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et $\{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_t$ est une σ-algèbre.
Donc $\tau \vee \tau = max(\tau, \tau')$ est un temps d'arrêt.

De même,

$$\{\tau \wedge \tau' \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Donc $\tau \wedge \tau'$ est un temps d'arrêt. ■

Exercice 1.10 *Montrez que τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.*

Preuve: Ceci revient à montrer que $\forall a \geq 0 : \{\omega | \tau(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}_\tau$.
Soit $t \geq 0$, alors:

$$\{\tau \leq a\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq a \wedge t\} \in \mathcal{F}_{a \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$$

Ceci étant vrai pour tout t, il suit que $\{\tau \leq a\} \in \mathcal{F}_\tau$ ■

Exercice 1.11 *Montrer que si τ et τ' sont deux temps d'arrêt, alors $\tau + \tau'$ est un temps d'arrêt.*

Preuve: Utiliser la décomposition, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \{\tau + \tau' > t\} &= \{\tau = 0, \tau' > t\} \bigcup \{0 < \tau < t, \tau + \tau' > t\} \\ &\quad \bigcup \{\tau > t, \tau' = 0\} \bigcup \{\tau \geq t, \tau' > 0\}. \end{aligned}$$

Le premier, troisième et quatrième terme sont evidemment dans $\mathcal{F}_t$. Pour le deuxème, l'écrire comme

$$\bigcup_{r \in Q^+, 0 < r < t} \{t > \tau > r, \tau' > t - r\}.$$

■

Exercice 1.12 *Si $(\tau_n)_{n \geq 1}$ est une suite de temps d' arrêt pour une filtration continue à droite, alors*

$$\sup_{n \geq 1} \tau_n, \inf_{n \geq 1} \tau_n, \overline{\lim_{n \geq 1}} \tau_n, \underline{\lim_{n \geq 1}} \tau_n$$

sont des temps d'arrêt.

Preuve: Utiliser les indentités

$$\{\sup_n \tau_n\} = \bigcap_n \{\tau_n \geq t\}, \{\inf_n \tau_n < t\} = \bigcup_n \{\tau_n < t\}.$$

■

Progressively measurable stochastic processes

Let X be a stochastic process adapted to the filtration $\mathcal{F}_t$ on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and let τ be a $\mathcal{F}_t$-stopping time.

Remark 1.13 *Let us denote by X_τ the application $\omega \to X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$. The fact that X is adapted does not suffice to conclude that X_τ is a random variable . $\mathcal{F}$ measurable. The purpose of this paragraph is to introducea sufficient condition on X in order to have X_τ measurable.*

Definition 1.14 *A process X is progressively measurable if $\forall\, T \geq 0$*

$$X : (\Omega \times [0, T]) \to I\!R$$

is $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ measurable.

Remark 1.15 *It is obvious that a progressively measruable process X on $\mathcal{F}_t$ is in particular adapted to $\mathcal{F}_t$.*

Theorem 1.16 *If X is $\mathcal{F}_t$ progressively measurable, and if τ is a $\mathcal{F}_t$-stopping time, then X_τ is $\mathcal{F}_\tau$ measurable.*

Preuve: Il suffit de montrer que si $A \in \mathcal{B}_{I\!R}$, alors $X_\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}_\tau$ autrement dit, pour tout $t \geq 0$ fixé, $X_\tau^{-1}(A) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Or

$$\begin{aligned} X_\tau^{-1}(A) \cap \{\tau \leq t\} &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t \text{ et } X_\tau(\omega) \in A\} \\ &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t \text{ et } X_{\tau \wedge t}(\omega) \in A\} \\ &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t\} \cap X_{\tau \wedge t}^{-1}(A). \end{aligned}$$

Si τ est un temps d'arrêt, alors $\tau \wedge t$ est un temps d'arrêt plus petit que t et puisque $\tau \wedge t$ est $\mathcal{F}_{\tau \wedge t}$ mesurable, il est $\mathcal{F}_t$ mesurable. Posons

$$g : (\Omega, \mathcal{F}_t) \longrightarrow (\Omega \times [0, t], \mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}) : \omega \longmapsto g(\omega) := (\omega, \tau \wedge t(\omega)).$$

Puisque les deux composantes de g, ω et $\tau \wedge t(\omega)$ sont mesurables respectivement de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{F}_t$ et de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{B}_{[0,t]}$, g est mesurable de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}$. Considérons X comme une fonction mesurable sur $\Omega \times [0,t]$:

$$X : (\Omega \times [0,t], \mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}) \to (I\!R, \mathcal{B}_{I\!R}) : (\omega, s) \longmapsto X(\omega, s).$$

alors $X_{\tau \wedge t}$ est la composée des fonctions mesurables X et g:

$$X_\tau \wedge t = X \circ g$$

et est donc mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ vers $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$. Ainsi, $\forall A \in \mathcal{B}_{I\!R} : X^{-1}_{\tau \wedge t}(A) \in \mathcal{F}_t$. Puisque par ailleurs $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, on peut conclure que $X^{-1}_\tau(A) \in \mathcal{F}_\tau$. ■

Theorem 1.17 *If X is a continuous adapted to $\mathcal{F}_t$ stochastic process , then it is progressively measurable.*

Preuve: Soit

$$X^n_t(\omega) := X_{\frac{k}{n}}(\omega) \text{ si } \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}.$$

On montre que X^n_t est progressivement mesurable.

Soit T fixé si $t \leq T$ alors

$$X^n_t(\omega) = \sum_{k=0}^{k \leq nT} \mathbf{1}_{\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}} X_{\frac{k}{n}}(\omega)$$

or $X_{\frac{k}{n}}$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\mathbf{1}_{\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}}$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable donc $X_{\frac{k}{n}} \mathbf{1}_{\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}}$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable, il s'ensuit que $\sum_{k=0}^{k \leq nT} \mathbf{1}_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} X_{\frac{k}{n}}(\omega)$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable.
Par continuité de X on a: $\lim_{n \to \infty} X^n_t(\omega) = X_t(\omega)$ et, comme X^n_t est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable, X l'est également. Autrement dit X est progressivement mesurable. ■

Exercice 1.18 *Si τ est un temps d'arrêt, si X est un processus continu adapté si $X^\tau_t(\omega) = X_{\tau \wedge t}(\omega)$. Montrez que $X^\tau_t(\omega)$ est progressivement mesurable.*

Exercice 1.19 *(facultatif) Si X est un processus continu, tel que $X_0 = 0$, et si $0 < a < b$ que peut on dire de $X_{\tau_{[a,b]}}(\omega)$ pour les ω tels que $\tau_{[a,b]}(\omega) < \infty$?*

Si X est un mouvement brownien, montez que $P(\tau_{[a,b]}(\omega) < \infty) = 1$.

Exercice 1.20 *(facultatif) Si X est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien, et $a > 0$, et $X^*_s(\omega) := \sup_{t \in [0,s]} X_t(\omega)$,*

a) montrez que X^*_1 est $\mathcal{F}_1$-mesurable.

b) montrez que $\{\tau_{\{a\}} \leq s\} = \{X^*_s \geq a\}$.

c) montrez que X^*_s à la même loi que $\sqrt{s} X^*_1$ et que $\tau_{\{a\}}$ a la même loi que $a^2/(X^*_1)^2$.

d) montrez que $\tau_1 := \inf\{t | X_t = X^*_1\}$ et $\tau_2 := \sup\{t \leq 1 | X_t = 0\}$ ne sont pas des temps d'arrêt.

1.2 Martingales: Definition et properties

Definition 1.21 *A martingale with respect to the filtration $\mathcal{F}_t$ $t \in T$ (T discrete or continuous)is an adapted process such that*

1. $\forall t \in T$, $X_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$
2. $\forall t, s \in T$, $t \geq s$ $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *a.s.*

Exmmple 1.22 *If $Y \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_\infty)$ we set $X_t = E(Y|\mathcal{F}_t)$ then X_t is a martingale.*

Preuve: En effet, si $s > t$, on a $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ donc:

$$E(X_s|\mathcal{F}_t) = E[E(Y|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t] = E(Y|\mathcal{F}_t) = X_t$$

■

Definition 1.23 *A sub-martingale (respectively super-martingale) on the filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ is a $\mathcal{F}_t$ -adapted process such that*

1. $\forall t \in T$ $X_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$
2. $\forall t, s \in T$ $t > s$ $E[X_t|F_s] \geq X_s$ *(respectively $E[X_s|F_t] \leq X_t$).*

Exmmple 1.24 *If B_t is a $\mathcal{F}_t$ Brownian motion, then*

1. *B_t is a martingale .*
2. *$X_t = {B_t}^2 - t$ is also a martingale.*
3. *if $\alpha \in I\!R$ then $M_t^\alpha = exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)$ is also a martingale.*

Preuve:

1. On sait que $B_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$ on a:

$$E(B_s|\mathcal{F}_t) = E[B_t + (B_s - B_t)|\mathcal{F}_t] = B_t + E(B_s - B_t)$$

car $B_s - B_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ et comme $B_s - B_t$ suit une loi normale de moyenne nulle alors $E(B_s|\mathcal{F}_t)$=B_t. Donc B_t est une martingale.

2. On sait que $X_t = {B_t}^2 - t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$

$$\begin{aligned}
E(X_s|\mathcal{F}_t) &= E({B_s}^2|\mathcal{F}_t) - s \\
&= E[(B_t + (B_s - B_t))^2|\mathcal{F}_t] - s \\
&= E[B_t^2|\mathcal{F}_t] + E[(B_s - B_t)^2|\mathcal{F}_t] + 2E[B_t(B_s - B_t)|\mathcal{F}_t] - s \\
&= B_t^2 + E[(B_s - B_t)^2] + 2B_tE[B_s - B_t] - s \\
&= B_t^2 + s - t + 0 - s = B_t^2 - t = X_t.
\end{aligned}$$

Donc X_t est une martingale.

3. Il est évident que $M_t^\alpha \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$ on a:

$$\begin{aligned}
E(M_s^\alpha|\mathcal{F}_t) &= E[\exp(\alpha B_t)|\mathcal{F}_t]\exp(\frac{-\alpha^2}{2}s) \\
&= E[\exp(\alpha[B_t + (B_s - B_t)])|\mathcal{F}_t]\exp(\frac{-\alpha^2}{2}s) \\
&= E[\exp(\alpha(B_s - B_t))|\mathcal{F}_t]\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= E[\exp(\alpha\sqrt{s-t}Z)]\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= \psi_Z(-\alpha\sqrt{s-t})\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= \exp(\frac{-(\alpha\sqrt{s-t})^2}{2})\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= \exp(\frac{\alpha^2(s-t)}{2})\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t) = M_t^\alpha
\end{aligned}$$

oú par ψ on a noté la fonction caractéristique. Donc M_t^α est une martingale. ■

Exmmple 1.25 *(the Poisson process)* A Poisson process with intensity $\lambda > 0$*is an adapted cadlag process* $(N_t)_{t\geq 0}$ *such that* $N_0 = 0$ *a.s. and for every* $0 \leq s \leq t$, $N_t - N_s$ *is independent of* $\mathcal{F}_s$ *and it has the Poisson distribution with parameter* $\lambda(t-s)$. The compensated Poisson process *is defined by, for every* $t \geq 0$

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

Show that $\tilde{N}$ *is a martingale.*

Theorem 1.26 *1. If* X *is a martingale and* ϕ *a continuous convex function such that* $\forall t,\ \phi(X_t) \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$*then* $\phi(X_t)$ *is a sub- martingale.*

2. If X *is a sub-martingale and if* ϕ *is a increasing continuous convex function such that* $\forall t,\ \phi(X_t) \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ *then* $\phi(X_t)$ *is a sub-martingale.*

Preuve:

1. D'après l'inégalité de Jensen on a pour $s > t$ $E[\phi(X_s)|\mathcal{F}_t] \geq \phi[E(X_s|\mathcal{F}_t)] = \phi(X_t)$.

2. Si $s > t$ $E[\phi(X_s)|\mathcal{F}_t] \geq \phi[E(X_s|\mathcal{F}_t)] \geq \phi(X_t)$ car X est une sous martingale et ϕ est croissante. ■

Exmmple 1.27 *If X_t is a martingale then $Y_t = |X_t|^p$ is a sub- martingale $\forall p \geq 1$*

Preuve: En effet, la fonction $x \mapsto |x|^p$ est une fonction convexe continue. ■

Nous allons ensuite considérer les martingales discrètes.

Theorem 1.28 *If H is a bounded process adapted to $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ and X a $\mathcal{F}_n$ martingale, then the process Y defined recurrently by $Y_0 = 0$ and $Y_{n+1} = Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)$ is a martingale.*

Preuve: Puisque X_n est une martingale et H_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a:

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= Y_n + H_n[E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n] \\ &= Y_n \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E[Y_{n+k}|\mathcal{F}_n] &= E[E(Y_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k-1})|\mathcal{F}_n] \\ &= E[Y_{n+k-1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \cdots \\ &= E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= Y_n \end{aligned}$$

■

Remark 1.29 *If we denote by $\Delta(X_n)$ the increment $(X_{n+1} - X_n)$ of the process X, then Y_n can be formally written asx $Y_n = Y_0 + \sum_{t=0}^{n-1} H_t\Delta(X_t)$.This is discrete time version of the stochastic integral $Y_t = Y_0 + \int H_t dB_t$ which will be introduced in the next chapter.*

Theorem 1.30 *If H is a bounded process adapted to $\mathcal{F}_n$ and positive and if X is a $\mathcal{F}_n$ sub-martingale,then the process Y defined by $Y_0 = 0$ et Y_{n+1}= $Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)$is a sub-martingale.*

Exercice 1.31 *Démontrer ce résultat en suivant la preuve du théorème précédent.*

Theorem 1.32 *(stopping theorem): If X_n is a $\mathcal{F}_n$-martingale, and $\tau \leq \sigma$ are two bounded stopping times then $E(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau)$=$X_\tau$.*

Preuve: Supposons que σest borné par $M > 0$: $|\sigma(\omega)| \leq M$. Il suffit de montrer que

$$E\left(X_\tau - X_\sigma\right) 1_B = 0$$

si $B \in \mathcal{F}_\tau$. Posons

$$H_n = \mathbf{1}_{\{\tau \leq n < \sigma\}} \mathbf{1}_B$$

alors H_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable car $B \cap \{\tau \leq n < \sigma\} = B \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$.

Soit

$$Y_M = 0 + \sum_{n=0}^{n=M-1} H_n(X_{n+1} - X_n).$$

On va prouver que

$$Y_M = 1_B(X_\tau - X_\sigma).$$

Alors

$$Y_M = -H_0X_0 + (H_0 - H_1)X_1 + (H_1 - H_2)X_2 + \cdots + H_{M-1}X_M.$$

Posons $H_n^\sigma = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{n<\sigma\}}$ et $H_n^\tau = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{n<\tau\}}$ de sorte que $H_n = H_n^\sigma - H_n^\tau$. Ainsi, on peut écrire:

$$\begin{aligned} Y_M &= (\mathbf{1}_B - H_0^\sigma)X_0 + (H_0^\sigma - H_1^\sigma)X_1 + \cdots + H_{M-1}^\sigma X_M \\ &\quad -(\mathbf{1}_B - H_0^\tau)X_0 - (H_0^\tau - H_1^\tau)X_1 - \cdots - H_{M-1}^\tau X_M. \end{aligned}$$

Or

$$(H_n^\sigma - H_{n+1}^\sigma) = \mathbf{1}_B(\mathbf{1}_{\{\sigma>n\}} - \mathbf{1}_{\{\sigma>n+1\}}) = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{n+1\geq\sigma>n\}} = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{\sigma=n+1\}}.$$

On montre aussi que $\mathbf{1}_B - H_0^\sigma$= $\mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_{\{\sigma>0\}})$=$\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{\sigma=0\}}$. Ainsi:

$$Y_M = (\sum_{n=0}^{n=M} X_n\mathbf{1}_{\{\sigma=n\}})\mathbf{1}_B - (\sum_{n=0}^{n=M} X_n\mathbf{1}_{\{\tau=n\}})\mathbf{1}_B = (X_\sigma - X_\tau)\mathbf{1}_B$$

et puisque Y_M est une martingale:

$$E(Y_M) = E[E(Y_M|\mathcal{F}_0)] = E(Y_0) = 0.$$

Donc $\forall B \in \mathcal{F}_\tau : E[\mathbf{1}_B(X_\sigma - X_\tau)] = 0$ et nous concluons: $E(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau)$=$X_\tau$. ∎

Remark 1.33 *We have the same result for sub-martingales.*

1.3 Doob's inequalities and consequences

We will fist study the discrete case.

Theorem 1.34 *(maximale inequality)*

If $\{X_n\}_{n=0,\ldots,N}$ is a $\mathcal{F}_n$ sub- martingale then $\forall\ \lambda > 0$

$$\lambda \cdot P(\max(X_0, X_1, \ldots, X_N) \geq \lambda) \leq E[X_N\mathbf{1}_{\{\max(X_0,X_1,\ldots,X_N)\geq\lambda\}}]$$

Preuve: Posons $\tau_\lambda := \min\{n|X_n \geq \lambda\}$ avec $\min\emptyset := N$. Alors τ_λ est un temps d'arrêt. Puisque X est une sous-martingale, il suit du théorème d'arrêt que $X_{\tau_\lambda} \leq E[X_N|F_{\tau_\lambda}]$. Donc

$$\begin{aligned} E[X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}>\lambda\}}] &\leq E[\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}E[X_N|F_{\tau_\lambda}]] \\ &= E[X_N\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}] \end{aligned}$$

car $\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}$ est $\mathcal{F}_{\tau_\lambda}$ mesurable. Lorsque $\max\{X_n\} \geq \lambda$, on a par définition de τ_λ: $X_{\tau_\lambda} \geq \lambda$. Ainsi, $X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}} \geq \lambda\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}$ et donc

$$\lambda P(\max\{X_n\} > \lambda) \leq E[X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}] \leq E[X_N\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}]$$

■

Corollary 1.35 *If X_n is a martingale in L^p for $p \geq 1$ and $X^* := \max(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_N|)$, then we have :*

$$\lambda^p P(X^* \geq \lambda) \leq E[|X_N|^p].$$

Preuve: Soit X_n une martingale alors $Y_n = |X_n|^p$ est une sous-martingale à laquelle nous pouvons appliquer le théorème précédent:

$$\lambda^p P(max(Y_1, \ldots, Y_N) \geq \lambda^p) \leq E[Y_N\mathbf{1}_{\{max(Y_1,\ldots,Y_N)\geq\lambda^p\}}] \leq E(Y_N).$$

Puisque $X^{*p} = max(Y_1, \ldots, Y_N)$ et $|X_N|^p = Y_N$, nous avons donc

$$\lambda^p P(X^* \geq \lambda) = \lambda^p P(X^{*p} \geq \lambda^p) \leq E[|X_N^p|].$$

■

Theorem 1.36 *(Inégalité de Doob): $\forall p > 1$, si $\{X_n\}_{n=1,\ldots,N}$ est une martingale dans L^p alors :*

$$E[|X_N|^p] \leq E[X^{*p}] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_N|^p]$$

avec $X^* := max(|X_1|, \ldots, |X_N|)$.

Preuve: On a $|X_N|^p \leq X^{*p}$ d'où $E[|X_N|^p] \leq E[X^{*p}]$. D'autre part d'après l'inégalité maximale on a: $E[|X_N|\mathbf{1}_{X^*>\lambda}] \geq \lambda E[\mathbf{1}_{X^*>\lambda}]$. En multipliant ceci par λ^{p-2} et en intégrant sur $[0, k]$, nous obtennons:

$$\int_0^k E[|X_N|\mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-2}]d\lambda \geq \int_0^k E[\mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-1}]d\lambda$$

Par le théorème de Fubini, on a:

$$\begin{aligned} E[|X_N|\tfrac{(k\wedge X^*)^{p-1}}{p-1}] &= E[|X_N|\textstyle\int_0^k \mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-2}\, d\lambda] \\ &\geq E[\textstyle\int_0^k \mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-1}d\lambda] \\ &= E[\tfrac{(k\wedge X^*)^p}{p}] \end{aligned}$$

Enfin si q est le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on a avec l'inégalité de Hölder:

$$E[|X_N|(k \wedge X^*)^{p-1}] \leq (E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(E[(k \wedge X^*)^{(p-1)q}]\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Puisque $(p-1)q = p$, nous avons donc

$$(E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \cdot (E[(k \wedge X^*)^p])^{\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{p-1} E[(k \wedge X^*)^p],$$

ce qui donne après simplification:

$$(E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \geq \frac{p}{p-1} \cdot (E[(k \wedge X^*)^p])^{\frac{1}{p}},$$

Comme $(k \wedge X^*)^p \nearrow (X^*)^p$ lorsque $k \to +\infty$ on obtient par le théorème de la convergence monotone:

$$E[(X^*)^p] = \lim_{k \to \infty} E[(k \wedge X^*)^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_N|^p]$$

■

Next we prove the Doob's inequality in continuous time. Let us consider the filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ on the space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definition 1.37 *We denote by $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ the set of $\{\mathcal{F}_t\}$-martingales X with continuous paths such that $\|X\|_{L^p} < \infty$, where*

$$\|X\|_{L^p} := \sup_{t>0} \|X_t\|_{L^p}.$$

If $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, we will denote by $\|X\|_{M^p} := \|X^*_\infty\|_{L^p}$, où

$$X^*_t(\omega) := \sup\{|X_s(\omega)| : s \in [0,t]\}.$$

Exercice 1.38 *Montrez que, si $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, alors l'application $t \to \|X_t\|_{L^p}$ est croissante. En particulier $\|X\|_{L^p} = \lim_{t\to\infty} \|X_t\|_{L^p}$.*

Exercice 1.39 *Montrez que, si $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, alors X^*_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Exercice 1.40 *Montrez que $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ est un espace vectoriel réel et que $\|.\|_{L^p}$ est une seminorme sur $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$. Montrez que $\|X\|_{L^p} = 0$ est equivalent à dire que X est une modification de 0: $X \overset{modif}{\equiv} 0$.*

Remark 1.41 *(Remind) If X and Y are continuous processes then $X \overset{modif}{\equiv} Y$ if and only if X and Y are indistinguishables.*

Since $(\mathcal{L}^p, \|.\|_{L^p})$ is not a normed vector spaces we considered L^p the set of equivalence classes in $\mathcal{L}^p$ for the equivalence relation $= P - a.s.$ In the same way, we introduce the space $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$ of equivalence classes in $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$for the relation $\overset{\text{modif}}{\equiv}$.

Exercice 1.42 *Montrez que $(M^p(\{\mathcal{F}_t\}), \|.\|_{L^p})$ est un espace vectoriel normé.*

Theorem 1.43 *(Doob's inequality in continuous time)): $\forall p > 1$, if $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, then*

$$\|X\|_{L^p} \leq \|X\|_{M^p} \leq \frac{p}{p-1}\|X\|_{L^p}.$$

In other words, $\|.\|_{L^p}$ et $\|.\|_{M^p}$ are equivalent norms on $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$.

Preuve: Soit $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ et soit $\{D_n\}_{n\in I\!N}$ une suite croissante d'ensembles finis dont l'union est $\mathbb{Q}^+$. Soit $t_n := \max D_n$ et

$$X^*_{D_n}(\omega) := \max\{|X_t(\omega)| : t \in D_n\}.$$

Il est alors clair que $t_n \nearrow \infty$. Par ailleurs, puisque les trajectoires de X sont continues, $X^*_\infty = \sup\{|X_t| : t \in \mathbb{Q}^+\}$, et donc $X^*_{D_n} \nearrow X^*_\infty$. Le théorème 1.36 nous indique alors que

$$\|X_{t_n}\|_{L^p} \leq \|X^*_{D_n}\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|X_{t_n}\|_{L^p}.$$

Or, il suit de l'exercice 1.38 que $\|X\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|X_{t_n}\|_{L^p}$ et par convergence monotone: $\|X\|_{M^p} = \|X^*_\infty\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|X^*_{D_n}\|_{L^p}$. Le théorème est donc démontré. ■

The following corollary plays a crucial role in the construction of the Itô integral.

Corollary 1.44 *If $\{\mathcal{F}_t\}$ is a complete filtration then for every $p > 1$, the space $(M^p(\{\mathcal{F}_t\}), \|.\|_{L^p})$ is a Banach space.*

Preuve: Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy $\{X^n\}_{n\in I\!N}$ dans $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$ admet une limite X dans $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$. Considérons une telle suite $\{X^n\}_{n\in I\!N}$.
1) Nous allons construire un processus X limite:

Par le théorème précédent, $\{X^n\}_{n\in I\!N}$ est également une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_{M^p}$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) : \forall m, n \geq N(\epsilon) : \|X^n - X^m\|^p_{M^p} \leq \epsilon$$

Fixons $n_1 := N(2^{-(p+1)})$, et par récurrence

$$n_{k+1} := \max(N(2^{-(p+1)(k+1)}), 1 + n_k).$$

La suite n_k est alors strictement croissante et, puisque $n_{k+1} > n_k \geq N(2^{-(p+1)(k)})$, la sous-suite $\{X^{n_k}\}_{k\in I\!N}$ vérifie

$$\forall k : \|X^{n_{k+1}} - X^{n_k}\|^p_{M^p} \leq 2^{-(p+1)(k)}.$$

Soit $A := \{\omega \in \Omega : \exists L : \forall k \geq L : \|X^{n_{k+1}}_.(\omega) - X^{n_k}_.(\omega)\|_\infty \leq 2^{-k}\}$ où, pour une fonction $f(.) : [0, \infty[\to I\!R$, $\|f(.)\|_\infty := \sup_{t\in[0,\infty[} |f(t)|$.

Remarquons que si $\omega \in A$, alors les trajectoires $X^{n_k}_{\cdot}(\omega)$ forment une suite de Cauchy dans l'espace $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$ des fonctions continues sur $[0,\infty[$. En effet, si $k' \geq k$,

$$\|X^{n_{k'}}_{\cdot}(\omega) - X^{n_k}_{\cdot}(\omega)\|_\infty \leq \sum_{j=k}^{k'-1} \|X^{n_{j+1}}_{\cdot}(\omega) - X^{n_j}_{\cdot}(\omega)\|_\infty \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

L'espace $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$ étant complet, la suite de trajectoires $X^{n_k}_{\cdot}(\omega)$ converge donc au sens de la norme $\|.\|_\infty$ vers une fonction continue $X_{\cdot}(\omega)$.

Convenons de définir $X_{\cdot}(\omega) := 0$ lorsque $\omega \notin A$. Le processus X ainsi construit a toutes ses trajectoires continues.

2) Montrons à présent que $P(A) = 1$:

En effet, si l'on pose $Y^k := X^{n_{k+1}} - X^{n_k}$,

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \forall L : \exists k \geq L : \|Y^k_{\cdot}(\omega)\|_\infty > 2^{-k}\} = \cap_L \cup_{k\geq L} A^k,$$

où $A^k := \{\omega \in \Omega : \|Y^k_{\cdot}(\omega)\|_\infty > 2^{-k}\}$. Ainsi, $\forall L$,

$$P(A^c) \leq P(\cup_{k\geq L} A^k) \leq \sum_{j=L}^{\infty} P(A^k).$$

Or $\|Y^k_{\cdot}(\omega)\|_\infty = Y^{k*}_\infty(\omega)$ où la notation Y^{k*} a été introduite à la définition 1.37. Il résulte de l'inégalité de Chebichev que $P(A^k)2^{-kp} \leq \|Y^{k*}_\infty\|^p_{L^p}$ et la définition de la sous suite X^{n_k} indique que $\|Y^{k*}_\infty\|^p_{L^p} = \|Y^k\|^p_{M^p} \leq 2^{-(p+1)k}$. Aussi $P(A^k) \leq 2^{-k}$ et donc

$$P(A^c) \leq \sum_{k=L}^{\infty} 2^{-k} \stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dès lors $P(A^c) = 0$.

3) Montrons que X est $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté: $P(A^c) = 0$ implique en effet $A^c \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0$ puisque $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration complète. Aussi le processus $\mathbf{1}_A(\omega)X^{n_k}_t(\omega)$ est-il $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté. Or nous avons montré que $\mathbf{1}_A(\omega)X^{n_k}_t(\omega)$ converge vers $X_t(\omega)$. La limite ponctuelle préservant la mesurabilité, X_t est donc bien $\mathcal{F}_t$-mesurable.

4) Montrons ensuite que X est une $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale: Puisque $\|X^n_t - X^m_t\|_{L^p} \leq \|X^n - X^m\|_{L^p}$, la suite des variables aléatoires X^n_t est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathcal{F}_t)$. Puisqu'il s'agit d'un espace complet, X^n_t est donc une suite convergente au sens L^p. Puisqu'une sous suite $X^{n_k}_t$ converge P-pp (sur A) vers X_t, nous avons montré que X^n_t converge vers X au sens L^p. Puisque l'espérance conditionnelle est un opérateur continu pour la norme L^p, nous avons si $s > t$:

$$E[X_s|\mathcal{F}_t] = E[\lim_{n\to\infty} X^n_s|\mathcal{F}_t] = \lim_{n\to\infty} E[X^n_s|\mathcal{F}_t] = \lim_{n\to\infty} X^n_t = X_t$$

5) Montrons finalement que X^n converge vers X au sens $\|.\|_{L^p}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe N tel que, si $m, n \geq N$, alors $\|X^n - X^m\|_{L^p} \leq \epsilon$. Il s'ensuit que, si $n \geq N$,

$$\|X_t - X^n_t\|_{L^p} = \lim_{m\to\infty} \|X^m_t - X^n_t\|_{L^p} \leq \lim_{m\to\infty} \|X^n - X^m\|_{L^p} \leq \epsilon.$$

Donc $\|X - X^n\|_{L^p} = \sup_{t\geq 0} \|X_t - X_t^n\|_{L^p} \leq \epsilon$. Ce qui précède étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, nous avons montré que $\lim_{n\to\infty} \|X - X^n\|_{L^p} = 0$. ■

Corollary 1.45 *If $X \in M^2(\{\mathcal{F}_t\})$, then there exists a random variable $X_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ such that $X_t \xrightarrow{L^2} X_\infty$ and $X_t \xrightarrow{P\text{-}pp} X_\infty$ when $t \to \infty$.In particular, $\forall t : X_t = E[X_\infty|\mathcal{F}_t]$ and $\|X\|_{L^2} = \|X_\infty\|_{L^2}$.*

Preuve: On montre que, pour toute suite $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers ∞, la suite $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $L^2(\mathcal{F}_t)$ (remarquons que toutes ces suites ont alors une limite identique, sans quoi il existerait une suite sans limite!). L^2 étant complet, il suffit donc de montrer que $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Si $t_m \geq t_n$, X_{t_n} est la projection orthogonale de X_{t_m} sur $L^2(\mathcal{F}_{t_n})$, X étant une martingale. Nous avons dès lors l'identité de Pythagore:

$$\|X_{t_m} - X_{t_n}\|_{L^2}^2 = \|X_{t_m}\|_{L^2}^2 - \|X_{t_n}\|_{L^2}^2$$

La fonction $t \to \|X_t\|_{L^2}^2$ est croissante et converge vers $\|X\|_{L^2}^2$, aussi la suite $\{\|X_{t_n}\|_{L^2}^2\}$ est elle de Cauchy et il en est de même de $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$: $\|X_{t_m} - X_{t_n}\|_{L^2}^2 \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc il existe $X_\infty \in L^2$ qui est la limite de toutes les suites $\{X_{t_n}\}$. Il est clair que $X_t \to_{t\to\infty} X_\infty$ in L^2.

De la convergence L^2 de X_t vers la limite commune X_∞ de toutes les suites $\{X_{t_n}\}$, suit immédiatement que $\|X\|_{L^2} = \lim_{t\to\infty} \|X_t\|_{L^2} = \|X_\infty\|_{L^2}$ et, par continuité de l'opérateur $E[.|\mathcal{F}_t]$ par rapport à la norme L^2, il suit aussi que

$$E[X_\infty|\mathcal{F}_t] = \lim_{s\to\infty} E[X_s|\mathcal{F}_t] = X_t.$$

Il nous reste à démontrer la convergence P-pp de X_t vers X_∞. Considérons donc une suite $\{X_{t_n}\}$ convergeant dans L^2 vers X_∞. Quitte à en extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{X_{t_n}\}$ converge également P-pp. Appliquons à présent l'inégalité de Doob à la martingale $(Y_s^n)_{s\geq t_n}$, où $Y_s^n := X_s - X_{t_n}$:

$$\|\sup_{s\geq t_n} |Y_s^n|\|_{L^2} \leq 2\|Y^n\|_{L^2} = 2\|Y_\infty^n\|_{L^2} = 2\|X_\infty - X_{t_n}\|_{L^2}$$

Aussi, les variables $\sup_{s\geq t_n} |Y_s^n|$ tendent-elles vers 0 dans L^2, et par extraction de sous-suite, nous pouvons considérer qu'elles tendent vers 0 P-pp. Si $t \geq t_n$, nous avons:

$$|X_t - X_\infty| \leq |X_t - X_{t_n}| + |X_{t_n} - X_\infty| \leq \sup_{s\geq t_n} |Y_s^n| + |X_{t_n} - X_\infty|$$

Puisque les deux termes du membre de droite de cette inégalité tendent P-pp vers 0, nous avons comme annoncé la convergence P-pp de X_t vers X_∞. ■

Remark 1.46 *We call sometimes the random variable X_∞* as the last element of the martingale X.

1.4 Uniform integrability and martingale convergence theorems

Definition 1.47 *A family $\mathcal{G} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is uniformly integrable (we denote U.I.) if*

$$\lim_{c\to\infty} \left(\sup_{X\in\mathcal{G}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] \right) = 0.$$

We give examples of families which are U.I.

Exercice 1.48 *If $g \in \mathbf{L^1}$ show that the family $\mathcal{G} := \{g\}$ is U.I.*

Preuve: On a $|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}} \leq |g| \ \in \mathbf{L^1}$ et $\lim_{c\to\infty} |g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}} = 0$. Par le théorème de la convergence dominée on a donc:

$$\lim_{c\to\infty} E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] = 0.$$

$\mathcal{G}$ est donc une famille U.I. ∎

Exercice 1.49 *Show that if $\mathcal{G}$ is U.I and if $g \in \mathbf{L^1}$ then $\mathcal{G} \cup \{g\}$ is U.I. In particular the finite families in L^1 are U.I.*

Preuve: On a:

$$\sup_{X\in\mathcal{G}\cup\{g\}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] \leq \sup_{X\in\mathcal{G}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] + E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}]$$

or $\{g\}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles uniformément intégrables donc les deux termes du membre de droite tendent vers 0 lorsque c tend vers ∞. Ainsi

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{G}\cup\{g\}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] = 0.$$

∎

Exercice 1.50 *Show that if $\mathcal{G}$ is bounded in $L^p(\mathcal{F})$ $(p > 1)$ then $\mathcal{G}$ is U.I.*

Preuve: Soit $M < \infty$ tel que $\forall g \in \mathcal{G}$: $E[g^p] \leq M$. Par application de l'inégalité de Hölder, avec q tel que $1/p + 1/q = 1$, on a $\forall g \in \mathcal{G}$:

$$E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq (E[|g|^p])^{1/p}(E[\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}])^{1/q} \leq M^{1/p}(P(\{|g| > c\}))^{1/q}.$$

Par l'inégalité de Chebichev, on a également $P(\{|g| > c\})c^p \leq E[|g|^p] \leq M$. Aussi $E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq \frac{M^{1/p}M^{1/q}}{c^{p/q}} = \frac{M}{c^{p/q}}$.

On obtient

$$\sup_{g\in\mathcal{G}} E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq \frac{M}{c^{p/q}} \stackrel{c\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

∎

We give a characterization of the uniform integrability property.

Theorem 1.51 *$\mathcal{G}$ is U.I if and only if $\mathcal{G}$ satisfies the conditions:*

1. *$\mathcal{G}$ is bounded in $\mathbf{L^1}$: $\exists M < \infty : \forall g \in \mathcal{G}, E[|g|] \leq M$.*
2. *$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0$ such that, $\forall A \in \mathcal{F}$, if $P(A) < \delta$ then $\forall g \in \mathcal{G}$ $E[|g|\mathbf{1}_A] \leq \epsilon$.*

Preuve: Supposons 1) et 2) vraies. Alors par Chebichev, $\forall f \in \mathcal{G} : M \geq cP(|f| > c)$. Soit $\epsilon > 0$ et considérons le δ correspondant de 2). Si $c > \frac{M}{\delta}$ alors $\forall f \in \mathcal{G} : P(|f| > c) < \frac{M}{c} < \delta$ donc d'après la propriété 2) on a: $E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \epsilon$. Ainsi $\sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \epsilon$. Nous avons donc montré que

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] = 0.$$

Inversement supposons $\mathcal{G}$ U.I alors $\exists c : \forall f \in \mathcal{G}$:

$$\sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq 1.$$

Or

$$E[|f|] = E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] + E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|\leq c\}}] \leq 1 + c.$$

Ainsi 1) est vraie, avec $M = 1 + c$.

Soit $\epsilon > 0$ alors $\exists c$ tel que $\forall f \in \mathcal{G} : E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \frac{\epsilon}{2}$. Posons $\delta := \frac{\epsilon}{2c}$ et soit $A \in \mathcal{F}$ telque $P(A) \leq \delta$. Alors:

$$E[|f|\mathbf{1}_A] \leq E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] + E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|\leq c\}\cap A}] \leq \frac{\epsilon}{2} + c \cdot P(A) \leq \epsilon.$$

La propriété 2) est donc aussi vérifiée. ■

Theorem 1.52 *Let $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of random variables in $\mathbf{L^1}(\mathcal{F})$ such that $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-a.e. Then the sequence X_n converges to X in the $\mathbf{L^1}$ sense if and only if $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is U.I*

Preuve: Si $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ dans $\mathbf{L^1}$ alors $\{X_n\}$ est bornée dans $\mathbf{L^1}$ et de plus $X \in \mathbf{L^1}$ donc $\{X_n\} \cup \{X\}$ est borné dans $\mathbf{L^1}$.
Soit $\epsilon > 0$ alors $\exists N$ tel que $\forall n \geq N, E[|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{2}$.

La famille finie $\mathcal{G} = \{X_0, X_1, \ldots, X_N, X\}$ est U.I. Donc $\exists \delta > 0$ tel que

$$P(A) < \delta \Rightarrow E[|X_n|\mathbf{1}_A] < \frac{\epsilon}{2} \;\; si \;\; n = 0, \ldots, N \; et \;\; E[|X|\mathbf{1}_A] < \frac{\epsilon}{2}.$$

Montrons que pour tout n: $E[|X_n|\mathbf{1}_A] \leq \epsilon$. Cette relation est évidente si $n \leq N$. De même, si $n > N$, on a:

$$\begin{aligned} E[|X_n|\mathbf{1}_A] &\leq E[|X_n - X|\mathbf{1}_A] + E[|X|\mathbf{1}_A] \\ &\leq E[|X_n - X|] + E[|X|\mathbf{1}_A] \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

La famille $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ est donc U.I.

Montrons à présent que, si la suite $\{X_n\}$ est U.I., alors elle converge dans $\mathbf{L^1}$: $\{X_n\}$ est une suite bornée dans $\mathbf{L^1}$: $\exists M$ tel que $E[|X_n|] \leq M$. Soit $g_m := inf_{n\geq m}|X_n|$. Alors g_m forme une suite croissante de v.a. et, puisque X_n converge vers X P-pp, on a:

$$\lim_{m\to\infty} g_m = \liminf |X_n| = |X|.$$

Par le théorème de la convergence monotone $E[g_m] \nearrow E[|X|]$ et comme $g_m \leq |X_m|$, il suit: $E[g_m] \leq E[|X_m|] \leq M$ donc $E[|X|] \leq M$ d'où $X \in \mathbf{L^1}$. Ainsi $\{X_n\} \cup \{X\}$ est U.I. et par 2) on a: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) < \delta \Rightarrow \forall n : E[|X_n|\mathbf{1}_A] \leq \frac{\epsilon}{3}$ et $E[|X|\mathbf{1}_A] \leq \frac{\epsilon}{3}$.
Soit $c := \frac{2M}{\delta}$. Alors la suite $\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|$ converge P-pp vers 0 et est bornée par $2c$. Donc par le théorème de la convergence dominée elle converge dans $\mathbf{L^1}$ vers 0 d'où $\exists N : \forall n \geq N$:

$$E[\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Si $n \geq N$, alors

$$E[|X_n - X|] \leq E[\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|] + E[|X_n|\mathbf{1}_A] + E[|X|\mathbf{1}_A],$$

où $A := \{|X_n| \geq c\} \cup \{|X| \geq c\}$. Puisque $P(A) \leq P(|X_n| \geq c) + P(|X| \geq c) \leq \frac{2M}{c} = \delta$, il suit que $E[|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Nous avons donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|] = 0.$$

■

Exmmple 1.53 *If $\{\mathcal{G}_s\}_{s\in S} \subset \mathcal{F}$ is a family of σ -algebras and if $X \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F})$, show that the family $\{E[X|\mathcal{G}_s]\}_{s\in S}$ is U.I.*

Preuve: Soit $X_s := E[X|\mathcal{G}_s]$.

L'inégalité de Jensen nous indique que $|X_s| \leq E[|X||\mathcal{G}_s]$. Aussi, puisque $\{|X_s| > c\} \in \mathcal{G}_s$, il suit que $E[|X_s|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq E[|X|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}]$. Puisque $\{X\}$ est U.I., par la caractérisation donnée par Th. 1.51

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : P(A) < \delta \Rightarrow E[|X|\mathbf{1}_A] < \epsilon.$$

Posons

$$A = \{|X_s| > c\}.$$

Si $c > E[|X|]/\delta$, alors $\forall s \in S$:

$$P(A) = P(\{|X_s| > c\}) \leq E[|X_s|]/c \leq E[|X|]/c < \delta,$$

et donc $E[|X_s|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq E[|X|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq \epsilon$. La famille $\{X_s\}_{s\in S}$ est donc U.I. ■

Theorem 1.54 *(stopping theorem): If X is a continuous martingale ,and if τ is a bounded stopping time ($\exists M\ \forall\omega$, $\tau(\omega) \le M$) , then:*

$$X_\tau = E[X_M|\mathcal{F}_\tau] \tag{1}$$

In particular : if $\tau \le \sigma$ are two stopping time and if σ is bounded, then

$$X_\tau = E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau].$$

Preuve: Par le théorème d'arrêt 1.32, la relation (1) est vraie si τ prend un nombre fini de valeurs.

Si τ est un temps d'arrêt général, posons $\tau_n(\omega) := k\frac{M}{n}$ lorsque $\frac{M(k-1)}{n} < \tau(\omega) \le \frac{Mk}{n}$ pour $k \in I\!N$.

Montrons que τ_n est un également temps d'arrêt: Soit $t \ge 0$ et soit k^* le plus grand entier k tel que $\frac{Mk}{n} \le t$. Alors

$$\{\tau_n \le t\} = \{\tau_n \le \frac{Mk^*}{n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{Mk^*}{n}} \subset \mathcal{F}_t.$$

τ_n est donc bien un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt.

Puisque $\tau_n \searrow \tau$ lorsque $n \to \infty$, la continuité des trajectoires de X nous permet de conclure que $X_{\tau_n} \to X_\tau$ P-pp.

τ_n prend au plus $n+1$ valeurs donc $X_{\tau_n} = E[X_M|\mathcal{F}_{\tau_n}]$. La famille $\{X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ est alors U.I. comme il suit de l'exercice 1.53.

La convergence P-pp de X_{τ_n} et le caractère U.I. de la suite nous permet d'affirmer avec le théorème 1.52 que X_{τ_n} converge vers X_τ dans L^1.

Si $Z \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_\tau) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_{\tau_n})$ alors: $E[X_{\tau_n}Z] = E[X_M Z]$. Or, $X_{\tau_n} \to X_\tau$ dans $\mathbf{L^1}$ et $Z \in L^\infty$ et donc $E[X_\tau Z] = \lim_{n\to\infty} E[X_{\tau_n}Z] = E[X_M Z]$. X_τ étant $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et vérifiant l'égalité précédente $\forall Z \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_\tau)$, nous concluons : $X_\tau = E[X_M|\mathcal{F}_\tau]$.

Prouvons la deuxième assertion: si $\tau \le \sigma \le M$, alors

$$E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau] = E[E[X_M|\mathcal{F}_\sigma]|\mathcal{F}_\tau] = E[X_M|\mathcal{F}_\tau] = X_\tau,$$

car $X_\sigma = E[X_M|\mathcal{F}_\sigma]$ et $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$. ■

The next result generalizes the construction of the last element of a martingale (Cor. 1.45).

Theorem 1.55 *If X is a cont. U.I. martingale (i.e. the family $\{X_t\}_{t\ge0}$ is U.I.), then $\exists X_\infty \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_\infty)$ such that X_t converges to X_∞ P-a.s. and in $\mathbf{L^1}$ when $t \to \infty$.*

Moreover, for every stopping time τ we have: $X_\tau = E[X_\infty|\mathcal{F}_\tau]$.

Preuve: Ce théorème généralise le corolaire 1.45. Il ne sera pas démontré ici. ■

Remark 1.56 *The Brownian motion* $(B_t, t \in [0,T])$ *satisfy the above result? How about* $(B_t, t \geq 0)$*? How about the martingale* $(B_t^2 - t, t \geq 0)$*? Are these families U.I. ?*

Corollary 1.57 *(the stopping theorem: the general case) If* X *is a* $\{\mathcal{F}_t\}$*-martingale continuous and U.I., then for every stopping times* $\tau \leq \sigma$*:* $X_\tau = E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau]$*.*

Preuve: Se démontre en remplaceant X_M par X_∞ dans la fin de la preuve du théorème 1.54. ∎

Remark 1.58 *We cannot eliminate the assumption* X_t *U.I. in the above theorem , as we can see from the following example: Let* B_t *be a Brownian motion and* $\sigma = \inf\{t|B_t \geq 1\}$*. Since the Brownian motion touches every point in* $\mathbb{R}$ *infinitely many times, we conclude that* $\sigma < \infty$ *P-a.s and then* $B_\sigma = 1$ *P-a.s. Let's fix* $\tau := 0$ *then* $0 = B_\tau \neq E[B_\sigma|\mathcal{F}_\tau] = 1$*.*

To finish this section, let us mention the next result on the regularization of the trajectories of a martingale.

Theorem 1.59 *If* $\{\mathcal{F}_t\}$ *is a complete and right continuous filtration, then every martingale* X *admits a modification* X' *with right continuous trajectories and whose left limits exist in any point* t*.*