Lecture Notes on STOCHASTIC CALCULUS

Ciprian TUDOR
Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1

November 4, 2007

MASTER M2: Mathématiques Appliquées à l'Economie et à la Finance

CHAPTER 4: The ITÔ INTEGRAL

Attention: the proofs and the exercises are not yet translated.

1 CHAPTER 4: The ITÔ INTEGRAL

1.1 The space $\mathcal{H}_2^2$:

Let $(B_t)_{t\geq 0}$ be a Brownian motion and $(\phi_t)_{t\geq 0}$ a stochastic process on $(\Omega, \mathcal{F}_t)$. We want to define a process Y which would be the integral with respect to the Brownian motion of the process Φ

$$Y_t = \int_0^t \phi_s dB_s. \tag{1}$$

The first idea is to construct this integral in a pathwise way "omega by omega": Fix ω and try to define $Y_t(\omega) := \int_0^t \phi_s(\omega) dB_s(\omega)$. If f and g are functions from $I\!R$ to $I\!R$, the theory of the Riemann-Stieltjes integration allows to define $\int_0^t f(s)dg(s)$ as limit of the Riemann sums $\Sigma f(s_i)(g(s_{i+1}) - g(s_i))$ along the partitions $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$ of $[0,t]$ when the mesh $max_i|s_{i+1} - s_i|$ of this partition tends to 0. In order to have a such integral well-defined we need to impose conditions on f and on g.

Exercice 1.1 *Show that if g is continuous and $f := \mathbf{1}_{[a,b[}$ then the Riemann sums converge to $g(t \wedge b) - g(t \wedge a)$. Show also that, if g is continuous, $\int_0^t f(s)dg(s)$ is a linear functional on the vector space $\mathcal{R}$ generated by the functions $\mathbf{1}_{[a,b[}$, $a \leq b$.*

If one wants to integrate more general functions f, for examples continuous functions f, then we need to restrict the class of functions g: the Riemann-Stieltjes theory assumes that g is a bounded variation function. the trajectory $t \to B_t(\omega)$ being without bounded variation, this theory cannot be applied here.

To define the integral (1), we need to restrict the class of processes ϕ that are integrated. Let define the first set on which we will work:

Definition 1.2 *$\mathcal{H}_2^2$ is the set of processes ϕ $\mathcal{F}_t$- progressively measurable such that*

$$\|\phi\|^2_{H_2^2} = E[\int_0^\infty \phi^2(s)ds] < \infty.$$

H_2^2 is the quotient of $\mathcal{H}_2^2$ by the equivalence relation $\equiv$, où $\phi \equiv \phi'$ si et seulement si $\|\phi - \phi'\|^2_{H_2^2} = 0$.

Exercice 1.3 *Montrez que $\mathcal{H}_2^2$ est un espace vectoriel et que $\|.\|_{H_2^2}$ est une semi-norme sur cet espace. H_2^2 est donc un espace vectoriel normé.*

Remark 1.4 *Pour $\alpha > 1$, on considère parfois les normes suivantes $\|\phi\|_{H_2^\alpha} = \left(E[(\int_0^\infty \phi_s^2 ds)^{\frac{\alpha}{2}}]\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et les espaces $\mathcal{H}_2^\alpha$ correspondants.*

Exercice 1.5 *Soit* $t_1 < t_2$ *et* $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$. *Posons* $\phi_t(\omega) := \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$. *Montrez que* $\phi \in \mathcal{H}_2^2$ *et calculez* $\|\phi\|_{H_2^2}$.

Preuve: Remarquons que ϕ est progressivement mesurable en effet: Soit T fixé si $T < t_1$ alors $\phi : \Omega \times [0,T] \to 0$ donc ϕ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable car c'est l'application constante.

Si $T \geq t_1$ alors $\phi(\omega,t) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, or $\psi(\omega)$ est $\mathcal{F}_{t_1}$ mesurable donc $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable donc $\phi(\omega,t) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable.

Ensuite $\|\phi\|^2{}_{\mathcal{H}_2^2} = E[\int_0^\infty \phi^2(s)ds] = E[\int_0^\infty \mathbf{1}^2_{[t_1,t_2[}(t)\psi^2(\omega)dt]$

$$= E[(t_1 - t_2)\psi^2(\omega)] = (t_2 - t_1)E(\psi^2(\omega)) < \infty.$$

Donc $\phi \in \mathcal{H}_2^2$. ∎

Definition 1.6 *We introduce* $\mathcal{E}sc$ *cas the vector space generated by* $\{\psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[} : t_1 < t_2, \psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})\}$.

Theorem 1.7 $(H_2^2, \|.\|_{H_2^2})$ *is a Hilbert space.*

Preuve: H_2^2 est un sous espace vectoriel de $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ avec $\mu = P \bigotimes \lambda$, P étant la mesure sur $\mathcal{F}_\infty$ et λ la mesure de Lebesgue sur $[0,\infty[$. En effet:

$$\begin{array}{rcl} \|\phi\|^2_{\mathbf{L^2}} & = & \int_{\Omega\times[0,\infty[} \phi^2(\omega,t)d\mu(\omega,t) \\ & = & \int_\Omega(\int_0^\infty \phi^2(\omega,t)dt)dP(\omega) \\ & = & E(\int_0^\infty \phi^2(\omega,t)dt). \end{array}$$

$L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ étant un espace de Hilbert, il nous suffit pour prouver la première assertion de démontrer que H_2^2 est fermé dans $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$:

Soit $\phi_n \to \phi$ dans $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ avec $\phi_n \in H_2^2$. Montrons que $\phi \in H_2^2$. Pour T fixé on a:

$$\begin{array}{rcl} \|\phi_n - \phi\|^2_{L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]})} & = & E[\int_0^T (\phi_{n,t}(\omega) - \phi_t(\omega))^2 dt] \\ & \leq & E[\int_0^\infty (\phi_{n,t} - \phi_t)^2 dt] \\ & = & \|\phi_n - \phi\|^2_{H_2^2} \to 0. \end{array}$$

La restriction de ϕ à $\Omega \times [0,T]$ est la limite dans $L^2(\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}\mu)$ des restrictions de ϕ_n à $\Omega \times [0,T]$. La restriction de ϕ à $[0,T]$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$- mesurable. Ceci étant vrai pour tout T, ϕ est progressivement mesurable et donc dans H_2^2. ∎

Theorem 1.8 $\mathcal{E}sc$ *is dense in* H_2^2.

Preuve: 1) Si $f \in L^2([0,\infty[)$ et $n \in I\!N$, définissons $T_n(f)$ par $T_n(f)_t = \sum_{k=1}^{\infty}(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t)$.

Montrons que $T_n(f) \in L^2$ et que $\|T_n(f)\|^2_{L^2} \le \|f\|^2_{L^2}$.

$$\begin{aligned}
\|T_n(f)\|^2_{\mathbf{L^2}} &= \int_0^\infty (\sum_{k=1}^\infty (n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t))^2 dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty (n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)^2 \mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^\infty (n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)^2 \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

or d'après l'inégalité de Jensen $[E[f(U)]]^2 \le E[f^2(U)]$ en prenant U une variable uniforme sur $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$, on a:

$$\|T_n(f)\|^2_{L^2} \le \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f^2(s)ds = \int_0^\infty f^2(s)ds = \|f\|^2_{L^2} < \infty.$$

Montrons à présent que $T_n(f) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^2: l'espace $\mathcal{C}_K([0,\infty[)$ des fonctions continues à support compact est dense dans L^2, donc si $\phi \in L^2([0,\infty[)$ alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists f \in \mathcal{C}_K([0,\infty[)$: $\|\phi - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{3}$.

Or, la continuité uniforme de f implique que $T_n(f)$ converge uniformément vers f et donc $\|T_n(f) - f\|_{L^2} \to 0$. Ainsi, $\exists N : \forall n \ge N\ \|T_n(f) - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{3}$. Ainsi:

$$\begin{aligned}
\|T_n(\phi) - \phi\|_{L^2} &\le \|T_n(\phi - f)\| + \|T_n(f) - f\| + \|f - \phi\| \\
&\le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, nous concluons que $T_n(f) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^2.

2)Si $\phi \in H^2_2$ est tel que $\phi_t = 0$, $\forall t \ge T$, définissons le processus ϕ^n par

$$\phi^n(\omega,t) = T_n(\phi(\omega,.))(t) = \sum_{k=1}^\infty (n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega,s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t).$$

Cette somme ne contient en fait qu'un nombre fini de termes non nuls. Or, si $s \le \frac{k}{n}$, $\phi(\omega,s)$ est $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$ mesurable donc $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega,s)ds$ est $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$-mesurable. De plus

$$E[(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega,s)ds)^2] \le E[n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega,s)^2 ds)] < \infty.$$

Ainsi $\phi^n(\omega,t) \in \mathcal{E}sc$.

Montrons que $\phi^n \to \phi$ pour la norme de H^2_2: Soit $Y_n(\omega) := \int_0^\infty (\phi^n(\omega,t) - \phi(\omega,t))^2 dt$. Observons que

$$Y_n(\omega) = \|T_n(\phi(\omega,.)) - \phi(\omega,.)\|^2_{L^2([0,\infty[)}.$$

Aussi, $\forall \omega$, $Y_n(\omega) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. De plus

$$\begin{aligned}\sqrt{Y_n(\omega)} &= \|T_n(\phi(\omega,.)) - \phi(\omega,.)\|_{L^2([0,\infty[)} \\ &\le \|T_n(\phi(\omega,.))\|_{L^2([0,\infty[)} + \|\phi(\omega,.)\|_{L^2([0,\infty[)} \\ &\le 2\|\phi(\omega,.)\|_{L^2([0,\infty[)}\end{aligned}$$

Ainsi $Y_n(\omega) \le 4\int_0^\infty (\phi(\omega,t))^2 dt$. Le membre de droite de cette inégalité ayant une espérance finie, nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour conclure que $\|\phi^n - \phi\|_{H_2^2} = E[Y_n] \to 0$.

3) Si $\phi \in H_2^2$, nous allons montrer que $\mathbf{1}_{[0,T]}\phi$ converge vers ϕ dans H_2^2 lorque T tend vers ∞. Le théorème sera établi puisque, par le point 2, $\mathbf{1}_{[0,T]}\phi$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par un processus de $\mathcal{E}sc$.

Puisque $(\phi - \mathbf{1}_{[0,T]}\phi)^2 = \mathbf{1}_{]T,\infty[}\phi^2 \le \phi^2$ et que $\mathbf{1}_{]T,\infty[}\phi^2 \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il suffit d'appliquer à nouveau le théorème de la convergence dominée de Lebesgue sur l'espace $L^1(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ pour conclure que $\|\phi - \mathbf{1}_{[0,T]}\phi\|_{H_2^2} \to 0$. ■

1.2 The Itô integral on H_2^2

We aim now to define the integral (1) for processes ϕ in the space H_2^2. It is possible to construct the random variable $Y_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ for fixed t, but in this way this random variable would be a random variable in $L^2(\mathcal{F}_t)$: Y_t would be therefore defined modulo a set with zero measure and nothing would indicate that Y, viewed as a stochastic process $(Y_t)_{t\ge 0}$, has a regular enough version (continuous version, for example). We prefer to define directly the integral as a process which will be denoted by $I(\phi)$.

Definition 1.9 *If $\phi \in \mathcal{E}sc$, then for every ω the trajectory $\phi_.(\omega)$ is in the space $\mathcal{R}$ given in the exercise 1.1. We can thus define $I(\phi)$ pathwise "omega by omega"*

$$I(\phi)_t(\omega) := \int_0^t \phi_s(\omega) dB_s(\omega),$$

the above integral being understood in the sense of Exercise 1.1.In particular, if $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, où $t_1 \le t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$, we have

$$I(\phi)_t = \psi \cdot (B_{t_2\wedge t} - B_{t_1\wedge t}).$$

Remark 1.10 *Note that, if $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, the constructed process $I(\phi)$ is $\{\mathcal{F}_t\}$-adapted and continuous. The integral from exercise 1.1being linear on $\mathcal{R}$, the application I will also be linear and I applies linearly $\mathcal{E}sc$ into the space of continuous adapted to $\{\mathcal{F}_t\}$ processes..*

Exercice 1.11 *Si $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, où $t_1 \le t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$, montrez que $I(\phi)$ est une martingale et calculez $\|I(\phi)\|_{L^2}$.*

Preuve: Soit $s > t$.

1) Supposons d'abord que $t \in [t_1, t_2]$: alors $\psi \in L^2(\mathcal{F}_t)$, et $t_1 \wedge s = t_1 = t_1 \wedge t \leq t$. Donc

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[\psi \cdot (B_{t_2 \wedge s} - B_{t_1 \wedge s})|\mathcal{F}_t] = \psi \cdot (E[B_{t_2 \wedge s}|\mathcal{F}_t] - B_{t_1 \wedge t}).$$

Puisque B est une martingale et $t_2 \wedge s \geq t = t_2 \wedge t$, nous avons

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = \psi \cdot (B_{t_2 \wedge t} - B_{t_1 \wedge t}) = I(\phi)_t.$$

2) Si $t < t_1$ alors, soit $s \leq t_1$, et partant

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[0|\mathcal{F}_t] = 0 = I(\phi)_t,$$

soit $s > t_1$, et donc, il suit du cas 1) que:

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_{t_1}]|\mathcal{F}_t] = E[I(\phi)_{t_1}|\mathcal{F}_t] = E[0|\mathcal{F}_t] = 0 = I(\phi)_t.$$

3) Si $t > t_2$, alors $I(\phi)_t = I(\phi)_{t_2} = I(\phi)_s$, et puisque $I(\phi)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, nous avons également $E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = I(\phi)_t$.

Enfin,

$$\begin{array}{rcl} \|I(\phi)\|_{L^2}^2 & = & \lim_{t\to\infty} \|I(\phi)_t\|_{L^2}^2 \\ & = & \|I(\phi)_{t_2}\|_{L^2}^2 \\ & = & E[\psi^2(B_{t_2} - B_{t_1})^2] \\ & = & E[\psi^2](t_2 - t_1). \end{array}$$

■

En comparant au résultat obtenu à l'exercice 1.5, nous voyons que

$$\|I(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

■

Cette propriété se généralise:

Theorem 1.12 *I is a linear isometric application from $(\mathcal{E}sc, \|.\|_{H_2^2})$ to $(M^2, \|.\|_{L^2})$.*

Preuve: Nous savons d'une part que I est linéaire. D'autre part si ϕ est de la forme $\psi \mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$, il découle de l'exercice précédent que $I(\phi) \in M^2$. Par linéarité, cette propriété s'étend à tout $\phi \in \mathcal{E}sc$.

Remarquons que si $\phi \in \mathcal{E}sc$, alors $\phi = \sum_0^n \psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[}$ avec $t_1^k \leq t_2^k$, $\psi_k \in L^2(\mathcal{F}_{t_1^k})$ et $[t_1^k, t_2^k[\cap [t_1^{k'}, t_2^{k'}[= \emptyset$ si $k \neq k'$. Nous calculons alors:

$$
\begin{aligned}
I(\phi)\|_{L^2}^2 &= E[I(\phi)_\infty^2] \\
&= E[(\sum_0^n I(\psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[})_\infty)^2] \\
&= E[(\sum_0^n \psi_k (B_{t_2^k} - B_{t_1^k}))^2] \\
&= E[\sum_0^n \psi_k^2 (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})^2] \\
&\quad +2E[\sum_{k<j} \psi_k \psi_j (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})(B_{t_2^j} - B_{t_1^j})] \\
&= \sum_0^n E[\psi_k^2](t_2^k - t_1^k)
\end{aligned}
$$

car, les intervalles $[t_1^k, t_2^k[$ et $[t_1^j, t_2^j[$ sont disjoints si $k < j$, donc $E[\psi_k \psi_j (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})(B_{t_2^j} - B_{t_1^j})] = 0$. Par ailleurs:

$$
\begin{aligned}
\phi\|_{H_2^2}^2 &= E[\int_0^\infty (\sum_0^n \psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[})^2 dt] \\
&= E[\int_0^\infty (\sum_0^n \psi_k^2 \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[}) dt] \\
&= E[\sum_k \psi_k^2(\omega)(t_2^k - t_1^k)] \\
&= \sum_k E(\psi_k^2)(t_2^k - t_1^k) \\
&= \|I(\phi)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Nous concluons donc que $\|I(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}$: I est bien une isométrie. ■

Corollary 1.13 *Si $\{\phi_n\} \subset \mathcal{E}sc$ converge vers $\phi \in H_2^2$ au sens de $\|.\|_{H_2^2}$, alors la suite $\{I(\phi_n)\}$ converge dans M^2.*

Si $\{\phi'_n\} \subset \mathcal{E}sc$ converge également ϕ, alors

$$\lim_{n\to\infty} I(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} I(\phi'_n).$$

Preuve: En effet, si $\{\phi_n\}$ converge, il s'agit d'une suite de Cauchy dans H_2^2 donc, I étant linéaire et isométrique:

$$\|I(\phi_n) - I(\phi_m)\|_{L^2} = \|I(\phi_n - \phi_m)\|_{L^2} = \|\phi_n - \phi_m\|_{H_2^2} \to 0.$$

Ainsi $\{I(\phi_n)\}$ est une suite de Cauchy dans M^2 et, M^2 étant complet, la limite $\lim_{n\to\infty} I(\phi_n)$ existe. Si $\{\phi'_n\}$ est une autre suite convergent vers ϕ, nous pouvons en créer une troisième $\{\phi''_n\}$ qui prend alternativement ses éléments dans les suites $\{\phi_n\}$ et $\{\phi'_n\}$. Puisque $\{\phi''_n\}$ converge vers ϕ, la suite $\{I(\phi''_n)\}$ est convergente et toutes les sous-suites de $\{I(\phi''_n)\}$,– $\{I(\phi_n)\}$ et $\{I(\phi'_n)\}$ en particulier–, convergent donc vers une limite commune. ■

We are able to introduce now the Itô integral:

Definition 1.14 *(Itô integral on H^2_2) If $\phi \in H^2_2$, there exists a sequence $\{\phi_n\} \subset \mathcal{E}sc$ that converges to ϕ. We set $\bar{I}(\phi) := \lim_{n\to\infty} \phi_n$. By using the previous corollary, the limit does not depend on the chosen sequence $\{\phi_n\}$. $\bar{I}(\phi)$ is called the Itô integral of the process ϕ.*

Exercice 1.15 *Montrez que $\bar{I}$ est linéaire et isométrique et que si $\phi \in \mathcal{E}sc$: $\bar{I}(\phi) = I(\phi)$.*

Preuve: Soient ϕ et $\phi' \in H^2_2$, soient $\{\phi_n\}$ et $\{\phi'_n\} \subset \mathcal{E}sc$ telles que $\phi_n \to \phi$ et $\phi'_n \to \phi'$. Alors $\forall \alpha, \beta \in I\!R : (\alpha\phi_n + \beta\phi'_n) \to (\alpha\phi + \beta\phi')$ et donc

$$\begin{aligned}\bar{I}(\alpha\phi + \beta\phi') &= L^2 - \lim I(\alpha\phi_n + \beta{\phi'}_n)\\ &= \alpha \lim I(\phi_n) + \beta \lim I({\phi'}_n)\\ &= \alpha\bar{I}(\phi) + \beta\bar{I}(\phi')\end{aligned}$$

d'où $\bar{I}$ est linéaire. Montrons que $\bar{I}$ est isométrique:

$$\|\bar{I}(\phi)\|_{L^2} = \lim \|I(\phi_n)\|_{L^2} = \lim \|\phi_n\|_{H^2_2} = \|\phi\|_{H^2_2}.$$

Enfin si $\phi \in \mathcal{E}sc$, la suite constante $\phi_n := \phi$ est une suite dans $\mathcal{E}sc$ qui converge vers ϕ. Ainsi $\bar{I}(\phi) = \lim I(\phi_n) = I(\phi)$. ■

Definition 1.16 *From now on we will denote $\bar{I}(\phi) = \int_0^{\cdot} \phi_t dB_t$, $\bar{I}(\phi)_s = \int_0^s \phi_t dB_t$ and $\int_a^b \phi_t dB_t = \bar{I}(\phi)_b - \bar{I}(\phi)_a$.*

Remark 1.17 *Remark that $\bar{I}(\phi)$ has been globally defined as a stochastic process. We don(t know apriori if $\bar{I}(\phi)_s$ depends or not on the behavior of the process ϕ after the time s (property which is evident in the construction "pathwise" of the integral)*

The next exercise proves that actually the integral at time t depends only on the trajectory of the integrand from zero to t.

Exercice 1.18 *Si T est fixé, montrez que*

$$\forall \phi \in H^2_2 : \bar{I}(\phi)_T = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,T[}\phi)_\infty.$$

Avec les notations intégrales, cela revient à dire:

$$\int_0^T \phi_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,T[}(s)\phi_s dB_s$$

ou encore $\int_T^\infty \mathbf{1}_{[0,T[}(s)\phi_s dB_s = 0$.

Preuve: Définissons les applications $J : H_2^2 \to L^2(\mathcal{F}_T)$ et $K : H_2^2 \to L^2(\mathcal{F}_\infty)$ comme suit: $J(\phi) := \bar{I}(\phi)_T$ et $K(\phi) := \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,T[}\phi)_\infty$.

J et K sont clairement linéaires puique $\bar{I}$ l'est. Montrons que ces applications sont également continues. En effet:

$$\|J(\phi)\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi)_T\|_{L^2} \le \|\bar{I}(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

De même
$$\|K(\phi)\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})_\infty\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})\|_{L^2} = \|\phi\mathbf{1}_{[0,T[}\|_{H_2^2},$$
d'où
$$\|K(\phi)\|_{L^2} = \sqrt{E(\int_0^T {\phi^2}_s ds)} \le \sqrt{E(\int_0^\infty {\phi^2}_s ds)} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

Posons à présent $\mathcal{F} := \{\phi \in H_2^2 | J(\phi) = K(\phi)\}$. Par continuité et linéarité de J et K, $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel fermé de H_2^2.

Remarquons que, si ϕ est de la forme $\phi = \psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$, alors:

$$J(\phi) = \bar{I}(\phi)_T = \psi(B_{T\wedge t_2} - B_{T\wedge t_1})$$

et, puisque $[t_1,t_2[\cap[0,T[= [T\wedge t_1, T\wedge t_2[$, nous avons $\phi\mathbf{1}_{[0,T[} = \psi\mathbf{1}_{[T\wedge t_1,T\wedge t_2[}$. Ainsi

$$K(\phi) = \bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})_\infty = \psi(B_{T\wedge t_2} - B_{T\wedge t_1}) = J(\phi).$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ contient tous les ϕ de la forme $\phi = \psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$. $\mathcal{F}$ contient donc $\mathcal{E}sc$ qui est l'espace vectoriel engendré par ces ϕ. $\mathcal{F}$ étant fermé, et $\mathcal{E}sc$ étant dense dans H_2^2, nous avons établi que $H_2^2 \subset \mathcal{F}$: ce que nous voulions montrer. ■

Exercice 1.19 *Montrez que si $\phi \in H_2^2$, si $A \in \mathcal{F}_t$ alors:*

1. $\psi_s(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[t,\infty[}(s)\phi_s(\omega) \in H_2^2$.
2. $\int_0^\cdot \psi_s dB_s = \mathbf{1}_A \int_0^\cdot \mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi_s dB_s$.

Nous montrons en fait ici que si $Z \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ alors

$$\int_t^\infty Z\phi_s dB_s = Z \cdot \int_t^\infty \phi_s dB_s$$

Preuve:
1) Montrons que ψ est progressivement mesurable. Soit T fixé:

Si $T < t$ alors la resrtiction de ψ à $\Omega \times [0,T]$ est identiquement nulle donc $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$-mesurable.

Si $T \ge t$ alors $\mathbf{1}_A$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable donc $\mathcal{F}_T$-mesurable et $\mathbf{1}_{[t,\infty[}$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable d'où $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{[t,\infty[}$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$-mesurable et, puisque $\phi \in H_2^2$, $\psi(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[t,\infty[}(s)\phi_s(\omega)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,T[}$-mesurable.

Calculons à présent $\|\psi\|_{H_2^2}$:

$$\|\psi\|^2_{H_2^2} = E[\int_0^\infty \psi_s^2 ds] = E[\mathbf{1}_A \int_t^\infty \phi_s^2 ds] \leq E[\int_0^\infty \phi_s^2 ds] = \|\phi\|^2_{H_2^2} < \infty.$$

Ainsi: $\psi \in H_2^2$.

2) Pour montrer la deuxième assertion, posons

$$J(\phi) := \bar{I}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi) \text{ et } K(\phi) := \mathbf{1}_A \cdot \bar{I}(\mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi).$$

Il est facile de voir que si ϕ est de la forme $\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}\psi$, alors $J(\phi) = K(\phi)$. On montre aisément que J et K sont des applications linéaires continues de H_2^2 dans M^2. Nous pouvons donc appliquer la preuve de l'exercice précédent. ■

Exercice 1.20 *Si τ est un temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs: $\tau(\Omega) = \{t_1, \ldots, t_n\}$ où $t_1 < \ldots < t_n$, si $\phi \in H_2^2$, montrez que $\bar{I}(\phi)_\tau = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)_\infty$. En d'autres termes:*

$$\int_0^\tau \phi_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau[}(s)\phi_s dB_s.$$

Montrez ensuite que cette relation est vérifiée pour tout temps d'arrêt τ.

Preuve: Considérons un temps d'arrêt τ discret. Alors, puisque $\{\tau = t_i\}$ est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, nous obtenons avec les deux exercices précédents:

$$\begin{aligned}
\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)_\infty &= \bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\mathbf{1}_{[\tau,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \bar{I}(\phi)_\infty - \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}(\bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,t_i[}\phi)_\infty \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\phi)_{t_i} \\
&= \bar{I}(\phi)_\tau.
\end{aligned}$$

Si τ est un temps d'arrêt général, il existe une suite $\{\tau_n\}$ de temps d'arrêt discrets telle que $\tau_n \searrow \tau$ (voir la démonstration du théorème d'arrêt , Ch. 3). Par continuité des trajectoires de $\bar{I}(\phi)$, nous avons:

$$\bar{I}(\phi)_\tau = \lim_{n\to\infty} \bar{I}(\phi)_{\tau_n} = \lim_{n\to\infty} \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi)_\infty$$

Pour terminer la démonstration, il nous suffit donc de montrer que les processus $\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi$ converge dans H_2^2 vers $\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi$. Mais ceci suit le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à la mesure $P\otimes\lambda$ sur $\Omega\times[0,\infty[$: d'une part $\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi$ converge ponctuellement vers $\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi$ et d'autre part, $\forall n : |\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi| \le |\phi|$. ■

Exercice 1.21 *Si τ est un temps d'arrêt, et X un processus, nous rappelons que la notation X^τ désigne le processus $t\to X_t^\tau := X_{\tau\wedge t}$. Améliorez les démonstrations antérieures pour prouver que*

$$\bar{I}(\phi)^\tau = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi).$$

Exercice 1.22 *Il suit de l'exercice précédent que si $\sigma\le\tau$ sont deux temps d'arrêt, alors les processus $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\sigma[}\phi)$ et $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)$ concident jusqu'au temps σ: $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\sigma[}\phi) = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)^\sigma$. Nous mettons à profits cette remarque dans la suite pour étendre la définition de l'intégrale d'Itô $\bar{I}$ à une classe plus vaste de processus.*

Definition 1.23 *(Local martingale) A process X is a $\{\mathcal{F}_t\}$-local martingale if it is continuous and adapted to the filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ and there exists an increasing sequence τ_n of stopping times such that $\tau_n \nearrow \infty$ P-a.s. for every n: $X^{\tau_n}\in\mathcal{M}^2$. We denote by $\mathcal{M}^{loc}$ the set of local martingales and by M^{loc} the quotient of $\mathcal{M}^{loc}$ for the equivalence relation $\overset{modif}{\equiv}$.*

Exercice 1.24 *Montrez que toute martingale continue est une martingale locale.*

Remark 1.25 *In general a local martingales is not a martingale. The next exercise provides an example in this sense.*

Exercice 1.26 *Soit V une variable aléatoire finie positive telle que $E[V]=\infty$. Soit par ailleurs B un mouvement Brownien indépendant de V. Posons $\mathcal{F}_t := \sigma(V, B_s, s\in[0,t])$ et $X_t := V\cdot B_t$.*

1) Montrez que X_t n'est pas dans L^1 si $t>0$. X ne peut donc pas être une martingale.

2) Montrez que B est un $\{\mathcal{F}_t\}$-mouvement brownien.

3) Soit $\tau_n := \mathbf{1}_{\{V\le n\}}n$. Montrez que τ_n est un $\{\mathcal{F}_t\}$-temps d'arrêt et que $\tau_n\nearrow\infty$.

4) Montrez que $X_s^{\tau_n} = \mathbf{1}_{V\le n}(V\wedge n)\cdot B_{s\wedge n}$. Concluez que $X^{\tau_n}\in M^2$.

Exercice 1.27 *Montrez que si $X\in M^{loc}$, si τ est un temps d'arrêt tel que X^τ soit un processus borné, alors X^τ est une martingale.*

Preuve: *Voila une idée pour le cas $X\in M^2$. Montrer d'abord que X adapté est une martingale si et seulement si pout tout temps d'arrêt borné T, on a*

$$E(X_T) = E(X_0).$$

(une direction est claire, pour l'autre utiliser le temps d'arrêt particulier $T = t1_A s + 1_{A^c}t$ si $A\in\mathcal{F}_s$ et $s<t$

Utiliser ensuite cela pour conclure que $X_S^T = X_O^T$ pour tout S temps d'arrêt borné.

En général on ne peut pas remplacer borné par U.I. dans l'énoncé précédent.

Definition 1.28 *(The space H_2^{loc}) H_2^{loc} is the set of processes a which are progressively measurable and for every $T \in [0,\infty[$:*

$$\int_0^T a_t^2\, dt < \infty \ P\text{-}P.P.$$

For a such process, we put τ_n^a the stopping time(!)

$$\tau_n^a := inf\{t | \int_0^t a_s^2 ds \geq n\}.$$

The process $\mathbf{1}_{[0,\tau_n^a[}a$ is then in H_2^2. In addition, if $a \in M^{loc}$, τ_n^a is an increasing sequence of stopping times who converges to ∞ almost surely.

Remark 1.29 *We aim now to define $J(\phi) := \int_0^{\cdot} \phi_s dB_s$ for a process ϕ in H_2^{loc}. It is natural to ask that $\forall n$: $J(\phi)_{\tau_n^\phi}$ coincides with $\int_0^{\tau_n^\phi} \phi_s dB_s$ interpreted as the integral $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}\phi)_\infty$ previously defined. We will actually ask that $J(\phi)$ and $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}\phi)$ coincide until the time τ_n^ϕ. The next theorem indicates that a such process $J(\phi)$ exists.*

Theorem 1.30 *If $\{\mathcal{F}_t\}$ is a complete filtration then $\forall \phi \in H_2^{loc}$,there exists a process $J(\phi)$ unique in M^{loc} such that $\forall n : J(\phi)^{\tau_n^\phi} = \bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$.*

Preuve: $\bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$ est un élément de M^2 soit une classe d'équivalence pour la relation $\overset{\text{modif}}{\equiv}$. Choisissons un représentant Y_n de cette classe. Si $n < m$, l'identité $\bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}) = \bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_m^\phi[})^{\tau_n^\phi}$ de la remarque 1.22 se traduit en terme de Y_n et Y_m par $Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Y_m^{\tau_n^\phi}$. L'exercice 1.40, Ch. 3 nous apprend que Y_n et Y_m sont indistinguables. Ainsi $P(A_{n,m}) = 1$, où $A_{n,m} := \{\omega | \forall t \geq 0 : Y_{n,t}(\omega) = Y_{m,t}^{\tau_n^\phi}(\omega)\}$. Soit $A := \cap_{n<m} A_{n,m}$. Nous avons également $P(A) = 1$.

Soit $B := \{\omega : \lim_{n\to\infty} \tau_n^\phi(\omega) = \infty\}$. Nous avons alors $P(B) = 1$, et donc $P(A') = 1$, où $A' := A \cap B$. Si ω appartient à A', définissons $Y_t(\omega)$ comme suit: il existe n tel que $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$. Posons $Y_t(\omega) := Y_{n,t}(\omega)$. Remarquons que cette définition ne dépend pas du n choisi tel que $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$. En effet, si $t \leq \tau_m^\phi(\omega)$, et par exemple $n < m$, alors $Y_{n,t}(\omega) = Y_{m,t}^{\tau_n^\phi}(\omega) = Y_{m,t\wedge\tau_n^\phi}(\omega) = Y_{m,t}(\omega)$.

Le processus Y est donc bien défini sur A'. Définissons alors $Y_t(\omega) := 0$ si $\omega \notin A'$. Le processus Y obtenu est donc continu, et si $\omega \in A'$ nous avons $Y_{n,t}(\omega) = Y_t(\omega)$ si $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$ et si $t > \tau_n^\phi(\omega)$, $Y_{n,t}(\omega) = Y_{n,\tau_n^\phi(\omega)}(\omega) = Y_{\tau_n^\phi(\omega)}(\omega)$. Nous venons de montrer que $Y_t^{\tau_n^\phi} = Y_{n,t}\mathbf{1}_{A'}$.

Aussi $\forall\omega$: $Y_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A'} Y_{n,t}(\omega)$. Puisque la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ est complète et qur $P(A') = 1$, $\mathbf{1}_{A'}Y_{n,t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et en passant à la limité, Y_t l'est aussi: Y est adapté à $\{\mathcal{F}_t\}$. De plus, la relation $Y_t^{\tau_n^\phi} = Y_{n,t}\mathbf{1}_{A'}$ implique que $Y_{n,t} = Y_t^{\tau_n^\phi}$ P-ps. Ainsi $Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Y^{\tau_n^\phi}$. Puisque $Y_n \in \mathcal{M}^2$, cette relation indique que $Y \in \mathcal{M}^{loc}$. Nous définissons enfin $J(\phi)$ comme la classe d'équivalence sur $\mathcal{M}^{loc}$ pour $\overset{\text{modif}}{\equiv}$ qui contient Y. Nous avons alors $\forall n : J(\phi)^{\tau_n^\phi} = \bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$.

Il nous reste à montrer l'unicité de $J(\phi)$: soit $Z \in \mathcal{M}^{loc}$ tel que $\forall n : Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Z^{\tau_n^\phi}$, alors $\forall n : Y^{\tau_n^\phi} \overset{\text{modif}}{\equiv} Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Z^{\tau_n^\phi}$. Puisque $\tau_n^\phi \nearrow \infty$, cela implique clairement que $Y \overset{\text{modif}}{\equiv} Z$. ■

Show that the application $J : H_2^{loc} \to M^{loc} : \phi \to J(\phi)$ is linear.

Remark 1.31 *Show that if $\phi \in H_2^2$, then $J(\phi) = \bar{I}(\phi)$.*

Definition 1.32 *$J(\phi)$ will be the Itô integral of the process $\phi \in H_2^{loc}$. We adopt the following integral notation: $J(\phi)_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ et $J(\phi) = \int_0^\cdot \phi_s dB_s$.*

Exercice 1.33 *Nous avons défini l'application $J : H_2^{loc} \to M^{loc}$ comme l'intégrale par rapport à un mouvement brownien donné B quelconque. Si B^1 et B^2 sont deux mouvements browniens indépendants, nous savons que $B^3 := \frac{1}{\sqrt{2}}(B^1 + B^2)$ est encore un mouvement brownien. A chacun de ces mouvements browniens correspond donc une application $J : H_2^{loc} \to M^{loc}$ différente que nous noterons respectivement J_1, J_2 et J_3. Montrez que $J_3(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1(\phi) + J_2(\phi))$. En notation intégrale, cela revient à montrer que*

$$\int_0^\cdot \phi_t dB_t^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\int_0^\cdot \phi_t dB_t^1 + \int_0^\cdot \phi_t dB_t^2).$$

1.3 The semi-martingales and their brackets:

Definition 1.34 *We define $\mathcal{H}_1^{loc}$ as the set of progressively measurable processes ϕ such that for every $T < \infty$*

$$\int_0^T |\phi_s| ds < \infty \ P\text{-}ps.$$

H_1^{loc} is the quotient of $\mathcal{H}_1^{loc}$ with respect to the relation: $P \otimes \lambda$-pp, where λ is the Lebesgue measure on $[0, \infty[$.

Definition 1.35 *A process X adapted to the filtration $\mathcal{F}_t$ is a semi-martingale if $\exists X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, $a \in H_2^{loc}$ and $b \in H_1^{loc}$ with:*

$$X = X_0 + \int_0^\cdot a_s dB_s + \int_0^\cdot b_s\, ds. \tag{2}$$

More generally, if $B^1, \cdots, B^n$ are s $\{\mathcal{F}_t\}$in dependent Brownian motion and if $X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, $a^1, \cdots, a^n \in H_2^{loc}$ and $b \in H_1^{loc}$, then we will also consider that the below process X is a *semi-martingale*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\cdot} a_s^i dB_s^i + \int_0^{\cdot} b_s ds \tag{3}$$

Remark 1.36 *We define in general a semi-martingale as a sum $M+A$ of a local martingale M and an adapted process A with finite variation on any interval. Our definition is more restrictive.*

Theorem 1.37 *If the process X is a semi-martingale, then the decomposition (2) is unique.*

Preuve: Par linéarité des intégrales, montrer l'unicité de la représentation (2), revient à montrer que, si $\alpha \in H_2^{loc}$ et $\beta \in H_1^{loc}$ vérifient

$$\int_0^{\cdot} \alpha_s dB_s = \int_0^{\cdot} \beta_s ds,$$

alors $\alpha = \beta = 0$.

Posons $M := \int_0^{\cdot} \alpha_s dB_s$, et définissons:

$$\tau_n = inf\{t : |M_t| \geq n \;\; ou \int_0^t \beta_s|ds \geq n\}.$$

Montrons d'abord que le processus que M^{τ_n} est identiquement nulle: soit $t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = t$. Alors, puisque par l'exercice 1.27, M^{τ_n} est une martingale, nous avons:

$$\begin{aligned}
E[(M_t^{\tau_n})^2] &= \sum_i E[(M_{t_{i+1}}^{\tau_n})^2 - (M_{t_i}^{\tau_n})^2] \\
&= \sum_i E[(M_{t_{i+1}}^{\tau_n} - M_{t_i}^{\tau_n})^2] \\
&\leq E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \sum_i |M_{t_{i+1}}^{\tau_n} - M_{t_i}^{\tau_n}|] \\
&= E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \sum_i | \int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta_s \mathbf{1}_{s \leq \tau_n} ds|] \\
&\leq E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \int_0^t |\beta_s| ds] \\
&\leq n \cdot E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}|].
\end{aligned}$$

Puisque M^{τ_n} est continue, ses trajectoires sont uniformément continues sur $[0, t]$ et donc $\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \to 0$ P-pp lorsque $\max_j |t_{j+1} - t_j| \to 0$. Puisque $|M_{t_{j+1}}^{\tau_n}| \leq n$, par définition de τ_n, il suit du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que $E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}|] \to 0$

Ainsi, $\forall t$ nous avons obtenu

$$E[(M_t^{\tau_n})^2] = 0$$

et donc M^{τ_n} est donc identiquement nulle. Puisque $\tau_n \nearrow \infty$ P-pp, $0 = M_t^{\tau_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M_t$. P-ps.

Ceci implique que M est identiquement nul, et donc α et β sont nuls. ■

The next lemma is a consequence of the above proof. It is interesting by itself and it deserves to be retained.

Proposition 1.38 *If M est is a local martingale with bounded variation, then $M_t \equiv 0$ for every t.*

The result that follows will generalize the quadratic variation of the Brownian motion (Chapter 2). Let $\Delta = \{t_1, \ldots, t_n\}$ with $0 = t_0 < t_2 < \ldots < t_n = T$, a partition of the interval $[0, T]$. If X is a process, we define

$$T^{\Delta}(X) := \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

We first treat the case of the space H_2^2.

Theorem 1.39 *If $a \in H_2^2$ and*

$$X = \int_0^{\cdot} a_s dB_s,$$

then

$$T^{\Delta}(X) \to \int_0^T a_s^2 ds$$

in L^1 when $|\Delta| \to 0$

Preuve: Observons d'abord que si le processus a est dans $\mathcal{E}sc$, le résultat est une conséquence de la propriété de variation quadratique du mouvement brownien. En effet, pour tout intervalle de type $]a, b]$ ou u prend la valeur constante c, on a une contribution du type

$$c^2 \sum_{a \le t_{j-1} \le t_j \le b} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$$

qui converge vers $c^2(b-a)$.

Considérons maintenant $a \in H_2^2$. Par le théorème de densité de $\mathcal{E}sc$ dans H_2^2, il existe une suite a^k de $\mathcal{E}sc$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} E \int_0^T \left| a_t - a_t^k \right|^2 dt = 0.$$

On peut supposer que le processus a^k est constant sur $[t_j, t_{j+1})$, sinon il suffit d'inclure les points de la partition associés à a^k dans les t_j.

On aura, en posant $X_t^k = \int_0^t a_s^k dB_s$

$$\begin{aligned} E\left(\left|T^\Delta(X) - \int_0^t a_s^2 ds\right|\right) &\leq E(|T^\Delta(X) - T^\Delta(X^k)|) \\ &+E\left(\left|T^\Delta(X^k) - \int_0^t (a_s^k)^2 ds\right|\right) \\ &+E\left(\left|\int_0^t (a_s^k)^2 ds - \int_0^t (a_s)^2 ds\right|\right). \end{aligned}$$

On peut borner le premier terme en utilisant l'inégalité de Schwartz et l'isométrie de l'intégrale stochastique

$$\begin{aligned} E(|T^\Delta(X) - T^\Delta(X^k)|) &= E\left[\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_s + a_s^k) dB_s\right)\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_s - a_s^k) dB_s\right)\right] \\ &\leq \left(E(T^\Delta(X + X^k)\right)^{\frac{1}{2}} \left(E(T^\Delta(X - X^k)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[E\left(\int_0^t (a_s + a_s^k)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} E\left(\int_0^t (a_s - a_s^k)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

Observons que la borne obtenue ne dépend pas de n et converge quand $k \to \infty$. Donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$E\left(\left|T^\Delta(X) - \int_0^t a_s^2 ds\right|\right) \leq \varepsilon + E\left(\left|T^\Delta(X^k) - \int_0^t (a_s^k)^2 ds\right|\right).$$

Il suffit maintenant de prendre la limite lorsque la norme de la division tend vers 0. ■

We also present a more general situation with a slightly different proof.

Theorem 1.40 *If $a \in H_2^{loc}$ and $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$, then $T^\Delta(X) \to \int_0^T a_s^2 ds$ in probability when $|\Delta| \to 0$*

Preuve: Soit $a \in H_2^{loc}$ et $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$. Posons

$$\tau_n := \inf\{t : |X_t| \geq n \text{ ou } \int_0^t a_s^2 ds \geq n\},$$

$a_n := \mathbf{1}_{[0,\tau_n[} a$ et $X_n := \int_0^\cdot a_{n,s} dB_s$. Il suit de la définition de $\int_0^\cdot a_s dB_s$ que $X_n = X^{\tau_n}$, et nous avons aussi $\int_0^T a_{n,s}^2 ds = \int_0^{T\wedge\tau_n} a_s^2 ds$, de sorte que sur $\{\tau_n \geq T\}$, pour tout Δ, $T^\Delta(X_n) = T^\Delta(X)$ et $\int_0^T a_{n,s}^2 ds = \int_0^T a_s^2 ds$. Il nous suffit donc d'établir le résultat pour les processus $a \in H_2^2$ tels que $|X|$ et $\int_0^\infty a_s^2 ds$ soient bornés: le résultat sera vrai pour a_n et donc, $\forall \delta > 0$, $P(|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta)$ est borné par

$$P(\tau_n < T) + P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta\}).$$

$P(\tau_n < T)$ est aussi petit que l'on désire en prenant n suffisemment grand et $P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta\})$ est égal à

$$P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X_n) - \int_0^T a_{n,s}^2 ds| > \delta\}).$$

Ce dernier terme est aussi petit que l'on désire en prenant $|\Delta|$ suffisemment petit.

Supposons donc que $a \in H_2^2$ est tel que $|X|$ et $\int_0^\infty a_s^2 ds$ soient bornés par M. Notons $\Delta X_i := X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ et calculons $E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}]$: Si $A \in \mathcal{F}_{t_i}$, il suit de l'exercice 1.19 que

$$\mathbf{1}_A \Delta X_i = \mathbf{1}_A \int_0^\infty \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) a_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) a_s dB_s.$$

Aussi:

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{1}_A (\Delta X_i)^2] &= E[(\mathbf{1}_A \Delta X_i)^2] = I(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} a)\|_{L^2}^2 \\
&= \|\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} a\|_{H_2^2}^2 = E[\mathbf{1}_A \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds] \\
&= E[\mathbf{1}_A E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds | \mathcal{F}_{t_i}]]
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_{t_i}$, nous avons montré que

$$E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}] = E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds | \mathcal{F}_{t_i}].$$

Ainsi, si l'on pose $V_0 := 0$ et $V_{i+1} := V_i + (\Delta X_i)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds$, V est une $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_{i=0,\ldots,n}$-martingale et $V_n = T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds$. Dès lors:

$$\begin{aligned}
E[(T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds)^2] &= E[V_n^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E[(V_{i+1} - V_i)^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E[((\Delta X_i)^2 - E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}])^2] \leq \sum_{i=0}^{n-1} E[(\Delta X_i)^4], \quad (4)
\end{aligned}$$

car, en posant $S := (\Delta X_i)^2$, on a:

$$E[S^2] = E[(S - E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2] + E[(E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2] \geq E[(S - E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2].$$

Remarquons ensuite que

$$E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^4] \le E[\Delta X_*^2 \cdot T^\Delta(X)] \le \sqrt{E[\Delta X_*^4]} \cdot \sqrt{E[(T^\Delta(X))^2]},$$

où $\Delta X_* := \max_i(\Delta X_i)$. Puisque X est un processus continu, ΔX_* tend P-pp vers 0 lorsque $|\Delta| \to 0$, et par ailleurs ΔX_* est borné par $2M$, puisque X est borné par M. Partant $\sqrt{E[\Delta X_*^4]}$ tend vers 0.

Nous allons montrer maitenant que $E[(T^\Delta(X))^2]$ est borné. Nous aurons ainsi démontré la convergence L^2 de $T^\Delta(X)$ vers $\int_0^T a_s^2 ds$, et donc la convergence en probabilité. En utilisant l'inégalité (4), le fait que X est une martingale bornée par M et que $\int_0^\infty a_s^2 ds \le M$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|T^\Delta(X)\|_{L^2} &\le \|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds\|_{L^2} + \|\int_0^T a_s^2 ds\|_{L^2} \\
&\le \sqrt{E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^4]} + M \\
&\le \sqrt{(2M)^2 E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^2]} + M \\
&= \sqrt{(2M)^2 E[X_T^2]} + M \\
&= 2M^2 + M.
\end{aligned}$$

■

Definition 1.41 *A continuous stochastic process A such that for every T: $T^\Delta(X)$ converges in probability to A_T when the mesh $|\Delta|$ of the partition of $[0,T]$ tends to 0 is called the bracket of X and it is denoted by $\langle X, X\rangle := A$.*

Remark 1.42 *The previous theorem shows that, if $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$ où $a \in H_2^{loc}$, then$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t a_s^2 ds$.*

Definition 1.43 *(joint bracket) If X and Y are two processes, we denote by*

$$T^\Delta(X,Y) := \sum_{i=1}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \cdot (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

The process A which is the limit in ptobability of $T^\Delta(X,Y)$is called the joint bracket of X and Y and it is denoted by $\langle X, Y\rangle$.

L'exercice qui suit donnera le crochet d'une semimartingale ainsi que le crochet croisé d'une martingale est d'un processus à variation bornée (absolument continu)

Exercice 1.44 *1) Montrez que si $Y = \int_0^\cdot b_s ds$ où $b \in H_1^{loc}$, alors $\langle Y, Y\rangle = 0$.*

2) Si $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$ où $a \in H_2^{loc}$, montrez que $T^\Delta(X, Y) \to 0$ en probabilité. (i.e. $\langle X, Y\rangle = 0$).

3) Si $X = X_0 + \int_0^\cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot b_t dt$ est une semi-martingale, montrez que $\langle X, X\rangle_t = \int_0^t a_s^2 ds$.

4) Montrez que $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{4}(\langle X+Y, X+Y\rangle + \langle X-Y, X-Y\rangle)$ et calculez le crochet croisé $\langle X, Y\rangle$ de deux semi-martingales $X = X_0 + \int_0^\cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot b_t dt$ et $Y = Y_0 + \int_0^\cdot a'_t dB_t + \int_0^\cdot b'_t dt$.

5) Supposons que B_1 et B_2 soient deux $\{\mathcal{F}_t\}$-mouvements browniens indépendants. Calculez $\langle B_1 + B_2, B_1 + B_2\rangle$, $\langle B_1 - B_2, B_1 - B_2\rangle$ et finalement montrez que $\langle B_1, B_2\rangle = 0$.

Exercice 1.45 *L'objet de cet exercice est de montrer que si B^1 et B^2 sont des mouvements browniens indépendents, si $a^1, a^2 \in H_2^{loc}$ et $X^i := \int_0^\cdot a_t^i dB_t^i$, alors $\langle X^1, X^2\rangle = 0$.*

1) Montrez que pour démontrer cette affirmation, il suffit de la prouver pour des processus a^i tels que X^i et $\int_0^\cdot (a_s^i)^2 ds$ soient bornés par une constante M. Nous supposerons donc que ces hypothèses sont vérifiées dans la suite de l'exercice.

2) Soit $S > T$ et $A \in \mathcal{F}_T$, et considérons l'application

$$F : H_2^2 \times H_2^2 \to \mathbb{R}, (u, v) \to F(u, v) := E[\mathbf{1}_A \int_T^S u_t dB_t^1 \cdot \int_T^S v_t dB_t^2].$$

Montrer que F est bilinéaire et continue:

$$|F(u, v)| \leq \|u\|_{H_2^2} \cdot \|v\|_{H_2^2}.$$

3) Montrez que si $u = \phi \mathbf{1}_{[t^1, t^2[}$, $v = \psi \mathbf{1}_{[s^1, s^2[}$, avec $t^1 < t^2$, $\phi \in L^2(\mathcal{F}_{t^1})$, $s_1 < s_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{s^1})$, alors $F(u, v) = 0$.

Concluez que $\forall u, v \in H_2^2 : F(u, v) = 0$.

4) Montrez que le processus $Z_t = X_t^1 \cdot X_t^2$ est une martingale.

5) Soit Δ une partition de $[0, T]$. Nous reprenons les notations de l'exercice précédent et du théorème 1.40. Montrez que

$$2(\Delta Z_i)^2 \leq (\Delta X_i^1)^4 + (\Delta X_i^2)^4$$

6) Montrez que $E[(T^\Delta(X^1, X^2))^2] = E[\sum_{i=1}^{n-1} (\Delta Z_i)^2]$. En utilisant la fin de la preuve du théorème 1.40, montrez que $T^\Delta(X^1, X^2) \to 0$ dans L^2 lorsque $|\Delta|$ tend vers 0.

7) En utilisant les résultats de cet exercice et du précédent, calculez le crochet $\langle X, X\rangle$ de la semi-martingale générale définie à la définition 1.35 formule (3).

1.4 Change of variable formula (Itô formula)

The stochastic integral with respect to a semi-martingale is defined as follows:

Definition 1.46 *If $(v_t)_{t\geq 0}$ is a progressively measurable process we will write by convention*

$$\int_0^\cdot v_t dX_t := \int_0^\cdot v_t \cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot v_t \cdot b_t dt.$$

Here is a first step to the obtention of the Itô formula.

Exercice 1.47 *If $X = X_0 + \int_0^\cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot b_t dt$ is a semi-martingale then for every t:*

$$X_t^2 \overset{P\text{-}pp}{=} X_0^2 + \int_0^t 2X_s\, dX_s + \int_0^t d\langle X, X\rangle_s$$

In particular the processes in both sides above are indistinguishables.

Preuve: Comme pour la démonstration précédente, par arrêt à des temps τ_n appropriés, il suffit de démontrer le corollaire pour des processus tels que X, $\int_0^\infty a_s^2 ds$ et $\int_0^\infty |b_s| ds$ soient bornés.

Fixons T et remarquons que si Δ est une partition de $[0, T]$, alors:

$$\begin{aligned}
X_T^2 &= X_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2) = X_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1}((X_{t_i} + \Delta X_i)^2 - X_{t_i}^2) \\
&= X_0^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\Delta X_i + \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^2 \\
&= X_0^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s dB_s + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} b_s ds + T^\Delta(X)
\end{aligned}$$

Utilisant le fait que X est borné et continu, il est aisé de remarquer que le processus

$$\phi_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \mathbf{1}_{[t_i t_{i+1}[}(s) a_s$$

converge vers $X_s a_s$ dans H_2^2 lorsque $|\Delta| \to 0$. La première somme convergera donc dans L^2 vers $2\int_0^T X_s a_s dB_s$ et donc aussi en probabilité. Par un raisonnement analogue la deuxième somme convergera vers $2\int_0^T X_s b_s ds$ en probabilité. Enfin $T^\Delta(X)$ converge en probabilité vers $\langle X, X\rangle$ par définition du crochet de X. La première assertion est donc démontrée.

Les processus d'une part et de l'autre part de l'égalité sont continus. Nous venons de démontrer qu'ils sont des modifications l'un de l'autre. Ils sont donc indistinguables, comme il ressort de l'exercice 1.40, Ch. 3. ∎

Exercice 1.48 *If X and Y are semi-martingales, show that*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t d\langle X, Y\rangle_s.$$

Preuve: On sait que $X_t Y_t = \frac{1}{4}[(X_t + Y_t)^2 - (X_t - Y_t)^2]$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent aux martingales $X + Y$ et $X - Y$. ■

The last exercise proves that the product of two semi-martingale is still a semi-martingale. The following result shows that if we apply a smooth enough function to a semi-martingale, the result is still a semi-martingale.

Theorem 1.49 *(Itô formula) If X is a semi-martingale of the form (2) and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function of class $\mathcal{C}^2$, then*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) a_s dB_s + \int_0^t f'(X_s) b_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) a_s^2 ds \tag{5}$$

or, in other words,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s.$$

Preuve: Nous allons donner les idées de la démonstration dans le cas particulier $b = 0$.

Par un argument de localisation, on peut supposer que f, f', f'' sont bornées. En effet, pour tout $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \inf\{t \geq 0; |X_0| + |\int_0^t a_s dB_s| + |\int_0^t a_s^2 ds| \geq n\} \wedge n.$$

Il est clair que T_n est un temps d'arrêt tel que $T_n \nearrow \infty$. Considérons la semimartingale $X_{t\wedge T_n}$. Alors

$$|X_{t\wedge T_n}| \leq n$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $t \geq 0$. Il suffit de prouver (5) pour $X_{t\wedge T_n}$ à la place de X_t (car après on prend la limite quand $n \to \infty$). De cette façon, tout se réduit à prouver (5) pour X tel que

$$|\int_0^t a_s dB_s| + |X_t| \leq c$$

et dans ce cas il y a que les valeurs de f, f', f'' sur le compact $[0, t] \times B(\bar{0}, c)$ qui interviennent. Donc f, f', f'' peuvent être supposées continues à support compact, donc bornées.

D'une autre part, en approximant a par une suite de processus bornés de $\mathcal{E}sc$ telle que

$$P\left(\int_0^t (a_s - a_s^n)^2 ds > \varepsilon\right) \to_{n\to\infty} 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prouver (5) pour un processus a escalier borné.

Considérons $t_j = \frac{tj}{n}$. On peut supposer par un argument standard que le processus a est constant sur $[t_j, t_{j+1})$, sinon il suffit d'inclure les points de la partition associés à a dans les t_j.

La formule de Taylor d'ordre 2 nous donne

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} \left(f(X_{t_j}) - f(X_{t_{j-1}}) \right) \\ &= f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} f'(X_{t_{j-1}}) \Delta X_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} f''(\bar{X}_j)(\Delta X_j)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

où $\Delta X_j = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ et $\bar{X}_j$ est un point situé entre $X_{t_{j-1}}$ et X_{t_j}.

La première somme à droite de (6) converge dans L^2 vers $\int_0^t f'(X_s) a_s dB_s$. En effet

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{j=1}^{n} f'(X_{t_{j-1}}) \Delta X_j - \int_0^t f'(X_s) a_s dB_s \right]^2 \\ = \;& E\left(\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f'(X_{t_{j-1}}) - f'(X_s))^2 a_s^2 ds \right) \\ \leq \;& K^2 t E\left(\sup_{|s-r| \leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \right) \end{aligned}$$

en assumant que a est majoré par la constante K. Cela converge vers zero car $f(X_t)$ est continu est borné.

La deuxième somme à droite de (6) converge dans L^2 vers

$$\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) a_s^2 ds$$

car

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{n} f''(\bar{X}_j)(\Delta X_j)^2 - \int_0^t f''(X_s) a_s^2 ds \right| \\ \leq \;& \left| \sum_{j=1}^{n} (f''(\bar{X}_j) - f''(X_{t_{j-1}}))(\Delta X_j)^2 \right|^2 + \left| f''(X_{t_{j-1}}) \left((\Delta X_j)^2 - \int_{t_{j-1}}^{t_j} a_s^2 ds \right) \right| \\ & + \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(f''(X_{t_{j-1}}) - f''(X_s) \right) a_s^2 ds \right| \\ := \;& a_1 + a_2 + a_3. \end{aligned}$$

Les termes a_1 et a_3 se traitent par les majorations

$$a_1 \le \sup_{|r-s|\le t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \sum_{j=1}^{n} (\Delta X_j)^2$$

et

$$a_3 \le \sup_{|r-s|\le t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \int_0^t a_s^2 ds$$

donc ils convergent vers zero.

Voyons le terme a_2. Notons ϕ_j la valeur du processus escalier a sur $[t_{j-1}, t_j[$. Comme $\Delta X_j = \phi_j \Delta B_j$ et en posant

$$d_j := \phi_j f''(X_{t_{j-1}})$$

on obtient en utilisant l'indépendance des acroissements du brown ien et en notant $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$

$$\begin{aligned}
E(a_2^2) &\le E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} E\left(d_j^2 \left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 E\left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 E\left((\Delta B_j)^4 - 2(\Delta B_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} E d_j^2 (\Delta t_j)^2 \le \frac{2t}{n} \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 (\Delta t_j) \to_{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

■

Remark 1.50 *Sometimes we use the differential notation*

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X, X\rangle_t$$

Exercice 1.51 *Comparer la formule d'Itô pour $f(x) = x^2$ avec celle donne par l'exercice 1.47.*

Theorem 1.52 *(Itô formula for functions depending on time) let $f = f(t,x)$ be a function of class $C^{1,2}$ and let $Y_t = f(t, X_t)$ where X is a semi-martingale of the form (2). Then*

$$\begin{aligned} f(t, Y_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) a_s dB_s \\ & \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) b_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) a_s^2 ds. \end{aligned}$$

We present below the multidimensional version of the Itô formula.

Theorem 1.53 *If $f : I\!\!R^d \to I\!\!R$ is $\mathcal{C}^2$, if*

$$X^j = X_0^j + \sum_k \int_0^\cdot a_s^{k,j} dB_s^k + \int_0^\cdot b_s^j ds$$

are semi-martingales and if $X := (X^1, \cdots, X^d)$, then:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j \\ & +\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,j'} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{j'}}(X_s) d\langle X^j, X^{j'}\rangle_s. \end{aligned} \tag{7}$$

Preuve: Par la technique d'arrêt des démonstrations précédentes, il suffit de démontrer le résultat pour les semi-martingales X à valeurs dans un ensemble compact K de $I\!\!R^d$. Soit $\mathcal{V}$ la classe des fonctions $f : K \to I\!\!R$ vérifiant le théorème.

Les fonctions constantes ainsi que les fonctons

$$g^j : x = (x^1, \cdots, x^d) \to g^j(x) := x^j$$

sont dans $\mathcal{V}$.

Par linéarité en f de la formule (7), si f et g sont dans $\mathcal{V}$ et $\alpha, \beta \in I\!\!R$ alors clairement $\alpha f + \beta g \in \mathcal{V}$.

Montrons que si f et g sont dans $\mathcal{V}$ alors $h := f \cdot g$ l'est également. Soit $F_t := f(X_t)$, $G_t := g(X_t)$, $H_t := g(X_t)$, Par d'exercice 1.48, nous avons:

$$dH_t = F_t dG_t + G_t dF_t + d\langle F, G\rangle_t$$

Puisque f et g sont dans $\mathcal{V}$, on trouve:

$$\begin{aligned} dF_t = \textstyle\sum_j \partial_j f(X_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j,j'} \partial_{j,j'} f(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \\ dG_t = \textstyle\sum_j \partial_j g(X_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j,j'} \partial_{j,j'} g(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \end{aligned}$$

Puisque les termes en $d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t$ sont à 1-variation bornée, ils n'interviennent pas dans le calcul de $d\langle F, G\rangle_t$. On trouve alors:

$$d\langle F, G\rangle_t = \sum_{j,j'} \partial_j f(X_t) \cdot \partial_{j'} g(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t.$$

Aussi

$$\begin{array}{rcl} dH_t & = & \sum_j (G_t \partial_j f(X_t) + F_t \partial_j g(X_t)) \cdot dX_t^j \\ & & +\frac{1}{2} \sum_{j,j'} L_t^{j,j'} \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \end{array}$$

où $L_t^{j,j'} = (G_t \partial_{j,j'} f(X_t) + F_t \partial_{j,j'} g(X_t) + 2\partial_j f(X_t) \cdot \partial_{j'} g(X_t))$. Puisque $\partial_j h(X_t) = G_t \partial_j f(X_t) + F_t \partial_j g(X_t)$ et $\partial_{j,j'} h(X_t) = L_t^{j,j'}$, on en conclut donc que dH_t vérifie bien la formule (7) et partant $h \in \mathcal{V}$.

De ce qui précède, on conclut que $\mathcal{V}$ contient tous les polynômes. Soit $\epsilon > 0$. Toute fonction $f \in \mathcal{C}_2$ peut être approximée sur K par un polynôme g tel que $\|f - g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$, $\forall j$: $\|\partial_j f - \partial_j g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$ et $\forall j, j'$: $\|\partial_{j,j'} f - \partial_{j,j'} g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$. Puisque la formule (7) est vérifiée par g, elle sera vérifiée par f par passage à la limite, et le théorème est donc démontré. ■

1.5 Applications of the Itô formula

Les exercices qui suivent constituent quelques applications immédiates de la formule d'Itô.

Exercice 1.54 *Montrer que, si B est le mouvement brownien, alors*

$$B_t^n = n \int_0^t B_s^{n-1} dB_s + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t B_s^{n-2} ds.$$

Exercice 1.55 *En utilisant la formule d'Itô, montrez que, si B est un mouvement brownien, alors $M_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$ est une martingale locale.*

Preuve: Soit $f(x) := \exp(x)$ et $X_t := \alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t$. Puisque $X_t = \int_0^t \alpha dB_s + \int_0^t (-\alpha^2/2) ds$, on a $\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \alpha^2 ds = \alpha^2 t$. La formule d'Itô nous donne donc, avec $f(x) = f'(x) = f''(x)$:

$$\begin{array}{rcl} M_t & = & f(M_t) \\ & = & f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s \\ & = & f(0) + \int_0^t M_s \alpha dB_s - \int_0^t M_s \frac{\alpha^2}{2} ds + \frac{1}{2} \int_0^t M_s \alpha^2 ds \\ & = & 1 + \int_0^t M_s \alpha dB_s \end{array}$$

Puisque les trajectoires de B et donc de M sont continues, la variable $M_T^* := \sup\{M_s : 0 \leq s \leq T\}$ est, pour tout $T < \infty$, une variable P-pp finie. Puisque $\int_0^T M_s^2 \alpha^2 ds \leq$

$M_T^{*2} \cdot \alpha^2 \cdot T$, le processus $M_t\alpha$ appartient à H_2^{loc}. Son intégrale $\int_0^{\cdot} M_s \alpha dB_s$ est donc une martingale locale et il en est alors de même pour M. ■

Definition 1.56 *Si X et Y sont deux semimartingales, on définit l'intégrale de Stratonovich de X par rapport à Y par*

$$\int_0^t X_s d \circ Y_s = \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle_t.$$

Exercice 1.57 *En déduire de l'exercice 1.48 que*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s d \circ Y_s + \int_0^t Y_s d \circ X_s$$

Exercice 1.58 *Montrer que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(X_{t_{i+1}} + X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

converge en probabilité vers $\int_0^t X_s d \circ Y_s$ si $0 = t_0 < \ldots t_n = t$ est une partition de $[0, t]$.

Exercice 1.59 *Soit B^1, B^2, B^3 trois mouvements browniens indépéndants. Soit $f(x_1, x_2, x_3) := (\sum_{i=1}^3 (1 + x_i)^2)^{-1/2}$ et $Z_t := f(B_t^1, B_t^2, B_t^3)$.*

1) Montrez que $\sum_{i=1}^3 \partial_{i,i} f(x_1, , x_2, x_3) = 0$, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \neq (-1, -1, -1)$.

2) Soit $\tau_n := \inf\{t : Z_t \geq n\}$. En utilisant la formule d'Itô, montrez que Z^{τ_n} est une martingale positive bornée par n.

3) Montrez que $E[Z_{\tau_n}] = 1/\sqrt{3}$. Déduire de cela que

$$P(\tau_n < \infty) \leq 1/(n\sqrt{3})$$

et que $\tau_n \nearrow \infty$ P-ps. Z est donc une martingale locale.

4) Soit $\sigma_m := \inf\{t : Z_t \leq 1/m\}$. En utilisant le corollaire 2.15, montrez que $\sigma_m < \infty$ P-ps. Montrez ensuite que $\sigma_m \nearrow \infty$ P-ps.

Montrez que $Z_{\tau_n \wedge \sigma_m} \in \{1/m, n\}$ P-ps. et que $Z_{\tau_n \wedge \sigma_m} \xrightarrow{P\text{-}pp} Z_{\tau_n}$ lorsque $m \to \infty$. Déduizez-en que $Z_{\tau_n} = n \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}$ P-ps.

5) Montrez que $Z_{\tau_n} \xrightarrow{P\text{-}pp} 0$ lorsque n tend vers l'infini.

6) En utilisant la densité normale, montrez qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\forall t$ $E[Z_t^2] \leq C$.

7) Si Z était une martingale, nous aurions $Z \in \mathcal{M}^2$. Montrez qu'en vertu du corollaire 4.22, Z ne peut donc être une martingale.

Z est donc une martingale locale bornée en norme L^2 (donc U.I.) qui n'est pas une martingale.