

Cours de CALCUL STOCHASTIQUE

Ciprian TUDOR
Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1

November 4, 2007

**MASTER M2: Mathématiques Appliquées à l'Economie et à
la Finance**

CHAPITRE 4

ATTENTION: Ces notes de cours représentent une version rémanée du cours enseigné par Bernard De Meyer dans le cadre du DEA MMME 2004-2005, à l'Université de Paris 1.

1 CHAPITRE 4: L'INTEGRALE DE d'ITÔ

1.1 L'Espace \mathcal{H}_2^2 :

Soit B_t un mouvement brownien et ϕ_t un processus sur (Ω, \mathcal{F}_t) . Nous voulons définir un processus Y qui soit l'intégrale:

$$Y_t = \int_0^t \phi_s dB_s. \quad (1)$$

Le première idée qui nous vient est de travailler trajectoire par trajectoire: Fixons ω et tentons de définir $Y_t(\omega) := \int_0^t \phi_s(\omega) dB_s(\omega)$. Si f et g sont des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , la théorie de l'intégrale de Riemann-Stieltjes définit $\int_0^t f(s)dg(s)$ comme la limite des sommes de Riemann $\sum f(s_i)(g(s_{i+1}) - g(s_i))$ sur les partitions $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ de $[0, t]$ lorsque le diamètre $\max_i |s_{i+1} - s_i|$ de ces partitions tend vers 0. Pour que cette limite existe, il faut imposer des conditions sur f et sur g .

Exercice 1.1 Montrez que si g est continue et $f := \mathbf{1}_{[a,b]}$ alors les sommes de Riemann convergent vers $g(t \wedge b) - g(t \wedge a)$. Montrez aussi que, si g est continue, $\int_0^t f(s)dg(s)$ est une fonctionnelle linéaire sur l'espace vectoriel \mathcal{R} engendré par les fonctions $\mathbf{1}_{[a,b]}$, $a \leq b$.

Si l'on veut intégrer des fonctions f plus générales que celles de l'exercice précédent, par exemple des fonctions continues, il faut alors restreindre la classe des g considérés: la théorie de Riemann-Stieltjes suppose que g est une fonction à variation bornée. La trajectoire $t \rightarrow B_t(\omega)$ étant génériquement à variation non bornée, cette théorie ne peut donc pas s'appliquer ici.

Pour définir l'intégrale (1), nous devons limiter la classe des processus ϕ . Voici le premier espace sur lequel nous travaillerons:

Définition 1.2 \mathcal{H}_2^2 est l'ensemble des processus ϕ \mathcal{F}_t - progressivement mesurables tels que:

$$\|\phi\|_{H_2^2}^2 = E\left[\int_0^\infty \phi^2(s)ds\right] < \infty.$$

H_2^2 est le quotient de \mathcal{H}_2^2 par la relation d'équivalence \equiv , où $\phi \equiv \phi'$ si et seulement si $\|\phi - \phi'\|_{H_2^2}^2 = 0$.

Exercice 1.3 Montrez que \mathcal{H}_2^2 est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_{H_2^2}$ est une semi-norme sur cet espace. H_2^2 est donc un espace vectoriel normé.

Remarque 1.4 Pour $\alpha > 1$, on considère parfois les normes suivantes $\|\phi\|_{H_2^\alpha} = \left(E\left[\left(\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et les espaces \mathcal{H}_2^α correspondants.

Exercice 1.5 Soit $t_1 < t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$. Posons $\phi_t(\omega) := \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1, t_2[}(t)$. Montrez que $\phi \in \mathcal{H}_2^2$ et calculez $\|\phi\|_{H_2^2}$.

Preuve: Remarquons que ϕ est progressivement mesurable en effet: Soit T fixé si $T < t_1$ alors $\phi : \Omega \times [0, T] \rightarrow 0$ donc ϕ est $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0, T]}$ mesurable car c'est l'application constante.

Si $T \geq t_1$ alors $\phi(\omega, t) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1, t_2[}(t)$, or $\psi(\omega)$ est \mathcal{F}_{t_1} mesurable donc \mathcal{F}_T mesurable et $\mathbf{1}_{[t_1, t_2[}(t)$ est $\mathcal{B}_{[0, T]}$ mesurable donc $\phi(\omega, t) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1, t_2[}(t)$ est $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0, T]}$ mesurable.

$$\begin{aligned} \text{Ensuite } \|\phi\|_{\mathcal{H}_2^2}^2 &= E\left[\int_0^\infty \phi^2(s) ds\right] = E\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{[t_1, t_2[}^2(t) \psi^2(\omega) dt\right] \\ &= E[(t_2 - t_1)\psi^2(\omega)] = (t_2 - t_1)E(\psi^2(\omega)) < \infty. \end{aligned}$$

Donc $\phi \in \mathcal{H}_2^2$. ■

Définition 1.6 On définit $\mathcal{E}sc$ comme l'espace vectoriel engendré par: $\{\psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1, t_2[} : t_1 < t_2, \psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})\}$.

Théorème 1.7 $(H_2^2, \|\cdot\|_{H_2^2})$ est un espace de Hilbert.

Preuve: H_2^2 est un sous espace vectoriel de $L^2(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}_{[0, \infty[}, \mu)$ avec $\mu = P \otimes \lambda$, P étant la mesure sur \mathcal{F}_∞ et λ la mesure de Lebesgue sur $[0, \infty[$. En effet:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega \times [0, \infty[} \phi^2(\omega, t) d\mu(\omega, t) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^\infty \phi^2(\omega, t) dt\right) dP(\omega) \\ &= E\left(\int_0^\infty \phi^2(\omega, t) dt\right). \end{aligned}$$

$L^2(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}_{[0, \infty[}, \mu)$ étant un espace de Hilbert, il nous suffit pour prouver la première assertion de démontrer que H_2^2 est fermé dans $L^2(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}_{[0, \infty[}, \mu)$:

Soit $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $L^2(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}_{[0, \infty[}, \mu)$ avec $\phi_n \in H_2^2$. Montrons que $\phi \in H_2^2$. Pour T fixé on a:

$$\begin{aligned} \|\phi_n - \phi\|_{L^2(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}_{[0, T]})}^2 &= E\left[\int_0^T (\phi_{n,t}(\omega) - \phi_t(\omega))^2 dt\right] \\ &\leq E\left[\int_0^\infty (\phi_{n,t} - \phi_t)^2 dt\right] \\ &= \|\phi_n - \phi\|_{H_2^2}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La restriction de ϕ à $\Omega \times [0, T]$ est la limite dans $L^2(\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0, T]}\mu)$ des restrictions de ϕ_n à $\Omega \times [0, T]$. La restriction de ϕ à $[0, T]$ est $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0, T]}$ -mesurable. Ceci étant vrai pour tout T , ϕ est progressivement mesurable et donc dans H_2^2 . ■

Théorème 1.8 $\mathcal{E}sc$ est dense dans H_2^2 .

Preuve: 1) Si $f \in L^2([0, \infty[)$ et $n \in \mathbb{N}$, définissons $T_n(f)$ par $T_n(f)_t = \sum_{k=1}^\infty \left(n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s) ds\right) \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[}(t)$.

Montrons que $T_n(f) \in L^2$ et que $\|T_n(f)\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$.

$$\begin{aligned}\|T_n(f)\|_{L^2}^2 &= \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty \left(n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s) ds \right) \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(t) \right)^2 dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \left(n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s) ds \right)^2 \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^\infty \left(n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s) ds \right)^2 \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

or d'après l'inégalité de Jensen $[E[f(U)]]^2 \leq E[f^2(U)]$ en prenant U une variable uniforme sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, on a:

$$\|T_n(f)\|_{L^2}^2 \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f^2(s) ds = \int_0^\infty f^2(s) ds = \|f\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Montrons à présent que $T_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans L^2 : l'espace $\mathcal{C}_K([0, \infty[)$ des fonctions continues à support compact est dense dans L^2 , donc si $\phi \in L^2([0, \infty[)$ alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists f \in \mathcal{C}_K([0, \infty[)$: $\|\phi - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{3}$.

Or, la continuité uniforme de f implique que $T_n(f)$ converge uniformément vers f et donc $\|T_n(f) - f\|_{L^2} \rightarrow 0$. Ainsi, $\exists N : \forall n \geq N \ \|T_n(f) - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{3}$. Ainsi:

$$\begin{aligned}\|T_n(\phi) - \phi\|_{L^2} &\leq \|T_n(\phi - f)\| + \|T_n(f) - f\| + \|f - \phi\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ , nous concluons que $T_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans L^2 .

2) Si $\phi \in H^2$ est tel que $\phi_t = 0, \forall t \geq T$, définissons le processus ϕ^n par

$$\phi^n(\omega, t) = T_n(\phi(\omega, \cdot))(t) = \sum_{k=1}^\infty \left(n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega, s) ds \right) \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(t).$$

Cette somme ne contient en fait qu'un nombre fini de termes non nuls. Or, si $s \leq \frac{k}{n}$, $\phi(\omega, s)$ est $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$ mesurable donc $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega, s) ds$ est $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$ -mesurable. De plus

$$E\left[\left(n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega, s) ds \right)^2 \right] \leq E\left[n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega, s)^2 ds \right] < \infty.$$

Ainsi $\phi^n(\omega, t) \in \mathcal{E}sc$.

Montrons que $\phi^n \rightarrow \phi$ pour la norme de H^2 : Soit $Y_n(\omega) := \int_0^\infty (\phi^n(\omega, t) - \phi(\omega, t))^2 dt$. Observons que

$$Y_n(\omega) = \|T_n(\phi(\omega, \cdot)) - \phi(\omega, \cdot)\|_{L^2([0, \infty[)}^2.$$

Aussi, $\forall \omega, Y_n(\omega) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus

$$\begin{aligned}\sqrt{Y_n(\omega)} &= \|T_n(\phi(\omega, \cdot)) - \phi(\omega, \cdot)\|_{L^2([0, \infty[)} \\ &\leq \|T_n(\phi(\omega, \cdot))\|_{L^2([0, \infty[)} + \|\phi(\omega, \cdot)\|_{L^2([0, \infty[)} \\ &\leq 2\|\phi(\omega, \cdot)\|_{L^2([0, \infty[)}\end{aligned}$$

Ainsi $Y_n(\omega) \leq 4 \int_0^\infty (\phi(\omega, t))^2 dt$. Le membre de droite de cette inégalité ayant une espérance finie, nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour conclure que $\|\phi^n - \phi\|_{H_2^2} = E[Y_n] \rightarrow 0$.

3) Si $\phi \in H_2^2$, nous allons montrer que $\mathbf{1}_{[0, T]} \phi$ converge vers ϕ dans H_2^2 lorsque T tend vers ∞ . Le théorème sera établi puisque, par le point 2, $\mathbf{1}_{[0, T]} \phi$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par un processus de $\mathcal{E}sc$.

Puisque $(\phi - \mathbf{1}_{[0, T]} \phi)^2 = \mathbf{1}_{]T, \infty[} \phi^2 \leq \phi^2$ et que $\mathbf{1}_{]T, \infty[} \phi^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, il suffit d'appliquer à nouveau le théorème de la convergence dominée de Lebesgue sur l'espace $L^1(\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}_{[0, \infty[}, \mu)$ pour conclure que $\|\phi - \mathbf{1}_{[0, T]} \phi\|_{H_2^2} \rightarrow 0$. ■

1.2 L'intégrale d'Itô sur H_2^2

Nous allons à présent définir l'intégrale (1) des processus ϕ de H_2^2 . Nous pourrions définir la variable $Y_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ pour un temps t fixé, mais la définition que nous en donnerions serait alors une variable de $L^2(\mathcal{F}_t)$: Y_t serait alors défini à un ensemble de mesure nulle près et rien n'indiquerait que l'ensemble du processus Y ainsi construit ait une version régulière. Pour cette raison, nous allons définir le processus Y tout entier et nous le nous noterons $I(\phi)$.

Définition 1.9 Si $\phi \in \mathcal{E}sc$, alors pour tout ω la trajectoire $\phi(\omega)$ est dans l'espace \mathcal{R} de l'exercice 1.1. Nous pouvons donc définir $I(\phi)$ trajectoire par trajectoire:

$$I(\phi)_t(\omega) := \int_0^t \phi_s(\omega) dB_s(\omega),$$

l'intégrale étant prise au sens de l'exercice 1.1. En particulier, si $\phi_t(\omega) = \psi(\omega) \mathbf{1}_{[t_1, t_2[}(t)$, où $t_1 \leq t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$, on a

$$I(\phi)_t = \psi \cdot (B_{t_2 \wedge t} - B_{t_1 \wedge t}).$$

Remarque 1.10 Notons que, si $\phi_t(\omega) = \psi(\omega) \mathbf{1}_{[t_1, t_2[}(t)$, le processus $I(\phi)$ ainsi construit est $\{\mathcal{F}_t\}$ -adapté et continu. L'intégrale de l'exercice 1.1 étant linéaire sur \mathcal{R} , l'application I sera également linéaire et I applique donc linéairement $\mathcal{E}sc$ dans l'espace des processus continus $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptés.

Exercice 1.11 Si $\phi_t(\omega) = \psi(\omega) \mathbf{1}_{[t_1, t_2[}(t)$, où $t_1 \leq t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$, montrez que $I(\phi)$ est une martingale et calculez $\|I(\phi)\|_{L^2}$.

Preuve: Soit $s > t$.

1) Supposons d'abord que $t \in [t_1, t_2]$: alors $\psi \in L^2(\mathcal{F}_t)$, et $t_1 \wedge s = t_1 = t_1 \wedge t \leq t$. Donc

$$E[I(\phi)_s | \mathcal{F}_t] = E[\psi \cdot (B_{t_2 \wedge s} - B_{t_1 \wedge s}) | \mathcal{F}_t] = \psi \cdot (E[B_{t_2 \wedge s} | \mathcal{F}_t] - B_{t_1 \wedge t}).$$

Puisque B est une martingale et $t_2 \wedge s \geq t = t_2 \wedge t$, nous avons

$$E[I(\phi)_s | \mathcal{F}_t] = \psi \cdot (B_{t_2 \wedge t} - B_{t_1 \wedge t}) = I(\phi)_t.$$

2) Si $t < t_1$ alors, soit $s \leq t_1$, et partant

$$E[I(\phi)_s | \mathcal{F}_t] = E[0 | \mathcal{F}_t] = 0 = I(\phi)_t,$$

soit $s > t_1$, et donc, il suit du cas 1) que:

$$E[I(\phi)_s | \mathcal{F}_t] = E[E[I(\phi)_s | \mathcal{F}_{t_1}] | \mathcal{F}_t] = E[I(\phi)_{t_1} | \mathcal{F}_t] = E[0 | \mathcal{F}_t] = 0 = I(\phi)_t.$$

3) Si $t > t_2$, alors $I(\phi)_t = I(\phi)_{t_2} = I(\phi)_s$, et puisque $I(\phi)_t$ est \mathcal{F}_t -mesurable, nous avons également $E[I(\phi)_s | \mathcal{F}_t] = I(\phi)_t$.

Enfin,

$$\begin{aligned} \|I(\phi)\|_{L^2}^2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|I(\phi)_t\|_{L^2}^2 \\ &= \|I(\phi)_{t_2}\|_{L^2}^2 \\ &= E[\psi^2 (B_{t_2} - B_{t_1})^2] \\ &= E[\psi^2] (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

■

En comparant au résultat obtenu à l'exercice 1.5, nous voyons que

$$\|I(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

■

Cette propriété se généralise:

Théorème 1.12 I est une application linéaire isométrique de $(\mathcal{E}sc, \|\cdot\|_{H_2^2})$ vers $(M^2, \|\cdot\|_{L^2})$.

Preuve: Nous savons d'une part que I est linéaire. D'autre part si ϕ est de la forme $\psi \mathbf{1}_{[t_1, t_2]}$, il découle de l'exercice précédent que $I(\phi) \in M^2$. Par linéarité, cette propriété s'étend à tout $\phi \in \mathcal{E}sc$.

Remarquons que si $\phi \in \mathcal{E}sc$, alors $\phi = \sum_0^n \psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[}$ avec $t_1^k \leq t_2^k$, $\psi_k \in L^2(\mathcal{F}_{t_1^k})$ et $[t_1^k, t_2^k[\cap [t_1^{k'}, t_2^{k'}[= \emptyset$ si $k \neq k'$. Nous calculons alors:

$$\begin{aligned}
\|I(\phi)\|_{L^2}^2 &= E[I(\phi)_\infty^2] \\
&= E\left[\left(\sum_0^n I(\psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[})\right)_\infty^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_0^n \psi_k (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})\right)^2\right] \\
&= E\left[\sum_0^n \psi_k^2 (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})^2\right] \\
&\quad + 2E\left[\sum_{k < j} \psi_k \psi_j (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})(B_{t_2^j} - B_{t_1^j})\right] \\
&= \sum_0^n E[\psi_k^2] (t_2^k - t_1^k)
\end{aligned}$$

car, les intervalles $[t_1^k, t_2^k[$ et $[t_1^j, t_2^j[$ sont disjoints si $k < j$, donc $E[\psi_k \psi_j (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})(B_{t_2^j} - B_{t_1^j})] = 0$. Par ailleurs:

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{H_2^2}^2 &= E\left[\int_0^\infty \left(\sum_0^n \psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[}\right)^2 dt\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty \left(\sum_0^n \psi_k^2 \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[}\right) dt\right] \\
&= E\left[\sum_k \psi_k^2(\omega) (t_2^k - t_1^k)\right] \\
&= \sum_k E(\psi_k^2) (t_2^k - t_1^k) \\
&= \|I(\phi)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Nous concluons donc que $\|I(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}$: I est bien une isométrie. ■

Corollaire 1.13 Si $\{\phi_n\} \subset \mathcal{E}sc$ converge vers $\phi \in H_2^2$ au sens de $\|\cdot\|_{H_2^2}$, alors la suite $\{I(\phi_n)\}$ converge dans M^2 .

Si $\{\phi'_n\} \subset \mathcal{E}sc$ converge également ϕ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi'_n).$$

Preuve: En effet, si $\{\phi_n\}$ converge, il s'agit d'une suite de Cauchy dans H_2^2 donc, I étant linéaire et isométrique:

$$\|I(\phi_n) - I(\phi_m)\|_{L^2} = \|I(\phi_n - \phi_m)\|_{L^2} = \|\phi_n - \phi_m\|_{H_2^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi $\{I(\phi_n)\}$ est une suite de Cauchy dans M^2 et, M^2 étant complet, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n)$ existe. Si $\{\phi'_n\}$ est une autre suite convergent vers ϕ , nous pouvons en créer une troisième $\{\phi''_n\}$ qui prend alternativement ses éléments dans les suites $\{\phi_n\}$ et $\{\phi'_n\}$. Puisque $\{\phi''_n\}$ converge vers ϕ , la suite $\{I(\phi''_n)\}$ est convergente et toutes les sous-suites de $\{I(\phi''_n)\}$, $\{I(\phi_n)\}$ et $\{I(\phi'_n)\}$ en particulier, convergent donc vers une limite commune. ■

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'intégrale d'Itô:

Définition 1.14 (Intégrale d'Itô sur H_2^2) Si $\phi \in H_2^2$, il existe une suite $\{\phi_n\} \subset \mathcal{E}sc$ qui converge vers ϕ . Nous définissons $\bar{I}(\phi) := \lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n)$. Par le corollaire précédent, cette limite ne dépend pas de la suite $\{\phi_n\}$ choisie. $\bar{I}(\phi)$ est l'intégrale d'Itô du processus ϕ .

Exercice 1.15 Montrez que \bar{I} est linéaire et isométrique et que si $\phi \in \mathcal{E}sc$: $\bar{I}(\phi) = I(\phi)$.

Preuve: Soient ϕ et $\phi' \in H_2^2$, soient $\{\phi_n\}$ et $\{\phi'_n\} \subset \mathcal{E}sc$ telles que $\phi_n \rightarrow \phi$ et $\phi'_n \rightarrow \phi'$. Alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha\phi_n + \beta\phi'_n) \rightarrow (\alpha\phi + \beta\phi')$ et donc

$$\begin{aligned} \bar{I}(\alpha\phi + \beta\phi') &= L^2 - \lim I(\alpha\phi_n + \beta\phi'_n) \\ &= \alpha \lim I(\phi_n) + \beta \lim I(\phi'_n) \\ &= \alpha \bar{I}(\phi) + \beta \bar{I}(\phi') \end{aligned}$$

d'où \bar{I} est linéaire. Montrons que \bar{I} est isométrique:

$$\|\bar{I}(\phi)\|_{L^2} = \lim \|I(\phi_n)\|_{L^2} = \lim \|\phi_n\|_{H_2^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

Enfin si $\phi \in \mathcal{E}sc$, la suite constante $\phi_n := \phi$ est une suite dans $\mathcal{E}sc$ qui converge vers ϕ . Ainsi $\bar{I}(\phi) = \lim I(\phi_n) = I(\phi)$. ■

Définition 1.16 Nous noterons à présent $\bar{I}(\phi) = \int_0^\cdot \phi_t dB_t$, $\bar{I}(\phi)_s = \int_0^s \phi_t dB_t$ et $\int_a^b \phi_t dB_t = \bar{I}(\phi)_b - \bar{I}(\phi)_a$.

Remarque 1.17 Remarquons que $\bar{I}(\phi)$ a été défini globalement. Rien n'indique par exemple que $\bar{I}(\phi)_s$ ne dépend pas du comportement du processus ϕ après le temps s , propriété qui aurait été évidente dans le cadre d'une définition trajectoire par trajectoire de l'intégrale d'Itô.

L'exercice suivant indique qu'il en est bien ainsi:

Exercice 1.18 Si T est fixé, montrez que

$$\forall \phi \in H_2^2 : \bar{I}(\phi)_T = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,T]} \phi)_\infty.$$

Avec les notations intégrales, cela revient à dire:

$$\int_0^T \phi_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \phi_s dB_s$$

ou encore $\int_T^\infty \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \phi_s dB_s = 0$.

Preuve: Définissons les applications $J : H_2^2 \rightarrow L^2(\mathcal{F}_T)$ et $K : H_2^2 \rightarrow L^2(\mathcal{F}_\infty)$ comme suit:
 $J(\phi) := \bar{I}(\phi)_T$ et $K(\phi) := \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,T[}\phi)_\infty$.

J et K sont clairement linéaires puisque \bar{I} l'est. Montrons que ces applications sont également continues. En effet:

$$\|J(\phi)\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi)_T\|_{L^2} \leq \|\bar{I}(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

De même

$$\|K(\phi)\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[}\phi)_\infty\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})\|_{L^2} = \|\phi\mathbf{1}_{[0,T[}\|_{H_2^2},$$

d'où

$$\|K(\phi)\|_{L^2} = \sqrt{E\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right)} \leq \sqrt{E\left(\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right)} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

Posons à présent $\mathcal{F} := \{\phi \in H_2^2 \mid J(\phi) = K(\phi)\}$. Par continuité et linéarité de J et K , \mathcal{F} est un sous espace vectoriel fermé de H_2^2 .

Remarquons que, si ϕ est de la forme $\phi = \psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$, alors:

$$J(\phi) = \bar{I}(\phi)_T = \psi(B_{T \wedge t_2} - B_{T \wedge t_1})$$

et, puisque $[t_1, t_2[\cap [0, T[= [T \wedge t_1, T \wedge t_2[$, nous avons $\phi\mathbf{1}_{[0,T[} = \psi\mathbf{1}_{[T \wedge t_1, T \wedge t_2[}$. Ainsi

$$K(\phi) = \bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})_\infty = \psi(B_{T \wedge t_2} - B_{T \wedge t_1}) = J(\phi).$$

Ainsi, l'espace vectoriel \mathcal{F} contient tous les ϕ de la forme $\phi = \psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$. \mathcal{F} contient donc \mathcal{E}_{sc} qui est l'espace vectoriel engendré par ces ϕ . \mathcal{F} étant fermé, et \mathcal{E}_{sc} étant dense dans H_2^2 , nous avons établi que $H_2^2 \subset \mathcal{F}$: ce que nous voulions montrer. ■

Exercice 1.19 Montrez que si $\phi \in H_2^2$, si $A \in \mathcal{F}_t$ alors:

1. $\psi_s(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[t,\infty[}(s)\phi_s(\omega) \in H_2^2$.
2. $\int_0^\cdot \psi_s dB_s = \mathbf{1}_A \int_0^\cdot \mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi_s dB_s$.

Nous montrons en fait ici que si $Z \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ alors

$$\int_t^\infty Z \phi_s dB_s = Z \cdot \int_t^\infty \phi_s dB_s$$

Preuve:

1) Montrons que ψ est progressivement mesurable. Soit T fixé:

Si $T < t$ alors la restriction de ψ à $\Omega \times [0, T]$ est identiquement nulle donc $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ -mesurable.

Si $T \geq t$ alors $\mathbf{1}_A$ est \mathcal{F}_t -mesurable donc \mathcal{F}_T -mesurable et $\mathbf{1}_{[t,\infty[}$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable d'où $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{[t,\infty[}$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ -mesurable et, puisque $\phi \in H_2^2$, $\psi(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[t,\infty[}(s)\phi_s(\omega)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ -mesurable.

Calculons à présent $\|\psi\|_{H_2^2}$:

$$\|\psi\|_{H_2^2}^2 = E\left[\int_0^\infty \psi_s^2 ds\right] = E\left[\mathbf{1}_A \int_t^\infty \phi_s^2 ds\right] \leq E\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right] = \|\phi\|_{H_2^2}^2 < \infty.$$

Ainsi: $\psi \in H_2^2$.

2) Pour montrer la deuxième assertion, posons

$$J(\phi) := \bar{I}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t, \infty]} \phi) \text{ et } K(\phi) := \mathbf{1}_A \cdot \bar{I}(\mathbf{1}_{[t, \infty]} \phi).$$

Il est facile de voir que si ϕ est de la forme $\mathbf{1}_{[t_1, t_2]} \psi$, alors $J(\phi) = K(\phi)$. On montre aisément que J et K sont des applications linéaires continues de H_2^2 dans M^2 . Nous pouvons donc appliquer la preuve de l'exercice précédent. ■

Exercice 1.20 Si τ est un temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs: $\tau(\Omega) = \{t_1, \dots, t_n\}$ où $t_1 < \dots < t_n$, si $\phi \in H_2^2$, montrez que $\bar{I}(\phi)_\tau = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \tau]} \phi)_\infty$. En d'autres termes:

$$\int_0^\tau \phi_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0, \tau]}(s) \phi_s dB_s.$$

Montrez ensuite que cette relation est vérifiée pour tout temps d'arrêt τ .

Preuve: Considérons un temps d'arrêt τ discret. Alors, puisque $\{\tau = t_i\}$ est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable, nous obtenons avec les deux exercices précédents:

$$\begin{aligned} \bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \tau]} \phi)_\infty &= \bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\mathbf{1}_{[\tau, \infty]} \phi)_\infty \\ &= \bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}} \mathbf{1}_{[t_i, \infty]} \phi\right)_\infty \\ &= \bar{I}(\phi)_\infty - \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}} \bar{I}(\mathbf{1}_{[t_i, \infty]} \phi)_\infty \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}} (\bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\mathbf{1}_{[t_i, \infty]} \phi)_\infty) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}} \bar{I}(\mathbf{1}_{[0, t_i]} \phi)_\infty \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}} \bar{I}(\phi)_{t_i} \\ &= \bar{I}(\phi)_\tau. \end{aligned}$$

Si τ est un temps d'arrêt général, il existe une suite $\{\tau_n\}$ de temps d'arrêt discrets telle que $\tau_n \searrow \tau$ (voir la démonstration du théorème d'arrêt, Ch. 3). Par continuité des trajectoires de $\bar{I}(\phi)$, nous avons:

$$\bar{I}(\phi)_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{I}(\phi)_{\tau_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \tau_n]} \phi)_\infty$$

Pour terminer la démonstration, il nous suffit donc de montrer que les processus $\mathbf{1}_{[0, \tau_n]} \phi$ converge dans H_2^2 vers $\mathbf{1}_{[0, \tau]} \phi$. Mais ceci suit le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à la mesure $P \otimes \lambda$ sur $\Omega \times [0, \infty[$: d'une part $\mathbf{1}_{[0, \tau_n]} \phi$ converge ponctuellement vers $\mathbf{1}_{[0, \tau]} \phi$ et d'autre part, $\forall n : |\mathbf{1}_{[0, \tau_n]} \phi| \leq |\phi|$. \blacksquare

Exercice 1.21 Si τ est un temps d'arrêt, et X un processus, nous rappelons que la notation X^τ désigne le processus $t \rightarrow X_t^\tau := X_{\tau \wedge t}$. Améliorez les démonstrations antérieures pour prouver que

$$\bar{I}(\phi)^\tau = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \tau]} \phi).$$

Remarque 1.22 Il suit de l'exercice précédent que si $\sigma \leq \tau$ sont deux temps d'arrêt, alors les processus $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \sigma]} \phi)$ et $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \tau]} \phi)$ concident jusqu'au temps σ : $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \sigma]} \phi) = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \tau]} \phi)^\sigma$. Nous mettons à profits cette remarque dans la suite pour étendre la définition de l'intégrale d'Itô \bar{I} à une classe plus vaste de processus.

Définition 1.23 (Martingale locale) Un processus X est une $\{\mathcal{F}_t\}$ -martingale locale continue s'il est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ et s'il existe une suite croissante τ_n de temps d'arrêt telle que $\tau_n \nearrow \infty$ P -pp et pour tout n : $X^{\tau_n} \in M^2$. Nous noterons M^{loc} l'ensemble des martingales locales continues et M^{loc} le quotient de M^{loc} par la relation d'équivalence $\stackrel{modif}{\equiv}$.

Exercice 1.24 Montrez que toute martingale continue est une martingale locale.

Remarque 1.25 Contrairement à ce que pourrait laisser croire la terminologie, une martingale locale n'est en général pas une martingale. L'exercice suivant illustre ce phénomène.

Exercice 1.26 Soit V une variable aléatoire finie positive telle que $E[V] = \infty$. Soit par ailleurs B un mouvement Brownien indépendant de V . Posons $\mathcal{F}_t := \sigma(V, B_s, s \in [0, t])$ et $X_t := V \cdot B_t$.

1) Montrez que X_t n'est pas dans L^1 si $t > 0$. X ne peut donc pas être une martingale.

2) Montrez que B est un $\{\mathcal{F}_t\}$ -mouvement brownien.

3) Soit $\tau_n := \mathbf{1}_{\{V \leq n\}} n$. Montrez que τ_n est un $\{\mathcal{F}_t\}$ -temps d'arrêt et que $\tau_n \nearrow \infty$.

4) Montrez que $X_s^{\tau_n} = \mathbf{1}_{V \leq n} (V \wedge n) \cdot B_{s \wedge \tau_n}$. Concluez que $X^{\tau_n} \in M^2$.

Exercice 1.27 Montrez que si $X \in M^{loc}$, si τ est un temps d'arrêt tel que X^τ soit un processus borné, alors X^τ est une martingale.

Preuve: Voilà une idée pour le cas $X \in M^2$. Montrer d'abord que X adapté est une martingale si et seulement si pour tout temps d'arrêt borné T , on a

$$E(X_T) = E(X_0).$$

(une direction est claire, pour l'autre utiliser le temps d'arrêt particulier $T = t \mathbf{1}_{A \leq s} + \mathbf{1}_{A > s}$ si $A \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$)

Utiliser ensuite cela pour conclure que $X_S^T = X_0^T$ pour tout S temps d'arrêt borné.

En général on ne peut pas remplacer borné par U.I. dans l'énoncé précédent.

Définition 1.28 (*L'espace H_2^{loc}*) H_2^{loc} désigne l'ensemble des processus à progressivement mesurables tels que pour tout $T \in [0, \infty[$:

$$\int_0^T a_t^2 dt < \infty \text{ P-P.P.}$$

Pour un tel processus, nous noterons τ_n^a le temps d'arrêt

$$\tau_n^a := \inf\{t \mid \int_0^t a_s^2 ds \geq n\}.$$

Le processus $\mathbf{1}_{[0, \tau_n^a]}$ est alors dans H_2^2 . De plus, si $a \in M^{loc}$, τ_n^a forme une suite croissante de temps d'arrêt qui tend P-pv vers ∞ .

Remarque 1.29 Nous voulons à présent définir $J(\phi) := \int_0^\cdot \phi_s dB_s$ pour un processus ϕ dans H_2^{loc} . Il est assez naturel d'exiger que $\forall n$: $J(\phi)_{\tau_n^\phi}$ concide avec $\int_0^{\tau_n^\phi} \phi_s dB_s$ interprété comme l'intégrale $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \tau_n^\phi]} \phi)_\infty$ définie précédemment. Nous exigerons en fait que les processus $J(\phi)$ et $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0, \tau_n^\phi]} \phi)$ concident jusqu'au temps τ_n^ϕ . Le théorème suivant indique qu'un tel $J(\phi)$ existe.

Théorème 1.30 Si $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration complète, alors $\forall \phi \in H_2^{loc}$, il existe un processus $J(\phi)$ unique dans M^{loc} tel que $\forall n$: $J(\phi)^{\tau_n^\phi} = \bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0, \tau_n^\phi]})$.

Preuve: $\bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0, \tau_n^\phi]})$ est un élément de M^2 soit une classe d'équivalence pour la relation \equiv^{modif} . Choisissons un représentant Y_n de cette classe. Si $n < m$, l'identité $\bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0, \tau_n^\phi]}) = \bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0, \tau_m^\phi]})^{\tau_n^\phi}$ de la remarque 1.22 se traduit en terme de Y_n et Y_m par $Y_n \equiv^{\text{modif}} Y_m^{\tau_n^\phi}$. L'exercice 1.40, Ch. 3 nous apprend que Y_n et Y_m sont indistinguables. Ainsi $P(A_{n,m}) = 1$, où $A_{n,m} := \{\omega \mid \forall t \geq 0 : Y_{n,t}(\omega) = Y_{m,t}^{\tau_n^\phi}(\omega)\}$. Soit $A := \bigcap_{n < m} A_{n,m}$. Nous avons également $P(A) = 1$.

Soit $B := \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^\phi(\omega) = \infty\}$. Nous avons alors $P(B) = 1$, et donc $P(A') = 1$, où $A' := A \cap B$. Si ω appartient à A' , définissons $Y_t(\omega)$ comme suit: il existe n tel que $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$. Posons $Y_t(\omega) := Y_{n,t}(\omega)$. Remarquons que cette définition ne dépend pas du n choisi tel que $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$. En effet, si $t \leq \tau_m^\phi(\omega)$, et par exemple $n < m$, alors $Y_{n,t}(\omega) = Y_{m,t}^{\tau_n^\phi}(\omega) = Y_{m,t \wedge \tau_n^\phi}(\omega) = Y_{m,t}(\omega)$.

Le processus Y est donc bien défini sur A' . Définissons alors $Y_t(\omega) := 0$ si $\omega \notin A'$. Le processus Y obtenu est donc continu, et si $\omega \in A'$ nous avons $Y_{n,t}(\omega) = Y_t(\omega)$ si $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$ et si $t > \tau_n^\phi(\omega)$, $Y_{n,t}(\omega) = Y_{n, \tau_n^\phi(\omega)}(\omega) = Y_{\tau_n^\phi(\omega)}^{\tau_n^\phi}(\omega)$. Nous venons de montrer que $Y_t^{\tau_n^\phi} = Y_{n,t} \mathbf{1}_{A'}$.

Aussi $\forall \omega$: $Y_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A'} Y_{n,t}(\omega)$. Puisque la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ est complète et que $P(A') = 1$, $\mathbf{1}_{A'} Y_{n,t}$ est \mathcal{F}_t -mesurable et en passant à la limite, Y_t l'est aussi: Y est

adapté à $\{\mathcal{F}_t\}$. De plus, la relation $Y_t^{\tau_n^\phi} = Y_{n,t} \mathbf{1}_{A'}$ implique que $Y_{n,t} = Y_t^{\tau_n^\phi}$ P -ps. Ainsi $Y_n \stackrel{\text{modif}}{\equiv} Y^{\tau_n^\phi}$. Puisque $Y_n \in \mathcal{M}^2$, cette relation indique que $Y \in \mathcal{M}^{loc}$. Nous définissons enfin $J(\phi)$ comme la classe d'équivalence sur \mathcal{M}^{loc} pour $\stackrel{\text{modif}}{\equiv}$ qui contient Y . Nous avons alors $\forall n : J(\phi)^{\tau_n^\phi} = \bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0, \tau_n^\phi[})$.

Il nous reste à montrer l'unicité de $J(\phi)$: soit $Z \in \mathcal{M}^{loc}$ tel que $\forall n : Y_n \stackrel{\text{modif}}{\equiv} Z^{\tau_n^\phi}$, alors $\forall n : Y^{\tau_n^\phi} \stackrel{\text{modif}}{\equiv} Y_n \stackrel{\text{modif}}{\equiv} Z^{\tau_n^\phi}$. Puisque $\tau_n^\phi \nearrow \infty$, cela implique clairement que $Y \stackrel{\text{modif}}{\equiv} Z$. ■

Remarque 1.31 Montrez que l'application $J: H_2^{loc} \rightarrow M^{loc}: \phi \rightarrow J(\phi)$ est linéaire. Montrez également que si $\phi \in H_2^2$, alors $J(\phi) = \bar{I}(\phi)$.

Définition 1.32 $J(\phi)$ est l'intégrale de Itô du processus $\phi \in H_2^{loc}$. Nous adopterons les notations intégrales: $J(\phi)_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ et $J(\phi) = \int_0^\cdot \phi_s dB_s$.

Exercice 1.33 Nous avons défini l'application $J : H_2^{loc} \rightarrow M^{loc}$ comme l'intégrale par rapport à un mouvement brownien donné B quelconque. Si B^1 et B^2 sont deux mouvements browniens indépendants, nous savons que $B^3 := \frac{1}{\sqrt{2}}(B^1 + B^2)$ est encore un mouvement brownien. A chacun de ces mouvements browniens correspond donc une application $J : H_2^{loc} \rightarrow M^{loc}$ différente que nous noterons respectivement J_1, J_2 et J_3 . Montrez que $J_3(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1(\phi) + J_2(\phi))$. En notation intégrale, cela revient à montrer que

$$\int_0^\cdot \phi_t dB_t^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\cdot \phi_t dB_t^1 + \int_0^\cdot \phi_t dB_t^2 \right).$$

1.3 Les semi-martingales et leurs crochets:

Définition 1.34 On définit \mathcal{H}_1^{loc} comme l'ensemble des processus progressivement mesurables ϕ pour tout $T < \infty$ tels que

$$\int_0^T |\phi_s| ds < \infty \text{ } P\text{-ps.}$$

H_1^{loc} est le quotient de \mathcal{H}_1^{loc} par la relation d'égalité $P \otimes \lambda$ -pp, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, \infty[$.

Définition 1.35 Un processus X adapté à \mathcal{F}_t est une semi-martingale si $\exists X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, $a \in H_2^{loc}$ et $b \in H_1^{loc}$ tels que:

$$X = X_0 + \int_0^\cdot a_s dB_s + \int_0^\cdot b_s ds. \quad (2)$$

Plus généralement, si B^1, \dots, B^n sont des $\{\mathcal{F}_t\}$ -mouvements browniens indépendants, si $X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, $a^1, \dots, a^n \in H_2^{loc}$ et $b \in H_1^{loc}$, alors nous considérerons également que le

processus X suivant est une semi-martingale

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^\cdot a_s^i dB_s^i + \int_0^\cdot b_s ds \quad (3)$$

Remarque 1.36 On définit habituellement une semi martingale comme la somme $M + A$ d'une martingale locale M et d'un processus A adapté à 1-variation finie sur tout intervalle borné. Notre définition est plus restrictive puisqu'elle impose l'existence d'une représentation intégrale des processus M et A .

Théorème 1.37 Si le processus X est une semi-martingale, alors la décomposition (2) est unique.

Preuve: Par linéarité des intégrales, montrer l'unicité de la représentation (2), revient à montrer que, si $\alpha \in H_2^{loc}$ et $\beta \in H_1^{loc}$ vérifient

$$\int_0^\cdot \alpha_s dB_s = \int_0^\cdot \beta_s ds,$$

alors $\alpha = \beta = 0$.

Posons $M := \int_0^\cdot \alpha_s dB_s$, et définissons:

$$\tau_n = \inf\{t : |M_t| \geq n \text{ ou } \int_0^t |\beta_s| ds \geq n\}.$$

Montrons d'abord que le processus que M^{τ_n} est identiquement nulle: soit t_1, \dots, t_n tels que $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$. Alors, puisque par l'exercice 1.27, M^{τ_n} est une martingale, nous avons:

$$\begin{aligned} E[(M_t^{\tau_n})^2] &= \sum_i E[(M_{t_{i+1}}^{\tau_n})^2 - (M_{t_i}^{\tau_n})^2] \\ &= \sum_i E[(M_{t_{i+1}}^{\tau_n} - M_{t_i}^{\tau_n})^2] \\ &\leq E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \sum_i |M_{t_{i+1}}^{\tau_n} - M_{t_i}^{\tau_n}|] \\ &= E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \sum_i |\int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta_s \mathbf{1}_{s \leq \tau_n} ds|] \\ &\leq E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \int_0^t |\beta_s| ds] \\ &\leq n \cdot E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}|]. \end{aligned}$$

Puisque M^{τ_n} est continue, ses trajectoires sont uniformément continues sur $[0, t]$ et donc $\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \rightarrow 0$ P -pp lorsque $\max_j |t_{j+1} - t_j| \rightarrow 0$. Puisque $|M_{t_{j+1}}^{\tau_n}| \leq$

n , par définition de τ_n , il suit du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que $E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}|] \rightarrow 0$

Ainsi, $\forall t$ nous avons obtenu

$$E[(M_t^{\tau_n})^2] = 0$$

et donc M^{τ_n} est donc identiquement nulle. Puisque $\tau_n \nearrow \infty$ P -pp, $0 = M_t^{\tau_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_t$. P -ps. Ceci implique que M est identiquement nul, et donc α et β sont nuls. ■

Le lemme qui suit est en fait une conséquence de la preuve ci-dessus. Il est utile de la retenir.

Proposition 1.38 *Si M est une martingale locale continue à variation bornée, alors $M_t \equiv 0$ pour tout t .*

Le résultat suivant généralise le théorème sur la convergence de la variation quadratique du mouvement brownien (Ch. 2). Soit $\Delta = \{t_1, \dots, t_n\}$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, une partition de l'intervalle $[0, T]$. Si X est un processus, nous définissons

$$T^\Delta(X) := \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

Nous allons traiter d'abord le cas de l'espace H_2^2 .

Théorème 1.39 *Si $a \in H_2^2$ et*

$$X = \int_0^\cdot a_s dB_s,$$

alors

$$T^\Delta(X) \rightarrow \int_0^T a_s^2 ds$$

en L^1 lorsque $|\Delta| \rightarrow 0$

Preuve: Observons d'abord que si le processus a est dans $\mathcal{E}sc$, le résultat est une conséquence de la propriété de variation quadratique du mouvement brownien. En effet, pour tout intervalle de type $]a, b]$ ou u prend la valeur constante c , on a une contribution du type

$$c^2 \sum_{a \leq t_{j-1} \leq t_j \leq b} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$$

qui converge vers $c^2(b - a)$.

Considérons maintenant $a \in H_2^2$. Par le théorème de densité de $\mathcal{E}sc$ dans H_2^2 , il existe une suite a^k de $\mathcal{E}sc$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \int_0^T |a_t - a_t^k|^2 dt = 0.$$

On peut supposer que le processus a^k est constant sur $[t_j, t_{j+1})$, sinon il suffit d'inclure les points de la partition associés à a^k dans les t_j .

On aura, en posant $X_t^k = \int_0^t a_s^k dB_s$

$$\begin{aligned} E \left(\left| T^\Delta(X) - \int_0^t a_s^2 ds \right| \right) &\leq E(|T^\Delta(X) - T^\Delta(X^k)|) \\ &\quad + E \left(\left| T^\Delta(X^k) - \int_0^t (a_s^k)^2 ds \right| \right) \\ &\quad + E \left(\left| \int_0^t (a_s^k)^2 ds - \int_0^t (a_s)^2 ds \right| \right). \end{aligned}$$

On peut borner le premier terme en utilisant l'inégalité de Schwartz et l'isométrie de l'intégrale stochastique

$$\begin{aligned} E(|T^\Delta(X) - T^\Delta(X^k)|) &= E \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_s + a_s^k) dB_s \right) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_s - a_s^k) dB_s \right) \right] \\ &\leq \left(E(T^\Delta(X + X^k)) \right)^{\frac{1}{2}} \left(E(T^\Delta(X - X^k)) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[E \left(\int_0^t (a_s + a_s^k)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} E \left(\int_0^t (a_s - a_s^k)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Observons que la borne obtenue ne dépend pas de n et converge quand $k \rightarrow \infty$. Donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$E \left(\left| T^\Delta(X) - \int_0^t a_s^2 ds \right| \right) \leq \varepsilon + E \left(\left| T^\Delta(X^k) - \int_0^t (a_s^k)^2 ds \right| \right).$$

Il suffit maintenant de prendre la limite lorsque la norme de la division tend vers 0. ■

Nous présentons également un cas plus général avec une preuve un peu différente.

Théorème 1.40 *Si $a \in H_2^{loc}$ et $X = \int_0^t a_s dB_s$, alors $T^\Delta(X) \rightarrow \int_0^T a_s^2 ds$ en probabilité lorsque $|\Delta| \rightarrow 0$*

Preuve: Soit $a \in H_2^{loc}$ et $X = \int_0^t a_s dB_s$. Posons

$$\tau_n := \inf \{ t : |X_t| \geq n \text{ ou } \int_0^t a_s^2 ds \geq n \},$$

$a_n := \mathbf{1}_{[0, \tau_n[} a$ et $X_n := \int_0^{\cdot} a_{n,s} dB_s$. Il suit de la définition de $\int_0^{\cdot} a_s dB_s$ que $X_n = X^{\tau_n}$, et nous avons aussi $\int_0^T a_{n,s}^2 ds = \int_0^{T \wedge \tau_n} a_s^2 ds$, de sorte que sur $\{\tau_n \geq T\}$, pour tout Δ , $T^\Delta(X_n) = T^\Delta(X)$ et $\int_0^T a_{n,s}^2 ds = \int_0^T a_s^2 ds$. Il nous suffit donc d'établir le résultat pour les processus $a \in H_2^2$ tels que $|X|$ et $\int_0^\infty a_s^2 ds$ soient bornés: le résultat sera vrai pour a_n et donc, $\forall \delta > 0$, $P(|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta)$ est borné par

$$P(\tau_n < T) + P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta\}).$$

$P(\tau_n < T)$ est aussi petit que l'on désire en prenant n suffisamment grand et $P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta\})$ est égal à

$$P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X_n) - \int_0^T a_{n,s}^2 ds| > \delta\}).$$

Ce dernier terme est aussi petit que l'on désire en prenant $|\Delta|$ suffisamment petit.

Supposons donc que $a \in H_2^2$ est tel que $|X|$ et $\int_0^\infty a_s^2 ds$ soient bornés par M . Notons $\Delta X_i := X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ et calculons $E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}]$: Si $A \in \mathcal{F}_{t_i}$, il suit de l'exercice 1.19 que

$$\mathbf{1}_A \Delta X_i = \mathbf{1}_A \int_0^\infty \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) a_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) a_s dB_s.$$

Aussi:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{1}_A (\Delta X_i)^2] &= E[(\mathbf{1}_A \Delta X_i)^2] = I(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(a))\|_{L^2}^2 \\ &= \|\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(a)\|_{H_2^2}^2 = E[\mathbf{1}_A \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds] \\ &= E[\mathbf{1}_A E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds | \mathcal{F}_{t_i}]] \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_{t_i}$, nous avons montré que

$$E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}] = E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds | \mathcal{F}_{t_i}].$$

Ainsi, si l'on pose $V_0 := 0$ et $V_{i+1} := V_i + (\Delta X_i)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds$, V est une $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_{i=0, \dots, n}$ -martingale et $V_n = T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds$. Dès lors:

$$\begin{aligned} E[(T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds)^2] &= E[V_n^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E[(V_{i+1} - V_i)^2] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[(\Delta X_i)^2 - E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}]]^2 \leq \sum_{i=0}^{n-1} E[(\Delta X_i)^4], \quad (4) \end{aligned}$$

car, en posant $S := (\Delta X_i)^2$, on a:

$$E[S^2] = E[(S - E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2] + E[(E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2] \geq E[(S - E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2].$$

Remarquons ensuite que

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta X_i)^4\right] \leq E[\Delta X_*^2 \cdot T^\Delta(X)] \leq \sqrt{E[\Delta X_*^4]} \cdot \sqrt{E[(T^\Delta(X))^2]},$$

où $\Delta X_* := \max_i(\Delta X_i)$. Puisque X est un processus continu, ΔX_* tend P -pp vers 0 lorsque $|\Delta| \rightarrow 0$, et par ailleurs ΔX_* est borné par $2M$, puisque X est borné par M . Partant $\sqrt{E[\Delta X_*^4]}$ tend vers 0.

Nous allons montrer maintenant que $E[(T^\Delta(X))^2]$ est borné. Nous aurons ainsi démontré la convergence L^2 de $T^\Delta(X)$ vers $\int_0^T a_s^2 ds$, et donc la convergence en probabilité. En utilisant l'inégalité (4), le fait que X est une martingale bornée par M et que $\int_0^\infty a_s^2 ds \leq M$, on trouve

$$\begin{aligned} \|T^\Delta(X)\|_{L^2} &\leq \|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds\|_{L^2} + \|\int_0^T a_s^2 ds\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{E\left[\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta X_i)^4\right] + M} \\ &\leq \sqrt{(2M)^2 E\left[\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta X_i)^2\right] + M} \\ &= \sqrt{(2M)^2 E[X_T^2] + M} \\ &= 2M^2 + M. \end{aligned}$$

■

Définition 1.41 *Un processus A continu tel que pour tout T : $T^\Delta(X)$ converge en probabilité vers A_T lorsque le diamètre $|\Delta|$ de la partition de $[0, T]$ tend vers 0 s'appelle crochet de X et se note, $\langle X, X \rangle := A$.*

Remarque 1.42 *Le théorème précédent nous indique que si $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$ où $a \in H_2^{loc}$, alors $\langle X, X \rangle_t = \int_0^t a_s^2 ds$.*

Définition 1.43 *(Crochet croisé) Si X et Y sont deux processus, on note*

$$T^\Delta(X, Y) := \sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \cdot (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

Un processus A limite en probabilité des $T^\Delta(X, Y)$ s'appelle crochet croisé de X et Y et se note $\langle X, Y \rangle$.

L'exercice qui suit donnera le crochet d'une semimartingale ainsi que le crochet croisé d'une martingale est d'un processus à variation bornée (absolument continu)

Exercice 1.44 1) Montrez que si $Y = \int_0^t b_s ds$ où $b \in H_1^{loc}$, alors $\langle Y, Y \rangle = 0$.

2) Si $X = \int_0^t a_s dB_s$ où $a \in H_2^{loc}$, montrez que $T^\Delta(X, Y) \rightarrow 0$ en probabilité. (i.e. $\langle X, Y \rangle = 0$).

3) Si $X = X_0 + \int_0^t a_t dB_t + \int_0^t b_t dt$ est une semi-martingale, montrez que $\langle X, X \rangle_t = \int_0^t a_s^2 ds$.

4) Montrez que $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\langle X + Y, X + Y \rangle + \langle X - Y, X - Y \rangle)$ et calculez le crochet croisé $\langle X, Y \rangle$ de deux semi-martingales $X = X_0 + \int_0^t a_t dB_t + \int_0^t b_t dt$ et $Y = Y_0 + \int_0^t a'_t dB_t + \int_0^t b'_t dt$.

5) Supposons que B_1 et B_2 soient deux $\{\mathcal{F}_t\}$ -mouvements browniens indépendants. Calculez $\langle B_1 + B_2, B_1 + B_2 \rangle$, $\langle B_1 - B_2, B_1 - B_2 \rangle$ et finalement montrez que $\langle B_1, B_2 \rangle = 0$.

Exercice 1.45 L'objet de cet exercice est de montrer que si B^1 et B^2 sont des mouvements browniens indépendants, si $a^1, a^2 \in H_2^{loc}$ et $X^i := \int_0^t a_t^i dB_t^i$, alors $\langle X^1, X^2 \rangle = 0$.

1) Montrez que pour démontrer cette affirmation, il suffit de la prouver pour des processus a^i tels que X^i et $\int_0^t (a_s^i)^2 ds$ soient bornés par une constante M . Nous supposons donc que ces hypothèses sont vérifiées dans la suite de l'exercice.

2) Soit $S > T$ et $A \in \mathcal{F}_T$, et considérons l'application

$$F : H_2^2 \times H_2^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \rightarrow F(u, v) := E[\mathbf{1}_A \int_T^S u_t dB_t^1 \cdot \int_T^S v_t dB_t^2].$$

Montrer que F est bilinéaire et continue:

$$|F(u, v)| \leq \|u\|_{H_2^2} \cdot \|v\|_{H_2^2}.$$

3) Montrez que si $u = \phi \mathbf{1}_{[t^1, t^2[}$, $v = \psi \mathbf{1}_{[s^1, s^2[}$, avec $t^1 < t^2$, $\phi \in L^2(\mathcal{F}_{t^1})$, $s_1 < s_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{s_1})$, alors $F(u, v) = 0$.

Concluez que $\forall u, v \in H_2^2 : F(u, v) = 0$.

4) Montrez que le processus $Z_t = X_t^1 \cdot X_t^2$ est une martingale.

5) Soit Δ une partition de $[0, T]$. Nous reprenons les notations de l'exercice précédent et du théorème 1.40. Montrez que

$$2(\Delta Z_i)^2 \leq (\Delta X_i^1)^4 + (\Delta X_i^2)^4$$

6) Montrez que $E[(T^\Delta(X^1, X^2))^2] = E[\sum_{i=1}^{n-1} (\Delta Z_i)^2]$. En utilisant la fin de la preuve du théorème 1.40, montrez que $T^\Delta(X^1, X^2) \rightarrow 0$ dans L^2 lorsque $|\Delta|$ tend vers 0.

7) En utilisant les résultats de cet exercice et du précédent, calculez le crochet $\langle X, X \rangle$ de la semi-martingale générale définie à la définition 1.35 formule (3).

2 Formule de changement de variable (formule d'Itô)

L'intégrale stochastique par rapport à une semimartingale sera définie de la manière suivante.

Définition 2.1 Si v_t est progressivement mesurable, on convient alors d'écrire

$$\int_0^\cdot v_t dX_t := \int_0^\cdot v_t \cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot v_t \cdot b_t dt.$$

Voici une première étape vers l'obtention de la formule d'Itô.

Exercice 2.2 Si $X = X_0 + \int_0^\cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot b_t dt$ est une semi-martingale alors pour tout t :

$$X_t^2 \stackrel{P\text{-pp}}{=} X_0^2 + \int_0^t 2X_s dX_s + \int_0^t d\langle X, X \rangle_s$$

En particulier, les processus se situant de part et d'autre de l'égalité sont indistinguables.

Preuve: Comme pour la démonstration précédente, par arrêt à des temps τ_n appropriés, il suffit de démontrer le corollaire pour des processus tels que X , $\int_0^\infty a_s^2 ds$ et $\int_0^\infty |b_s| ds$ soient bornés.

Fixons T et remarquons que si Δ est une partition de $[0, T]$, alors:

$$\begin{aligned} X_T^2 &= X_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2) = X_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1} ((X_{t_i} + \Delta X_i)^2 - X_{t_i}^2) \\ &= X_0^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \Delta X_i + \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta X_i)^2 \\ &= X_0^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s dB_s + 2 \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} b_s ds + T^\Delta(X) \end{aligned}$$

Utilisant le fait que X est borné et continu, il est aisé de remarquer que le processus

$$\phi_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) a_s$$

converge vers $X_s a_s$ dans H_2^2 lorsque $|\Delta| \rightarrow 0$. La première somme convergera donc dans L^2 vers $2 \int_0^T X_s a_s dB_s$ et donc aussi en probabilité. Par un raisonnement analogue la deuxième somme convergera vers $2 \int_0^T X_s b_s ds$ en probabilité. Enfin $T^\Delta(X)$ converge en probabilité vers $\langle X, X \rangle$ par définition du crochet de X . La première assertion est donc démontrée.

Les processus d'une part et de l'autre part de l'égalité sont continus. Nous venons de démontrer qu'ils sont des modifications l'un de l'autre. Ils sont donc indistinguables, comme il ressort de l'exercice 1.40, Ch. 3. ■

Exercice 2.3 Si X et Y sont deux semi-martingales, montrez que

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s.$$

Preuve: On sait que $X_t Y_t = \frac{1}{4}[(X_t + Y_t)^2 - (X_t - Y_t)^2]$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent aux martingales $X + Y$ et $X - Y$. ■

Le dernier exercice montre que le produit de deux semi-martingales est encore une semi-martingale. Le théorème suivant montre qu'en fait une fonction régulière d'une semi-martingale en est encore une:

Théorème 2.4 (Formule d'Itô) Si X est une semimartingale de la forme (2) et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) a_s dB_s + \int_0^t f'(X_s) b_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) a_s^2 ds \quad (5)$$

ou, autrement dit

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Preuve: Nous allons donner les idées de la démonstration dans le cas particulier $b = 0$.

Par un argument de localisation, on peut supposer que f, f', f'' sont bornées. En effet, pour tout $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \inf\{t \geq 0; |X_0| + \left| \int_0^t a_s dB_s \right| + \left| \int_0^t a_s^2 ds \right| \geq n\} \wedge n.$$

Il est clair que T_n est un temps d'arrêt tel que $T_n \nearrow \infty$. Considérons la semimartingale $X_{t \wedge T_n}$. Alors

$$|X_{t \wedge T_n}| \leq n$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $t \geq 0$. Il suffit de prouver (5) pour $X_{t \wedge T_n}$ à la place de X_t (car après on prend la limite quand $n \rightarrow \infty$). De cette façon, tout se réduit à prouver (5) pour X tel que

$$\left| \int_0^t a_s dB_s \right| + |X_t| \leq c$$

et dans ce cas il y a que les valeurs de f, f', f'' sur le compact $[0, t] \times B(\bar{0}, c)$ qui interviennent. Donc f, f', f'' peuvent être supposées continues à support compact, donc bornées.

D'une autre part, en approximant a par une suite de processus bornés de $\mathcal{E}sc$ telle que

$$P\left(\int_0^t (a_s - a_s^n)^2 ds > \varepsilon\right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prouver (5) pour un processus a escalier borné.

Considérons $t_j = \frac{tj}{n}$. On peut supposer par un argument standard que le processus a est constant sur $[t_j, t_{j+1})$, sinon il suffit d'inclure les points de la partition associés à a dans les t_j .

La formule de Taylor d'ordre 2 nous donne

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{j=1}^n (f(X_{t_j}) - f(X_{t_{j-1}})) \\ &= f(X_0) + \sum_{j=1}^n f'(X_{t_{j-1}}) \Delta X_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n f''(\bar{X}_j) (\Delta X_j)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

où $\Delta X_j = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ et \bar{X}_j est un point situé entre $X_{t_{j-1}}$ et X_{t_j} .

La première somme à droite de (6) converge dans L^2 vers $\int_0^t f'(X_s) a_s dB_s$. En effet

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{j=1}^n f'(X_{t_{j-1}}) \Delta X_j - \int_0^t f'(X_s) a_s dB_s \right]^2 \\ &= E \left(\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f'(X_{t_{j-1}}) - f'(X_s))^2 a_s^2 ds \right) \\ &\leq K^2 t E \left(\sup_{|s-r| \leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \right) \end{aligned}$$

en assumant que a est majoré par la constante K . Cela converge vers zero car $f(X_t)$ est continu est borné.

La deuxième somme à droite de (6) converge dans L^2 vers

$$\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) a_s^2 ds$$

car

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n f''(\bar{X}_j) (\Delta X_j)^2 - \int_0^t f''(X_s) a_s^2 ds \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n (f''(\bar{X}_j) - f''(X_{t_{j-1}})) (\Delta X_j)^2 \right|^2 + \left| f''(X_{t_{j-1}}) \left((\Delta X_j)^2 - \int_{t_{j-1}}^{t_j} a_s^2 ds \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f''(X_{t_{j-1}}) - f''(X_s)) a_s^2 ds \right| \\ &:= a_1 + a_2 + a_3. \end{aligned}$$

Les termes a_1 et a_3 se traitent par les majorations

$$a_1 \leq \sup_{|r-s| \leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \sum_{j=1}^n (\Delta X_j)^2$$

et

$$a_3 \leq \sup_{|r-s| \leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \int_0^t a_s^2 ds$$

donc ils convergent vers zero.

Voyons le terme a_2 . Notons ϕ_j la valeur du processus escalier a sur $[t_{j-1}, t_j[$. Comme $\Delta X_j = \phi_j \Delta B_j$ et en posant

$$d_j := \phi_j f''(X_{t_{j-1}})$$

on obtient en utilisant l'indépendance des accroissements du brown ien et en notant $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$

$$\begin{aligned} E(a_2^2) &\leq E \left[\left(\sum_{j=1}^n d_j ((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^n E \left(d_j^2 ((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^n E d_j^2 E ((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n E d_j^2 E ((\Delta B_j)^4 - 2(\Delta B_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2) \\ &= 2 \sum_{j=1}^n E d_j^2 (\Delta t_j)^2 \leq \frac{2t}{n} \sum_{j=1}^n E d_j^2 (\Delta t_j) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.5 Parfois on utilise la relation différentielle

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X, X \rangle_t$$

Exercice 2.6 Comparer la formule d'Itô pour $f(x) = x^2$ avec celle donne par l'exercice 2.2.

Théorème 2.7 (Formule d'Itô pour des fonctions qui dépendent de temps) Soit $f = f(t, x)$ une fonction de classe $C^{1,2}$ et soit $Y_t = f(t, X_t)$ si X est une semimartingale de la forme (2). Alors

$$\begin{aligned} f(t, Y_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) a_s dB_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) b_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) a_s^2 ds. \end{aligned}$$

On présente la version multidimensionnelle de la formule d'Itô ainsi que le schéma de la preuve.

Théorème 2.8 (Formule d'Itô multi-dimensionnelle) Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est C^2 , si

$$X^j = X_0^j + \sum_k \int_0^\cdot a_s^{k,j} dB_s^k + \int_0^\cdot b_s^j ds$$

sont des semi-martingales et si $X := (X^1, \dots, X^d)$, alors:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j,j'} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{j'}}(X_s) d\langle X^j, X^{j'} \rangle_s. \end{aligned} \quad (7)$$

Preuve: Par la technique d'arrêt des démonstrations précédentes, il suffit de démontrer le résultat pour les semi-martingales X à valeurs dans un ensemble compact K de \mathbb{R}^d . Soit \mathcal{V} la classe des fonctions $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le théorème.

Les fonctions constantes ainsi que les fonctions

$$g^j : x = (x^1, \dots, x^d) \rightarrow g^j(x) := x^j$$

sont dans \mathcal{V} .

Par linéarité en f de la formule (7), si f et g sont dans \mathcal{V} et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors clairement $\alpha f + \beta g \in \mathcal{V}$.

Montrons que si f et g sont dans \mathcal{V} alors $h := f \cdot g$ l'est également. Soit $F_t := f(X_t)$, $G_t := g(X_t)$, $H_t := f(X_t)g(X_t)$, Par d'exercice 2.3, nous avons:

$$dH_t = F_t dG_t + G_t dF_t + d\langle F, G \rangle_t$$

Puisque f et g sont dans \mathcal{V} , on trouve:

$$\begin{aligned} dF_t &= \sum_j \partial_j f(X_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j,j'} \partial_{j,j'} f(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'} \rangle_t \\ dG_t &= \sum_j \partial_j g(X_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j,j'} \partial_{j,j'} g(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'} \rangle_t \end{aligned}$$

Puisque les termes en $d\langle X^j, X^{j'} \rangle_t$ sont à 1-variation bornée, ils n'interviennent pas dans le calcul de $d\langle F, G \rangle_t$. On trouve alors:

$$d\langle F, G \rangle_t = \sum_{j,j'} \partial_j f(X_t) \cdot \partial_{j'} g(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'} \rangle_t.$$

Aussi

$$dH_t = \sum_j (G_t \partial_j f(X_t) + F_t \partial_j g(X_t)) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j,j'} L_t^{j,j'} \cdot d\langle X^j, X^{j'} \rangle_t$$

où $L_t^{j,j'} = (G_t \partial_{j,j'} f(X_t) + F_t \partial_{j,j'} g(X_t) + 2\partial_j f(X_t) \cdot \partial_{j'} g(X_t))$. Puisque $\partial_j h(X_t) = G_t \partial_j f(X_t) + F_t \partial_j g(X_t)$ et $\partial_{j,j'} h(X_t) = L_t^{j,j'}$, on en conclut donc que dH_t vérifie bien la formule (7) et partant $h \in \mathcal{V}$.

De ce qui précède, on conclut que \mathcal{V} contient tous les polynômes. Soit $\epsilon > 0$. Toute fonction $f \in \mathcal{C}_2$ peut être approximée sur K par un polynôme g tel que $\|f - g\|_{\infty, K} \leq \epsilon$, $\forall j$: $\|\partial_j f - \partial_j g\|_{\infty, K} \leq \epsilon$ et $\forall j, j'$: $\|\partial_{j,j'} f - \partial_{j,j'} g\|_{\infty, K} \leq \epsilon$. Puisque la formule (7) est vérifiée par g , elle sera vérifiée par f par passage à la limite, et le théorème est donc démontré. ■

2.1 Applications de la formule d'Itô

Les exercices qui suivent constituent quelques applications immédiates de la formule d'Itô.

Exercice 2.9 *Montrer que, si B est le mouvement brownien, alors*

$$B_t^n = n \int_0^t B_s^{n-1} dB_s + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t B_s^{n-2} ds.$$

Exercice 2.10 *En utilisant la formule d'Itô, montrez que, si B est un mouvement brownien, alors $M_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$ est une martingale locale.*

Preuve: Soit $f(x) := \exp(x)$ et $X_t := \alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t$. Puisque $X_t = \int_0^t \alpha dB_s + \int_0^t (-\alpha^2/2) ds$, on a $\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \alpha^2 ds = \alpha^2 t$. La formule d'Itô nous donne donc, avec $f(x) = f'(x) = f''(x)$:

$$\begin{aligned} M_t &= f(X_t) \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \\ &= f(0) + \int_0^t M_s \alpha dB_s - \int_0^t M_s \frac{\alpha^2}{2} ds + \frac{1}{2} \int_0^t M_s \alpha^2 ds \\ &= 1 + \int_0^t M_s \alpha dB_s \end{aligned}$$

Puisque les trajectoires de B et donc de M sont continues, la variable $M_T^* := \sup\{M_s : 0 \leq s \leq T\}$ est, pour tout $T < \infty$, une variable P -pp finie. Puisque $\int_0^T M_s^2 \alpha^2 ds \leq$

$M_T^{*2} \cdot \alpha^2 \cdot T$, le processus $M_t \alpha$ appartient à H_2^{loc} . Son intégrale $\int_0^t M_s \alpha dB_s$ est donc une martingale locale et il en est alors de même pour M . ■

Définition 2.11 Si X et Y sont deux semimartingales, on définit l'intégrale de Stratonovich de X par rapport à Y par

$$\int_0^t X_s d \circ Y_s = \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t.$$

Exercice 2.12 En déduire de l'exercice 2.3 que

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s d \circ Y_s + \int_0^t Y_s d \circ X_s$$

Exercice 2.13 Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} (X_{t_{i+1}} + X_{t_i}) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

converge en probabilité vers $\int_0^t X_s d \circ Y_s$ si $0 = t_0 < \dots < t_n = t$ est une partition de $[0, t]$.

Exercice 2.14 Soit B^1, B^2, B^3 trois mouvements browniens indépendants. Soit $f(x_1, x_2, x_3) := (\sum_{i=1}^3 (1 + x_i)^2)^{-1/2}$ et $Z_t := f(B_t^1, B_t^2, B_t^3)$.

- 1) Montrez que $\sum_{i=1}^3 \partial_{i,i} f(x_1, x_2, x_3) = 0$, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \neq (-1, -1, -1)$.
- 2) Soit $\tau_n := \inf\{t : Z_t \geq n\}$. En utilisant la formule d'Itô, montrez que Z^{τ_n} est une martingale positive bornée par n .
- 3) Montrez que $E[Z_{\tau_n}] = 1/\sqrt{3}$. Déduire de cela que

$$P(\tau_n < \infty) \leq 1/(n\sqrt{3})$$

et que $\tau_n \nearrow \infty$ P -ps. Z est donc une martingale locale.

- 4) Soit $\sigma_m := \inf\{t : Z_t \leq 1/m\}$. En utilisant le corollaire 2.15, montrez que $\sigma_m < \infty$ P -ps. Montrez ensuite que $\sigma_m \nearrow \infty$ P -ps.

Montrez que $Z_{\tau_n \wedge \sigma_m} \in \{1/m, n\}$ P -ps. et que $Z_{\tau_n \wedge \sigma_m} \xrightarrow{P\text{-pp}} Z_{\tau_n}$ lorsque $m \rightarrow \infty$. Déduisez-en que $Z_{\tau_n} = n \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}$ P -ps.

- 5) Montrez que $Z_{\tau_n} \xrightarrow{P\text{-pp}} 0$ lorsque n tend vers l'infini.
- 6) En utilisant la densité normale, montrez qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\forall t E[Z_t^2] \leq C$.

7) Si Z était une martingale, nous aurions $Z \in \mathcal{M}^2$. Montrez qu'en vertu du corollaire 4.22, Z ne peut donc être une martingale.

Z est donc une martingale locale bornée en norme L^2 (donc U.I.) qui n'est pas une martingale.