Lecture Notes on STOCHASTIC CALCULUS

Ciprian TUDOR
Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1

November 12, 2008

MASTER M2: Mathématiques Appliquées à l'Economie et à la Finance

VERSION 2008-2009

Attention: the proofs and the exercises are not yet translated

1 CHAPTER 1: Introduction and preliminaries

1.1 Random variables : definition, law, characteristic function, independence, L^p spaces

The general context is as follows: let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, that is, :

Ω is a non-empty set

$\mathcal{F}$ is a σ- algebra, that is $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ and

a) $\Phi \in \mathcal{F}$

b) if$A \in \mathcal{F}$, then $A^c \in \mathcal{F}$.

c) if $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, then $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

P is a probability, that means that P is an application $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ that satisfies:

a) $P(\Omega) = 1$

b) if $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ are disjoint set , then $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definition 1 *A random a is an application X which is measurable from $(\Omega, \mathcal{F})$ onto $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$.*

We recall that X is measurable if and only if for every event $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, the set $X^{-1}(B) := \{\omega | X(\omega) \in B\}$ is an element in $\mathcal{F}$.

The random variable X "transfers" the probability P on $(\Omega, \mathcal{F})$ into a probability P_X on $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} : P_X(B) := P(X^{-1}(B))$$

P_X is called the law of the r.v. X.

Exercice 1.1 *Montrez que P_X est une probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$.*

Exercice 1.2 *Montrez que $\sigma(X) := \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\}$ est une σ-algèbre d'ensembles. C'est la plus petite tribu sur Ω qui rend X mesurable.*

Exercice 1.3 *Montrez que si $\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de σ-algèbres sur Ω, alors $\cap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ est également une σ-algèbre.*

En particulier, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on définit $\sigma(\mathcal{G})$

$$\sigma(\mathcal{G}) = \bigcap_{\mathcal{F} \text{tribu} \supset \mathcal{G}} \mathcal{F}.$$

$\sigma(\mathcal{G})$ est donc la plus petite σ-algèbre qui contient $\mathcal{G}$.

Definition 1.4 *We define the expectation of a random variables $X \geq 0$ by:*

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$$

If $p \in [1, \infty[$, we define $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ as the set of r.v. X such that $\|X\|_{L^p}^p := E(|X|^p) < \infty$.

On $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, we introduce

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$$

Exercice 1.5 *Montrez que $\|X\|_{L^p} = 0$ est équivalent à $X = 0$ P-pp.*

Remark 1 *$\|.\|_{L^p}$ cannot be a norm $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

We define

Definition 1.6 *$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is the set of equivalence classes of $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ with respect to the equivalence relation $=$ P-a.s. (almost surely).*

Theorem 1.7 *For every $p \in [1, \infty[$, the space $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ endowed with the norm $\|.\|_{L^p}$ is a Banach space .*

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ endowed by the scalar product $\langle X, Y\rangle := E[X \cdot Y]$ is a Hilbert space.

Exercice 1.8 *Montrez que si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^d} x\, dP_X(x) :$$

L'espérance d'une v.a. ne dépend que de sa loi.

Definition 1.9 *If X and Y are random variables in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, we define*

$$var[X] := E[(X - E[X])^2] \text{ et } cov[X, Y] := E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])].$$

If Z is a random vector, (viewed as a column matrix) , whose components are in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, the covariance matrix $var[Z]$ is given by

$$var[Z] := E[(Z - E[Z])(Z - E[Z])^\top].$$

Exercice 1.10 *Montrez que si $v \in \mathbb{R}^d$, alors $var[\langle v, Z\rangle] = v^\top var[Z]v$. En déduire que $var[Z]$ est une matrice définie positive.*

Exercice 1.11 Tchebychev inequality : *if $\lambda > 0$, then $\forall p \geq 1$*

$$P(|X| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|X|^p).$$

Schwartz inequality :

$$E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Hölder inequality :

$$E(XY) \leq [E|X|^p]^{\frac{1}{p}}[E|Y|^q]^{\frac{1}{q}} \qquad si\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Jensen inequality : *if $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is a convex fonction and Y is a random vector (d dimensional), then $E[f(Y)] \geq f(E[Y])$.*

Deduce that if $\alpha > \beta$ then $\|X\|_{L^\alpha} \geq \|X\|_{L^\beta}$. In particular $L^\alpha(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset L^\beta(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Definition 1.12 *A random variable Z follows a standard normal law, denoted $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ if its density with respect to the Lebesque measure can be written as:*

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-z^2}{2})$$

Definition 1.13 *A r.v. Y follows a normal distribution with mean zero μ and variance σ^2 si $Y = \mu + \sigma Z$where Z is a standard normal r.v.. Then we write $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. μ and σ^2 are respectively the expectation and the variance of the random variable Y.*

Definition 1.14 *The caracteristic fonction φ_Z f a r.v. Z with values in $\mathbb{R}^d$ is defined by : $\varphi_Z : \mathbb{R}^d \to \mathcal{C} : \alpha \to \varphi_Z(\alpha)$:*

$$\varphi_Z(\alpha) = E(exp(i \cdot \langle \alpha, Z \rangle)).$$

Theorem 1.15 *The characteristic fonction characterizes the law of the random variables: if the random variables X and Y have the same characteristic function (i.e. $\varphi_X = \varphi_Y$), then they have the same law: $P_X = P_Y$.*

Exercice 1.16 *Montrez que si Z est une variable normale centrée réduite alors $\varphi_Z(\alpha) = \exp(-\alpha^2/2)$. Calculez $\varphi_Y(\alpha)$ lorsque $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.*

Definition 1.17 *Two events (sets) A and B in $\mathcal{F}$ are independent if $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. We then write $A \perp\!\!\!\perp B$. Two -sub σ algebras $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ in $\mathcal{F}$ are independent (we denote $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}$, if $\forall B \in \mathcal{B}, \forall C \in \mathcal{C} : B \perp\!\!\!\perp C$. Two r.v. X and Y on Ω are independent if $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$.*

Exercice 1.18 *Montrez que $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall \alpha, \beta$:*

$$\varphi_{(X,Y)}(\alpha, \beta) = \varphi_X(\alpha) \cdot \varphi_Y(\beta)$$

Exercice 1.19 *Montrez que si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $cov(X,Y) = 0$. Donnez un exemple de vecteur (X,Y) tel que $cov(X,Y) = 0$, mais tel que X et Y ne soient pas indépendants.*

Exercice 1.20 *Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre d'ensembles et $\mathcal{C}$ une algèbre d'ensembles qui vérifient $\forall B \in \mathcal{B}, \forall C \in \mathcal{C} : B \perp\!\!\!\perp C$, alors $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{C})$.*

Exercice 1.21 *si $Y_1 \sim N(\mu_1, {\sigma^2}_1)$ et $Y_2 \sim N(\mu_2, {\sigma^2}_2)$ sont deux v.a. indépendantes, calculer φ_S où $S := Y_1 + Y_2$. En déduire que $S \sim N(\mu_1 + \mu_2, {\sigma^2}_1 + {\sigma^2}_2)$.*

Types de convergence pour les variables aléatoires:

Convergence en loi: Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n \in I\!N}$ à valeurs dans $I\!R^d$ converge en loi vers X ssi pour toute fonction continue bornée $f : I\!R^d \to I\!R$, on a la convergence de $E[f(X_n)]$ vers $E[f(X)]$.

Convergence en probabilité: Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n \in I\!N}$ à valeurs dans $I\!R^d$ converge en probabilité vers X si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \to_{n \to \infty} 0$$

Convergence presque sûre: Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n \in I\!N}$ à valeurs dans $I\!R^d$ converge presque surement vers X si

$$X_n(\omega) \to_{n \to \infty} X(w).$$

pour tout $\omega \notin N$ où $P(N) = 0$.

Convergence dans L^p, $p \geq 1$: Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n \in I\!N}$ à valeurs dans $I\!R^d$ converge dans L^p vers X si

$$E(|X_n - X|^p) \to_{n \to \infty} 0.$$

Exercice 1.22 *Rappeller les relations entre les différentes types de convergence pour les variables aléatoires.*

Exercice 1.23 *Montrez que si $X_n \overset{Loi}{\to} X$, et $P[X = a] = 0$, alors $P[X_n \leq a] \to P[X \leq a]$, lorsque $n \to \infty$.*

Theorem 1.24 *Si X_n est une suite de variables aléatoire à valeurs dans $I\!R^d$, alors $X_n \overset{Loi}{\to} X$ ssi*

$$\forall \alpha \in I\!R^d : \varphi_{X_n}(\alpha) \to \varphi_X(\alpha).$$

Le théorème précédent permet de montrer aisément le théorème central limite:

Theorem 1.25 *(théorème central limite TCL) Si* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables de* $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$*, indépendantes, identiquement distribuées d'espérance nulle et de variance 1, alors*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$*.*

Ce théorème explique l'apparition fréquente de la loi normale dans la nature.

Definition 1.26 *Un vecteur aléatoire* Y *dans* $\mathbb{R}^d$ *est gaussien si* $\forall v \in \mathbb{R}^d$*,* $< v, Y >$ *est une v.a gaussienne.*

Exercice 1.27 *Montrez que si* Y *est un vecteur gaussien tel que* $E(Y) = \mu$ *et la matrice de variance covariance* $var(Y) = \Sigma$*, alors*

$$\varphi_Y(v) = exp[i < v, \mu > -\frac{v^t \Sigma\, v}{2}]$$

(les vecteurs v *de* $\mathbb{R}^d$ *sont considérés dans cette expression comme des matrices colonnes). Ceci montre que la loi d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par* μ *et* Σ*.*

1.2 Stochastic processes :

Definition 1.28 *A stochastic process* $(\Omega,\mathcal{F},P)$*, indexed by a set* $T \subset \mathbb{R}$ *is a family* $\{X_t\}_{t\in T}$ *of random variables on* $(\Omega,\mathcal{F},P)$*.*

X_t represents the situation at time t.

For fixed ω , the application $t \to X_t(\omega)$ is called the trajectory of the stochastic process X.

We can introduce different types of equivalence relations for stochastic processes:

Definition 1.29 *The processes* X *and* Y *on* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *are modifications (notation* $Y \overset{modif}{\equiv} Y$*) if:*

$$\forall t \geq 0, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\ P - a.s..$$

Definition 1.30 *The processes* X *and* Y *on* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *are indistinguishable if and only if:*

$$\{\omega |\, \forall\, 0 \leq t < \infty,\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$$

is measurable and its probability measure is equal to 1.

Definition 1.31 *The processes* X *and* Y *on* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *have the same finite-dimensional distributions :*

$$\forall\, 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty, (X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\ et\ (Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})$$

have the same law.

Exercice 1.32 *Monter que, si X et Y sont indistinguables, alors ils sont des modifications l'un de l'autre.*

Exercice 1.33 *Montrer que la réciproque est fausse.*

Preuve: En effet soit $\Omega = [0,1]$ et P la mesure de Lebesgue, posons:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $Y_t(\omega) = 0$.
Alors on a :$P(\{\omega | X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\})$=$P(\{t = \omega\}) = 0$ donc $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ P-pp d'où $X_t(\omega)$ et $Y_t(\omega)$ sont des modifications l'un de l'autre.

Par contre

$$\{\omega | \ \forall\ 0 \leq t < \infty, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = \{\omega | \ \forall\ 0 \leq t < \infty, t \neq \omega\} = \emptyset$$

donc $P(\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 0 \neq 1$ d'où X_t et Y_t ne sont pas indistinguables . ■

Exercice 1.34 *Montrez que si deux processus ont toutes leurs trajectoires continues (même continues à droite), alors $X \overset{modif}{\equiv} Y$ implique que X et Y sont indistinguables.*

Preuve: Soit

$$N_t = \{\omega \in \Omega / X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

et

$$N = \bigcup_{t \in Q} N_t$$

Q étant les rationels de $[0, \infty)$. Alors

$$P(N) = 0$$

donc $X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in Q$, $\forall \omega \notin N$. Si $t \notin Q$, on considère t_n une suite de Q telle que $t_n \downarrow t$. Alors, pour tout $\omega \notin N$, on a $X_{t_n} = Y_{t_n}$ pour tout n et donc

$$X_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n \to \infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega)$$

et par conséquent X et Y sont indistinguable. ■

Exercice 1.35 *(***TO BE DONE IN CLASS***) Montrez que si deux processus sont des modifications l'un de l'autre, alors ils ont mêmes lois fini-dimensionnelles.*

1.3 Filtration

Definition 1.36 *A filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ is an increasing family of sub-σ-algebras of $\mathcal{F}$. That is $\forall 0 \leq s < t < \infty$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.*

$\mathcal{F}_t$ represents "how much the observer X knows at time t, i.e. $\mathcal{F}_t$ is a class of events that we can identify at time t.

Definition 1.37 *If $\mathcal{F}_t$ is a filtration, then we denote by:*

- $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$
- $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$
- $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s)$.

Definition 1.38 *A filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ is right continuous (respectively left continuous) if $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ (respectively $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$) $\forall t \geq 0$.*

Definition 1.39 *A filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ is complete if $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$ such that $P(A) = 0$, $A \in \mathcal{F}_0$.*

Definition 1.40 *The stochastic process X is adapted to the filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ if and only if $\forall\ 0 \leq t < \infty$, X_t is $\mathcal{F}_t$-measurable.*

Definition 1.41 *Let $\mathcal{F}$ a sub- σ-algebra of $\mathcal{G}$ and let $\mathcal{N}$ be the class of subsets of $\mathcal{G}$ having its probability measure equal to. Then the σ-algebra $\bar{\mathcal{F}} := \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ is called the completion of the σ algebra $\mathcal{F}$.*

Exercice 1.42 *Montrez que toute variable $\bar{X}$ $\bar{\mathcal{F}}$-mesurable est égale P-pp à une variable X $\mathcal{F}$-mesurable.*

Definition 1.43 *The filtration $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in T}$ is called the completion of $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$.*

Exercice 1.44 *Montrez que toute modification X' d'un processus X adapté à $\mathcal{F}_t$ est adapté à $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in T}$*

1.4 Espérance conditionnelle:

La probabilité conditionnelle d'un événement $A \in \mathcal{F}$ par un événement $B \in \mathcal{F}$ avec $P(B) > 0$ est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}.$$

On voit que A et B sont indépendants ssi $P(A|B) = P(A)$. La probabilité conditionnelle $P(A|B)$ représente la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé. L'application

$$A \to P(A|B)$$

définit alors une nouvelle probabilité sur $\mathcal{F}$. On peut alors définir l'espérance conditionnelle d'une v.a. X par rapport à un événement B par

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} E(X 1_B).$$

Un concept plus compliqué est le conditionnement par une σ algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ d'une v.a. X.

Exercice 1.45 *Soit X une variable aléatoire de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrez que $C := E[X]$ est la constante qui approxime le mieux X au sens $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

We can interpret the sub-σ-algebra $\mathcal{B}$ of $\mathcal{F}$ as un "information level" concerning a random experience: at this information level (that is, taking into account this information, one can decide for every $B \in \mathcal{B}$ if it has been completed or not. It is natural to define the conditional expectation as follows:

Definition 1.46 *Let $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ and $X \in L^2(\mathcal{F})$. The random variable in $L^2(\mathcal{B})$ that is the closest to X in the L^2 sense is denoted by $E[X|\mathcal{B}]$ and it is called as the conditional expectation of X given $\mathcal{B}$.*

In this way $E[X|\mathcal{B}]$ is the orthogonal projection of X on the space $L^2(\mathcal{B})$ then $E[X|\mathcal{B}]$ always exists because $L^2(\mathcal{B})$ is a closed vector subspace of $L^2(\mathcal{F})$, and it unique in the L^2 sense L^2.

The orthogonality relationship can be written:

$$\forall Z \in \mathbf{L^2}(\mathcal{B}) : E[ZX] = E[ZE[X|\mathcal{B}]].$$

Exercice 1.47 *Montrez que, si $X \geq Y$ $P-pp$, alors $E[X|\mathcal{B}] \geq E[Y|\mathcal{B}]$ $P-pp$.*

Idée de la preuve: On pose

$$A_\varepsilon = \{E[Y|\mathcal{B}] - E[X|\mathcal{B}] \geq \varepsilon > 0\}$$

et on montre aisément que

$$P(A_\varepsilon) = 0.$$

■

Exercice 1.48 *(***TO BE DONE IN CLASS***)Si $U \in L^2(\mathcal{B})$, montrez que $U = E[X|\mathcal{B}]$ si et seulement si $\forall B \in \mathcal{B} : E[U\mathbf{1}_B] = E[X\mathbf{1}_B]$.*

Exercice 1.49 *On considère $(\Omega_j)_{j\geq 1}$ une partition de Ω telle que $P(\Omega_j) > 0$ pour tout $j \geq 1$. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\Omega_j, j \geq 1)$. Alors*

$$E(X/\mathcal{F}) = \sum_{j\geq 1} \frac{E(X1_{\Omega_j})}{P(\Omega_j)} 1_{\Omega_j} := Y$$

Preuve: Comme $1_{\Omega_j} \in \mathcal{F}$, on a $\sum_{j\geq 1} \frac{E(X1_{\Omega_j})}{P(\Omega_j)} 1_{\Omega_j} \in \mathcal{F}$. Il suffit de vérifier la propriété d'orthogonalité pour $A = \Omega_n$, n fixé. Mais

$$E(Y1_{\Omega_n}) = E\left(\frac{X1_{\Omega_n}}{P(\Omega_n)} 1_{\Omega_n}\right) = \frac{X1_{\Omega_n}}{P(\Omega_n)} E(1_{\Omega_n}) = E(X1_{\Omega_n}).$$

■

Theorem 1.50

1. *$\forall \alpha, \beta \in I\!R$ $E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{B}] = \alpha E[X|\mathcal{B}] + \beta E[X|\mathcal{B}]$.*
2. *If $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, then $E[X|\mathcal{B}] = E[E[X|\mathcal{C}]|\mathcal{B}]$.*
3. *If X is independent by $\mathcal{B}$, then $E[X|\mathcal{B}] = E[X]$.*
4. *$\forall Z \in L^2(\mathcal{B})$:*

$$E[(X - Z)^2] = E[(X - E[X|\mathcal{B}])^2] + E[(E[X|\mathcal{B}] - Z)^2].$$

5. *$\forall$ $Y \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{B})$: $E[YX|\mathcal{B}] = YE[X|\mathcal{B}]$.*
6. *Let $\phi : I\!R \to I\!R$ be a convex function such that $\phi(X) \in \mathbf{L^2}(\mathcal{F})$, then :*

$$E[\phi(X)|\mathcal{B}] \geq \phi(E[X]\mathcal{B}])\ ps.$$

Preuve:

1. Résulte du fait que la projection orthogonale sur $L^2(\mathcal{B})$ est une application linéaire.
2. Soit $Z \in L^2(\mathcal{B})$, alors $E[ZE[X|\mathcal{B}]] = E[ZX]$. Puisque $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, on a aussi $E[ZX] = E[ZE[X|\mathcal{C}]]$, d'où $E[ZE[X|B]] = E[ZE[X|\mathcal{C}]]$ $\forall Z \in L^2(\mathcal{B})$. Puisque par définition $E[X|\mathcal{B}] \in L^2(\mathcal{B})$, la dernière relation n'est autre que la relation d'orthogonalité qui définit $E[E[X|\mathcal{C}]|\mathcal{B}]$. Ainsi $E[X|\mathcal{B}] = E[E[X|\mathcal{C}]|\mathcal{B}]$.
3. $\forall$ Z $\in L^2(\mathcal{B})$ et X indépendant de $\mathcal{B}$, $E[ZX] = E[X]E[Z] = E[E[X]Z]$, donc $E[X|\mathcal{B}] = E[X]$. Car la seule v.a Y de $\mathbf{L^2}(\mathcal{B})$ vérifiant pour tout $Z \in \mathbf{L^2}(\mathcal{B})$ $E[ZX] = E[ZY]$ est $Y = E[X|\mathcal{B}]$.

4. On a:

$$\begin{aligned} E[(X-Z)^2] &= E[(X-E[X|\mathcal{B}]+E[X|\mathcal{B}]-Z)^2] \\ &= E[(X-E[X|\mathcal{B}])^2]+E[(E[X|\mathcal{B}]-Z)^2] \\ &\quad +2E[(X-E[X|\mathcal{B}])(E[X|\mathcal{B}]-Z)] \end{aligned}$$

   Or: $(E[X|\mathcal{B}]-Z) \in L^2(\mathcal{B})$. On en déduit que

$$E[(X-E[X|\mathcal{B}])(E[X|\mathcal{B}]-Z)] = 0,$$

   et la relation est vérifiée .

5. Posons $H = YE[X|\mathcal{B}]$. Comme $Y \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{B})$ et $E[X|\mathcal{B}] \in L^2(\mathcal{B})$, nous avons: $H \in \mathbf{L^2}(\mathcal{B})$. Ainsi, si $Z \in L^2(\mathcal{B})$, on a:

$$E[ZH] = E[ZYE[X|\mathcal{B}]] = E[Z(YX)]$$

   (car $ZY \in \mathbf{L^2}(\mathcal{B})$). Donc $H = E[YX|\mathcal{B}] = YE[X|\mathcal{B}]$.

6. Nous nous limitons ici à des fonction ϕ différentiables. On sait que, si ϕ est convexe, alors $\forall y, z$:

$$\phi(z) \geq \phi(y) + \phi'(y)(z-y)$$

   donc $\forall \omega$ on a :

$$\phi(X(\omega)) \geq \phi(E[X|\mathcal{B}](\omega)) + \phi'(E[X|\mathcal{B}](\omega))(X(\omega) - E[X|\mathcal{B}](\omega))$$

   donc, en prenant l'espérance conditionnelle, nous obtenons:

$$\begin{aligned} E[\phi(X)|\mathcal{B}] &\geq E[(\phi(E[X|\mathcal{B}]) + \phi'(E[X|\mathcal{B}])(X-E[X|\mathcal{B}])|\mathcal{B}] \\ &= \phi(E[X|\mathcal{B}]) + \phi'(E[X|\mathcal{B}])E[(X-E[X|\mathcal{B}])|\mathcal{B}] \end{aligned}$$

   Mais

$$E[(X-E[X|\mathcal{B}])|B] = E[X|\mathcal{B}] - E[E[X|\mathcal{B}]|\mathcal{B}] = 0,$$

   et partant $E[\phi(X)|B] \geq \phi[E[X|\mathcal{B}]], P-ps.$

Exercice 1.51 *(***TO BE DONE IN CLASS***) Sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, on considère la classe*

$$\mathcal{B} := \{B \in \mathcal{F} | P(B) = 0 \text{ ou } P(B) = 1\}.$$

1. Montrez que $\mathcal{B}$ *est une* σ*-algèbre.*

2. Caractérisez les fonctions $\mathcal{B}$*-mesurables.*

3. *Pour* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, calculez* $E[X|\mathcal{B}]$.

Exercice 1.52 *(***TO BE DONE IN CLASS***) Si* (X,Y) *est un vecteur aléatoire dont la densité* $f_{(X,Y)}$ *vérifie* $\forall x, y \in I\!R : f_{(X,Y)}(x,y) > 0$*, si* $\mathcal{B} := \sigma(Y)$*;*

1. *Montrez que* $E[X|\mathcal{B}] = g(Y)$*, où*

$$g : I\!R \to I\!R : y \to g(y) := \frac{\int_{I\!R} x f_{(X,Y)}(x,y)dx}{\int_{I\!R} f_{(X,Y)}(x,y)dx}$$

   Idée de la preuve: *On a* $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $g(Y) \in \sigma(Y)$*.*

   Soit maintenant $A \in \sigma(Y)$*. Alors* A *est de la forme* $A = \{\omega, Y(\omega) \in B\}$ *et* $1_A = 1_B(Y)$*. Ensuite*

$$\begin{aligned}
E(g(Y)1_A) &= E\left(g(Y)1_B(Y)\right) \\
&= \int_B \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x,y) dx dy \\
&= \int_B dy \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{z f(z,y) dz}{\int f(z,y) dz} \right) f(x,y) dx \\
&= \int_B dy \int_{\mathbb{R}} z f(z,y) dz = E(X 1_B(Y))
\end{aligned}$$

   et cela entraine que $g(Y)$ *est l'espérance conditionnelle de* X *sachant* $\mathcal{B}$*.*

2. *Si* (X,Y) *est un vecteur gaussien tel que* $E[X] = E[Y] = 0$*,* $var[X] = 1 = var[Y]$ *et* $cov[X,Y] = \rho \in [0,1]$*, calculez* $E[X|\mathcal{B}]$*.*

Exercice 1.53 *(***TO BE DONE IN CLASS***) On prend* $\Omega = (0,1)$*,* $\mathcal{F}_0 = B((0,1))$ *et* $P = \lambda$ *la mesure de Lebesque. On pose* $X(\omega) = cos(\omega\pi)$ *et*

$$\mathcal{F} = \{A \subset (0,1), A \text{ ou } A^c \text{ denombrable } \}.$$

Alors $E(X/\mathcal{F}) = 0$*.*

Exercice 1.54 *(***TO BE DONE IN CLASS***) Si* $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ *et* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1. *Montrez que* $E[X|\mathcal{B}] = E[(E[X|\mathcal{C}])|\mathcal{B}]$*.*
2. *Montrez que la relation précédente n'est en général pas vérifiée si* $\mathcal{B}$ *n'est pas inclus dans* $\mathcal{C}$*, en considérant le point 2 de l'exercice précédent 1.52 avec* $\mathcal{B} := \sigma(X)$ *et* $\mathcal{C} := \sigma(Y)$*.*

Exercice 1.55 *(***TO BE DONE IN CLASS***)La loi d'un vecteur aléatoire* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *est dite échangeable si pour toute permutation* π *de* $\{1, \ldots, n\}$ *les vecteurs* X *et* X_π *ont même loi, où* $X_\pi := (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$*.*

Si X *a une loi échangeable, et* $S := X_1 + \ldots + X_n$*, calculez* $E[X_1|S]$ *(*$E[X_1|S]$ *est une notation abrégée pour* $E[X_1|\sigma(S)]$*).*

Exercice 1.56 *(***TO BE DONE IN CLASS***)Si $Z_1, Z_2, \dots$ est une suite i.i.d. de variables $\mathcal{N}(0,1)$, si $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ et si $X_n := Z_1 + \dots + Z_n$,*

1. *Montrez que $\forall n \geq m : E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$.*
2. *Montrez que $\forall n \geq m : E[Y_n|\mathcal{F}_m] = Y_m$, où $Y_n := X_n^2 - n$.*
3. *Montrez que $\forall n \geq m : E[M_n|\mathcal{F}_m] = M_m$, où $M_n := \exp(X_n - n/2)$.*

(Les relations précédentes s'expriment en disant que les processus X, Y et M sont des martingales.)

The conditional expectation on L^1

L'espérance conditionnelle $E[X|\mathcal{B}]$ a été définie plus haut pour les variables X de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Le théorème de Radon Nikodym est utilisé dans l'exercice suivant pour définir l'espérance conditionnelle des variables X de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ce théorème affirme que si μ est une mesure signée bornée et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$, alors les deux énoncés suivants sont équivalents:

1)μ admet une densité Y par rapport à P (i.e. $\exists Y \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P) : \forall U \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu) : \int_\Omega U d\mu = E_P[U.Y]$)

2) μ est absolument continue par rapport à P (i.e. $\forall B \in \mathcal{B} : P(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0.$)

Exercice 1.57 *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{B}$ une sous σ-algèbre de $\mathcal{F}$. Montrez que la mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ définie par $\mu(B) := E_P[X \cdot \mathbf{1}_B]$ est absolument continue par rapport à P. Montrez que la densité Y de μ par rapport à P, qui éxiste par le théorème de Radon Nikodym, vérifie $\forall Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$: $E[Z \cdot X] = E[Z \cdot Y]$ et Y est donc un candidat naturel pour définir $E[X|\mathcal{B}]$.*

Exercice 1.58 *Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables indépendantes uniformes sur $[0,1]$. Soit $T := \max_{i=1,\dots,n} X_i$. Calculez $E[X_1|T]$. (Piste: $T = T' \cdot 1\!\!1_{\{X_1 < T'\}} + X_1 \cdot 1\!\!1_{\{X_1 > T'\}}$, où $T' := \max_{i=2,\dots,n} X_i$. En calculant la loi de (X_1, T'), on montre que pour toute fonction mesurable bornée $g : I\!\!R \to I\!\!R$: $E[X_1 g(T)] = \int_0^1 g(s) \cdot \frac{s^n(n+1)}{2} ds$.)*

2 CHAPTER 2: THE BROWNIAN MOTION

Lors de ses observations microscopiques de particules de pollen en suspension dans l'eau, le botaniste anglais Brown est frappé en 1827 par le mouvement erratique et apparemment imprévisible de ces particules.

Ce mouvement, dénommé depuis mouvement brownien, fut expliqué physiquement par Einstein (1905), qui en donna également les pricipales caractéristiques. Si B_t dénote la position horizontale de la particule de pollen au temps t, Einstein suggère que

(1) $(\forall t, s \geq 0 : (B_{t+s} - B_t) \perp\!\!\!\perp \sigma(B_u; 0 \leq u \leq t)$.

(2) $(\forall t, s \geq 0 : (B_{t+s} - B_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$.

(3) Les trajectoires du processus B sont continues.

Il voit en effet le déplacement de la particule $(B_{t+s} - B_t)$ comme une conséquence des chocs des molécules d'eau sur la particule: On conoit aisément que l'effet de tels chocs est en moyenne nul et que les chocs peuvent être considérés comme indépendants et équidistribués. Le point (1) suit alors l'indépendance des chocs évoquée plus haut. Le point (2) provient d'une utilisation intuitive du théorème central limite: Une somme d'un grand nombre de chocs indépendants suit essentiellement un loi normale dont la variance est proportionnelle au nombre de chocs considérés dans la somme et donc l'intervalle de temps considéré. Le point (3) est évident si l'on considère que B_t est la trajectoire d'une particule physique.

Le modèle physique du mouvement brownien décrit plus haut semble justifier heuristiquement son existence. La preuve mathématique de l'existence d'un espace probabilisé et d'un processus sur cet espace qui a les trois propriétés décrites par Einstein n'a été réalisée qu'en 1920 par Wiener.

2.1 The construction of the Brownian motion

Definition 2.1 *If $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ is a filtration on $(\Omega, \mathcal{F})$, a stochastic process B_t adapted to the filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ is a $\mathcal{F}_t$ standard Brownian motion if*

- *1) $B_0 = 0$*
- *2) $\forall\ 0 \leq t < s < \infty$, $B_s - B_t$ is independent of $\mathcal{F}_t$ and it has a normal law with zero mean and variance $s - t$.*
- *3) the trajectories $B(\omega)$ are continuous $\forall \omega$.*

In this section we will explicitly construct a Brownian motion on the following probability space: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ where $\Omega = I\!R^{I\!N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{I\!R^{I\!N}}$ et $P = (\mathcal{N}(0,1))^{\otimes I\!N}$

(NB. **L'existence of this space follows from the Kolmogorov consistency theorem.** Rappelons le cadre général. Soit $(E_t, \mathcal{E}_t)_{t\in T}$ une famille d'espaces mesurables où $\mathcal{E}_t = \mathcal{B}(E_t)$ pour tout $t \in T$. Pout tout $F \subset T$, F fini, soit P_F une probabilité sur $\mathcal{E}^F$. Supposons que

1. pour tout $A \in \mathcal{E}^F$ on a

$$P_F(A) = \sup \left(P_F(K), K \subset A, K \text{ compact }\right)$$

2. la famille $\left(E^F, \mathcal{E}^F, P_F\right)_{F \subset T, F \text{ fini}}$ vérifie *la propriété de consistence*

$$P_{F_2} \circ \left(\pi_{F_1}^{F_2}\right)^{-1} = P_{F_1}$$

   pour tous $F_1 \subset F_2 \subset T$, F_1, F_2 finis, où $\pi_{F_1}^{F_2}$ représente la projection de E^{F_2} à E^{F_1}.

Alors il existe une probabilité P sur $(E^T, \mathcal{E}^T)$ telle que

$$P \circ (\pi_F^T)^{-1} = P_F$$

pour tout F fini.)

Exercice 2.2 *Appliquer le résultat précedent pour $E_t = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$,$T = \mathbb{N}$ et P_F la loi normale $|F|$-dimensionnelle.*

Soit $\omega = (\xi_n)_{n \in I\!N} \in \Omega$.

Remark 2.3 *Under the probability P, ξ_n are independent identically distributed $N(0,1)$ random variables. (This fact comes from the construction of the probability $P = N(0,1)^{\mathbb{N}}$.)*

Consider an hilbertian basis $\{e_i\}$ of $L^2([0,\infty[)$ and let us construct the linear application

$$F : L^2([0,\infty[) \to L^2(\Omega) \text{ telle que } \forall i \in I\!N : F(e_i) = \xi_i.$$

Lemme 2.4 *The application F is well-defined and it is an isometry from $L^2([0,\infty[)$ onto $L^2(\Omega)$. moreover, for every $g \in L^2([0,\infty[)$, $F(g)$ has a centered Gaussian law with variance $\|g\|^2$.*

Preuve:
Soit $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel engendré par les e_i. Si $g \in \mathcal{G}$, g peut s'écrire comme une somme finie $g = \sum_{i=0}^N \alpha_i e_i$, où

$$\alpha_i =< e_i, g >= \int_{I\!R} e_i(x) g(x)\, dx.$$

Par linéarité, on trouve $F(g) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \xi_i$, ce qui définit donc F sur $\mathcal{G}$ de manière univoque puisque les α_i sont univoquement déterminés.

Puisque $\|g\|_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^N \alpha_i^2$ et comme les ξ_i sont des v.a indépendantes normales centrées et réduites, on a

$$F(g) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=0}^N \alpha_i^2) = \mathcal{N}(0, \|g\|_{L^2([0,\infty[}^2).$$

En particulier, si $g \in \mathcal{G}$, $\|F(g)\|_{L^2(\Omega)}^2 := E[F(g)^2] = \|g\|_{L^2([0,\infty[}^2$. Ainsi F est une isométrie de $\mathcal{G}$ vers $L^2(\Omega)$ qui peut s'étendre par uniforme continuité $L^2([0,\infty[)$, $\mathcal{G}$ étant dense dans $L^2([0,\infty[)$.

Montrons la dernière assertion: si $g \in L^2([0,\infty[)$, il existe une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ qui converge vers g au sens $L^2([0,\infty[)$. $\{F(g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $F(g)$ au sens $L^2(\Omega)$. Par choix d'une sous-suite, on peut considérer que la convergence a également lieu $P-pp$. Par le théorème de la convergence dominée, on obtient ainsi

$$E[\exp(i\alpha F(g_n))] \to E[\exp(i\alpha F(g))].$$

Or puisque $F(g_n) \sim \mathcal{N}(0, \|g_n\|_{L^2([0,\infty[}^2)$, on a $E[\exp(i\alpha F(g_n))] = \exp(-\alpha^2 \|g_n\|_{L^2([0,\infty[}^2)$ et en passant la limite: $E[\exp(i\alpha F(g))] = \exp(-\alpha^2 \|g\|_{L^2([0,\infty[}^2)$, ce qui démontre que $F(g) \sim \mathcal{N}(0, \|g\|_{L^2([0,\infty[}^2)$ ■

We set $B_s := F(\mathbf{1}_{[0,s]})$.

Lemme 2.5 *The process B defined above satisfies the properties 1) and 2) from the definition 2.1 with respect to its natural filtration $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \in [0,t])$.*

Preuve: Il est évident que $B_0 := F(0) = 0$ P-pp.

Montrons que $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$. A cette fin, montrons d'abord que $\forall t_1 < \ldots < t_n < t < t+s$ le vecteur $\vec{B} = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}, B_{t+s} - B_t)$ est un vecteur gaussien:

si $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}) \in R^{n+1}$, on a:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle &= \sum_{i=1}^n v_i B_{t_i} + v_{n+1}(B_{t+s} - B_t) \\
&= \sum_{i=0}^n v_i F(\mathbf{1}_{[0,t_i]}) + v_{n+1} F(\mathbf{1}_{]t,t+s]}) \\
&= F(\sum_{i=0}^n v_i \mathbf{1}_{[0,t_i]} + v_{n+1}\mathbf{1}_{]t,t+s]})
\end{aligned}$$

car F est linéaire. Ainsi $\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle$ suit une loi normale, comme il résulte du lemme précédent. Ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{v}$, $\vec{B}$ est bien un vecteur gaussien.

Montrons ensuite que $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. Puisque $\vec{B}$ est gaussien, il suffit de montrez que $cov(B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) = 0$ (exercice 1.56, Ch.1-2).

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} cov(B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) &= E[(B_{t_i} - E(B_{t_i}))(B_{t+s} - B_t - E(B_{t+s} - B_t)] \\ &= E[B_{t_i}(B_{t+s} - B_t)] = \langle B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle F(\mathbf{1}_{[0,t_i]}), F(\mathbf{1}_{]t,t+s]}) \rangle_{\mathbf{L^2}(\Omega)} = \langle \mathbf{1}_{[0,t_i]}, \mathbf{1}_{]t,t+s]} \rangle_{\mathbf{L^2}([0,\infty[)} \\ &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t_i]}(x) \mathbf{1}_{]t,t+s]}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Donc $(B_{t+s} - B_t) \perp\!\!\!\perp \cup_{T \text{ fini } \subset [0,t]} \sigma(B_v, v \in T)$. Enfin, $\cup_{T \text{ fini } \subset [0,t]} \sigma(B_v, v \in T)$ est une algèbre d'ensembles qui engendre $\mathcal{F}_t$ et on peut donc utiliser l'exercice 1.20, Ch.1 pour conclure l'indépendance de $B_{t+s} - B_t$ et de $\mathcal{F}_t$.

Montrons enfin que $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$.

En effet $B_{t+s} - B_t = F(\mathbf{1}_{[0,t+s]}) - F(\mathbf{1}_{[0,t]}) = F(\mathbf{1}_{]t,t+s]})$ suit une loi normale centrée et on a:

$$\|\mathbf{1}_{]t,t+s]}\|^2_{\mathbf{L^2}([0,\infty[)} = \int_0^\infty \mathbf{1}^2_{]t,t+s]}(x) dx = s.$$

Donc $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$. ■

Ainsi il reste à montrer la continuité des trajectoires. Notons cependant que B_t a été défini plus haut comme $F(\mathbf{1}_{[0,t[})$ où F est une application valeurs dans L^2 et non dans $\mathcal{L}^2$. Ainsi B_t n'est en fait défini qu' un ensemble de probabilité nulle près! Peut-on choisir pour tout t un représentant $\bar{B}_t \in \mathcal{L}^2$ de la classe d'équivalence $B_t \in L^2$, de telle sorte que le processus résultant ait ses trajectoires continues? Pour répondre affirmativement cette question, nous allons nous servir du théorème suivant:

Theorem 2.6 *(Kolmogorov continuity criterium) If X is a stochastic process on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ such that it exists α, β and C strictly positive such that : $\forall\ 0 \le s, t < \infty$*

$$E[|X_s - X_t|^\alpha] \le C|s - t|^{1+\beta},$$

then it exists a modification $\bar{X}$ of X such that $\forall \delta \in [0, \frac{\beta}{\alpha}[$:

$$E\left[\left(sup\{\frac{|\bar{X}_s - \bar{X}_t|}{|s - t|^\delta}, 0 \le s, t \le 1, s \ne t\}\right)^\alpha\right] < \infty.$$

In particular $\bar{X}$ is a stochastic process with continuous paths on $[0, \infty[$.

Idée de la preuve: On donnera les étapes de la preuve. On considère $t \in [0, 1]$.

1. Par l'inegalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_t - X_s| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^\alpha} E|X_t - X_s|^\alpha \le C\varepsilon^{-\alpha}|t - s|^{1+\beta}$$

donc $X_s - X_t \to 0$ en probabilité si $s \to t$. Posons

$$t = \frac{k}{2^n}, s = \frac{k-1}{2^n} \text{ et } \varepsilon = 2^{-\gamma n}(0 < \gamma < \beta/\alpha)$$

dans l'inegalité précédente. On obtient

$$P\left(|X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \leq C 2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \\ & = P\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \\ & \leq C 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}. \end{aligned}$$

Commee la série $\sum_n 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}$ converge, par le lemme de Borel-Cantelli, il existe en ensemble $\Omega^\star$ de probabilité égale à 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega^\star$,

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| < 2^{-\gamma n} \qquad \forall n \geq n^\star(\omega)$$

où $n^\star(\omega)$ est une v.a. positive et entière.

2. Posons

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \text{ où } D_n = \{\frac{k}{2^n}, k = 0, \ldots, 2^n\}.$$

   On montre que pour tout $\omega \in \Omega^\star$ et $n > n^\star(\omega)$ fixés, et pour tout $m > n$,

$$|X_t - X_s| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}, \qquad \forall t, s \in D_m, |t - s| < 2^{-n}.$$

3. On prouve que $X_t(\omega), t \in D$ est uniformément continue en t pour tout $\omega \in \Omega^\star$.
4. On construit la modification voulue $\tilde{X}$ de X comme il suit: $\tilde{X}_t(\omega) = 0$ si $\omega \notin \Omega^\star$; $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ si $\omega \in \Omega^\star$ et $t \in D$; si $\omega \in \Omega^\star$ et $t \notin D$, on considère une suite $s_n \in D, s_n \to_{n\to\infty} t$. Alors la suite $X_{s_n}(\omega)$ est de Cauchy (étape précédente) et donc elle a une limite qui dépend de t. On pose alos $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_n X_{s_n}(\omega)$.

■

Exercice 2.7 *Montrez que, sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que $P(\Omega') = 1$ vérifiant: $\forall \omega \in \Omega'$, la trajectoire $t \in [0,1] \to X_t(\omega)$ est δ-Höldérienne pour tout δ dans $[0, \beta/\alpha[$. En d'autres termes:*

$$\forall \delta \in [0, \beta/\alpha[, \exists K(\delta) < \infty : \forall t, s \in [0,1] : |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq K(\delta)|t-s|^\delta$$

Montrez que si X vérifie l'inégalité du théorème précédent pour tout $s, t \geq 0$, alors il existe une modification $\bar{X}$ de X dont les trajectoires sont continues sur $[0, \infty[$.

We apply the Kolmogorov's criterium to the process B constructed above: we have $B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, s-t)$. So $B_s - B_t$ has the same law as $\sqrt{s-t}Z$ where $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Hence:

$$E[|B_s - B_t|^\alpha] = E[\sqrt{s-t}^\alpha |Z|^\alpha] = |s-t|^{\frac{\alpha}{2}} C_\alpha \leq C_\alpha |s-t|^{1+\beta}$$

with $C_\alpha := E[|Z|^\alpha] < \infty$ and $\beta := \frac{\alpha}{2} - 1$. Since β has to be strictly positive, we need $\alpha > 2$. In this way we obtain a modification of B with holderian trajectories of any order $\delta < \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$. Since α is arbitrary large, we established the theorem:

Theorem 2.8 *It exists a modification $\bar{B}$ of the process B with locally holderian paths of order δ, for every δ in $[0, 1/2[$.*

Remark 2.9 *Let $\bar{\mathcal{F}}_t$ be the completion $\mathcal{F}_t$. Show that $\bar{B}$ is adapted to $\bar{\mathcal{F}}_t$ and it is a $\bar{\mathcal{F}}_t$-Brownian motion.*

Exercice 2.10 (TO BE DONE IN CLASS) *Montrez que si B est un mouvement brownien, alors $cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, où $s \wedge t$ est une notation pour* $\min(s,t)$.

Montrez que si X est un processus continu gaussien centré —i.e. pour toute famille finie $\{t_1, \ldots, t_n\}$, le vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est gaussien centré— et si $\forall s, t \geq 0 : cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, alors B est un mouvement brownien sur sa filtration naturelle. (Si on ne suppose pas que X est continuu nous trouvons une modification $\bar{X}$ de X qui est un mouvement brownien).

On the space $\Omega_0 := \mathcal{C}([0, \infty[)$, we introduce the process X_t, $\omega_0 \in \Omega_0 \to X_t(\omega_0) := \omega(t)$. Let $\mathcal{G}_t$ be its natural filtration.

Corollary 2.11 *On $(\Omega_0, \mathcal{G}_\infty)$ there exists a unique probability measure Π such that X_t is a $\mathcal{G}_t$-Brownian motion under Π. Π is called* the Wiener measure.

Preuve:

1) *existence:* Soit l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel nous avons construit le mouvement brownien $\hat{B}$. Nous pouvons voir $\hat{B}$ comme une application qui $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire $\hat{B}_.(\omega) : t \to \hat{B}_t(\omega)$. Ainsi, $\hat{B}_.$ est une application de Ω dans Ω_0. Elle est clairement mesurable de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}_\infty$, puisque $\forall t$: $\hat{B}_t$ est $\mathcal{F}$-mesurable. On prend pour Π la mesure image de P par $\hat{B}_.$: $\Pi := P_{\hat{B}_.}$ cd $\forall C \in \mathcal{G}_\infty : \Pi(C) := P(\hat{B}_.^{-1}(C))$.

Sous Π, montrons que $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. En effet, pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
\Pi(\{\omega_0 | X_t(\omega_0) \in A\}) &= \Pi(X_t^{-1}(A)) = P(\hat{B}_.^{-1}(X_t^{-1}(A))) \\
&= P(\{\omega | \hat{B}_.(\omega) \in X_t^{-1}(A)\}) \\
&= P(\{\omega | X_t(\hat{B}_.(\omega)) \in A\}) \\
&= P(\{\omega | \hat{B}_t(\omega) \in A\})
\end{aligned}$$

Or $\hat{B}$ est un mouvement brownien sous P.

Cet argument se généralise aisément pour montrer que $X(\omega_0)$ est un mouvement brownien sous Π (en réalité, on peut montrer que les processus X et $\hat{B}$ sont équivalents, c.à. d. ils ont les mêmes distributions fini-dimensionnelles.)

2) *unicité:* Si Π et Π' sont deux mesures sur $(\Omega_0, \mathcal{G}_\infty)$ telles que X soit un mouvement brownien, alors, pour tout ensemble J fini dans $I\!R^+$, Π et Π' concident sur $\mathcal{G}_J := \sigma(X_t, t \in J)$. En effet, du caractère brownien de X, on déduit que le vecteur aléatoire $(X_t, t \in J)$ est gaussien centré et $cov(X_t, X_t') = t \wedge t'$. La loi de $(X_t, t \in J)$ est donc entièrement déterminée et est identique sous Π et Π'.

En d'autres termes $\mathcal{G}_J \subset \mathcal{U} := \{A \in \mathcal{G}_\infty | \Pi(A) = \Pi'(A)\}$. Partant $\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J \subset \mathcal{U}$.

Or $\mathcal{U}$ se révèle être une classe monotone suite la σ-additivité de Π et Π'. Il résulte donc du théorème des classes monotones que $\sigma(\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J) \subset \mathcal{U}$. Or $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J)$. Par la définition de $\mathcal{U}$, on en déduit que Π et Π' concident sur $\mathcal{G}_\infty$. ∎

2.2 Basic properties of the Brownian motion

Theorem 2.12 *If $B$is a Brownian motion, then*

1. *(self-similarity) $\forall c > 0$ $X_t = c^{-1} B_{c^2 t}$ is a Brownian motion (for its natural filtration).*

2. *$Y_t = t B_{t^{-1}}$, $Y_0 = 0$ is a Brownian motion (for its natural filtration).*

3. *$\forall\ \delta > 0$ $Z_t = B_{t+\delta} - B_\delta$ is a Brownian motion (for its natural filtration).*

Preuve:

1. Les trajectoires X_t sont continues, car celles de B_t le sont. De plus $X_0 = c^{-1} B_0 = 0$. Observons que
$X_{t+s} - X_t = c^{-1}(B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t})$=$c^{-1}(B_{t'+s'} - B_{t'})$ avec $t' = c^2 t$ et $s' = c^2 s$ donc $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(B_\mu, \mu \le t') = \sigma(B_\mu, \mu \le c^2 t) = \sigma(X_v, v \le t)$ donc $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(X_v, v \le t)$. Puisque $B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t} \sim \mathcal{N}(0, c^2 s)$, il est clair que $X_{t+s} - X_t = c^{-1}(B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t}) \sim \mathcal{N}(0,s)$. Ainsi X_t est un mouvement brownien.

2. Y est clairement un processus gaussien centré (voir exercice 2.10): Pour tout J fini $\subset$ $]0,\infty[$, le vecteur aléatoire $(Y_t, t \in J)$ est l'image du vecteur gaussien centré $(B_t, t \in J)$ par une application linéaire. De plus $cov(Y_t, Y_s) = ts \cdot cov(B_{\frac{1}{t}}, B_{\frac{1}{s}}) = ts(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}) = s \wedge t$.

Ainsi, pour tout J fini $\subset]0,\infty[$, les vecteurs aléatoires $(Y_t, t \in J)$ et $(B_t, t \in J)$ ont même loi, puisqu'ils sont des vecteur gaussiens centrés de même matrice de covariance. Pour pouvoir appliquer l'exercice 2.10 et conclure que Y est un mouvement brownien, il nous suffit de montrer que les trajectoires de Y sont continues. Par continuité de celles de B, les trajectoires de Y sont clairement continues pour $t > 0$ et il nous suffit de montrer que $P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\}) = 1$. Puisque $t \in]0,\infty[\to Y_t(\omega)$ est une fonction continue, nous avons

$$\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\} = \{\omega | \lim_{q\searrow 0, q\in\mathbb{Q}} Y_t(\omega) = 0\}$$

Si $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles finis dont l'union est $\mathbb{Q}_+$, l'ensemble $\{\omega | \lim_{q\searrow 0, q\in\mathbb{Q}} Y_t(\omega) = 0\}$ est égal

$$\{\omega | \forall k \in \mathbb{N}\colon \exists M \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon \forall q \in J_n \cap]0, 1/M]\colon |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}.$$

Par monotonie des suites d'ensembles considérées, la probabilité $P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\})$ peut s'écrire comme

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M]; |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}).$$

Puisque $(Y_t, t \in \forall q \in J_n \cap]0, 1/M])$ a la même loi que $(B_t, t \in \forall q \in J_n \cap]0, 1/M])$, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned}&P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M\} \; |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}) \\ &= P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M\} \; |B_q(\omega)| \leq 1/k\}),\end{aligned}$$

et donc

$$P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\}) = P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} B_t(\omega) = 0\}) = 1.$$

3. Les Z_t ont leurs trajectoires continues et $Z_0 = B_\delta - B_\delta = 0$
$Z_{t+s} - Z_t = B_{t+s+\delta} - B_\delta + B_{t+\delta} - B_\delta = B_{t+\delta+s} - B_{t+\delta}$ ceci est indépendant de $\sigma(B_\mu, \mu \leq t+\delta) \supset \sigma(Z_v, v \leq t)$.
Enfin, $Z_{t+s} - Z_t = B_{t+\delta+s} - B_{t+\delta} \sim \mathcal{N}(0,s)$ Donc Z_t est un mouvement brownien. ■

Theorem 2.13 *(The 0-1 law)*
If B is a Brownian motion with respect to $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, then

$$\forall A \in \mathcal{F}_{0^+} : P(A) \in \{0,1\}.$$

Preuve: Soit $0 < \epsilon < \delta$. Posons $\mathcal{F}_{\epsilon,\delta} = \sigma(B_t - B_\epsilon, \epsilon \leq t \leq \delta)$. Puisque $\forall t \in [0,\delta]$:

$$B_t = \lim_{\epsilon\searrow 0}(B_t - B_\epsilon)$$

il suit que B_t, $0 \leq t \leq \delta$ est $\sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta})$-mesurable. Ainsi

$$\mathcal{F}_\delta \subset \sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}) \text{ donc } \mathcal{F}_\delta = \sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}).$$

Si $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, alors $\forall \epsilon > 0$, $A \in \mathcal{F}_\epsilon$ qui est indépendant de $\mathcal{F}_{\epsilon,\delta}$, donc, en utilisant l'exercice 1.20, Ch.1, A est indépendant de $\sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}) = \mathcal{F}_\delta \ni A^c$. Ainsi A est indépendant de A^c, et donc $P(A)P(A^c) = P(A \cap A^c) = 0$, d'où $P(A)(1 - P(A)) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. ■

Corollary 2.14 *If B is a Brownian motion, then*

$$P(\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0) = 1.$$

Preuve: Soit $A_\epsilon = \{\sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0\}$. On a alors:

$$A = \{\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0\} = \cap_n A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{F}_{0^+}$$

donc, d'après le théorème précédent $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
Or $P(A) = \lim P(A_{\frac{1}{n}}) \geq \lim P(B_{\frac{1}{n}} > 0) = \frac{1}{2}$ donc $P(A) = 1$. ■

Remark 2.15 *Since $-B$ is also a Brownian motion (why?) one can similarly show that : $P(\forall \epsilon > 0, \inf_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t < 0) = 1$, and thus*

$$P(\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0 \textit{ et } \inf_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t < 0) = 1.$$

So, before leaving the origin 0, the trajectory of the Brownian motion oscillates infinitely many times between the positive values and the negative values, as the function $t \to t \sin(1/t)$. Between two oscillations, the trajectory reaches the horizontal axis and then $P(\{\omega | \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} : t_n \searrow 0 \textit{ et } B_{t_n}(\omega) = 0\}) = 1$.

Corollary 2.16 $P(\sup_{t \geq 0} B_t = \infty) = 1$.

Preuve: Soient $c > 0$ et $\delta > 0$, alors

$$\begin{aligned} P(\sup_{t \geq 0} B_t \geq c) &= P(\sup_{t \geq 0} \frac{\delta}{c} B_t \geq \delta) \\ &= P(\sup_{t \geq 0} \frac{\delta}{c} B_{\frac{\delta}{c} t} \geq \delta) \\ &= P(\sup_{t \geq 0} X_t \geq \delta), \end{aligned}$$

où X est un mouvement brownien, comme il résulte du Théorème 2.12(la propriété d'autosimilarité). En prenant la limite de la dernière ligne lorsque $\delta \searrow 0$, on obtient $P(\sup_{t \geq 0} X_t > 0)$ qui vaut 1 par le corollaire précédent. Ainsi $\forall c > 0$, $P(\sup_{t \geq 0} B_t \geq c) = 1$, ce qui nous permet de conclure $P(\sup_{t \geq 0} B_t = \infty) = 1$. ■

Remark 2.17 *Since the Brownian trajectories are continuous , the previous corollary indicates in fact that* $\limsup_{t\nearrow\infty} B_t = \infty$. *By symmetry, we also have* $\liminf_{t\nearrow\infty} B_t = -\infty$, *and then the Brownian reaches infinitely many every point in* $I\!R$ *(we say that the Brownian is recurrent)*

Stochastic processes related to the Brownian motion

- The Brownian bridge: consider the process

$$X_t = B_t - tB_1$$

with $t \in [0, 1]$.

Exercice 2.18 (TO BE DONE IN CLASS) *Montrer qu'll s'agit d'un processus gaussian centré de covariance*

$$E(X_t X_s) = \min(s, t) - st.$$

- the Ornstein-Uhlenbeck process, which is a centered Gaussian process with covariance

$$E(X_t X_s) = e^{-\beta|t-s|}$$

où $\beta > 0$.

- the geometric Brownian motion proposed by Black, Scholes and Merton to model financial markets:

$$X_t = e^{\sigma B_t + \mu t}$$

with $t \geq 0$, $\sigma > 0$ and $\mu \in \mathbb{R}$.

- the fractional Brownian motion: this is a centered Gaussian process B^H with covariance

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

where $H \in (0, 1)$ is called the Hurst parameter.

Exercice 2.19 (TO BE DONE IN CLASS) *Montrer que si* $H = \frac{1}{2}$ *on retrouve le mouvement brownien. Montrer que* B^H *est* H *-autosimilaire, c.à.d pour tout* $c > 0$, $c^{-H} B_{ct}, t \geq 0$ *est un mouvement brownien fractionnaire; Montrer que les trajectoires* B^H *sont p.s. contunues (ces trajectories sont même Hölderiennes d'ordre* $\delta < H$*).*

2.3 Quadratic variation:

Let B be a Brownian motion and suppose that $s > t$. For any partition Δ of the interval $[t, s]$ (i.e. $\Delta = \{t = t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n = s\}$), we set: $|\Delta|$=$\max_{i=1}^{i=n-1}(t_{i+1} - t_i)$. Finally let us denote by $T_{s,t}^{\Delta}$ the random variable

$$T_{s,t}^{\Delta} = \sum_{i=1}^{i=n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Theorem 2.20 *If $\{\Delta^n\}_{n\in N}$ is a sequence of partitions of the interval [s,t] such that $|\Delta^n|$ $\to$ 0 when $n \to \infty$. Then*

$$T_{s,t}^{\Delta^n} \to s - t$$

in $L^2(\Omega)$.

Preuve: Calculons $E[T_{s,t}^{\Delta^n}]$: puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$, $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ peut s'écrire $\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_i$ avec $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ainsi:

$$E[T_{s,t}^{\Delta^n}] = \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)E[Z_i^2] = \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = t_n - t_1 = s - t.$$

$$\begin{aligned}
var[T_{s,t}^{\Delta^n}] &= \sum_{i=1}^{i=n-1} var[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{i=1}^{i=n-1} var[(t_{i+1} - t_i)Z_i^2] \\
&= \sum_{i=1}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 var(Z_i^2) \\
&\leq \sum_{i=1}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)|\Delta^n| var(Z^2) \\
&= (s - t)var(Z^2)|\Delta^n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Or

$$var[T_{s,t}^{\Delta^n}] = E[(T_{s,t}^{\Delta^n} - (s - t))^2] = \|T_{s,t}^{\Delta^n} - (s - t)\|_{L^2}^2$$

d'où $T_{s,t}^{\Delta^n} \to s - t$ dans L^2 ∎

If $f : [0, \infty[\to I\!R$, we define

$$V_{t,s}(f) := \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

where Δ is a finite partition of $[t, s]$. The term $V_{t,s}(f)$ is called the variation of the function f on the interval $[t, s]$.

Remark 2.21 *We recall the following result that characterizes the classe of functions with bounnded variation: : $V_{t,s}(f) < \infty$ if and only if there exist two increasing functions g and $h : [s, t] \to I\!R$ with $f = g - h$.*

Corollary 2.22 *If B is a Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, there exist a subset Ω' of Ω with probability $P(\Omega') = 1$ such that $\forall \omega \in \Omega' : \forall s > t \geq 0 : V_{t,s}(B_.(\omega)) = \infty$.*

Preuve: Pour toute paire de nombres rationnels $p < q$, choisissons une suite $\Delta^n_{p,q}$ de découpages de $[p, q]$ telle que $|\Delta^n_{p,q}| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème 2.20, $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}$ converge au sens L^2 vers $p - q$. Par selection d'une sous-suite, nous pouvons supposer la convergence P-pp. Ainsi, il existe un ensemble $\Omega_{p,q} \subset \Omega$ de probabilité $P(\Omega_{p,q}) = 1$ sur lequel $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}$ converge ponctuellement vers $p - q$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de paires de rationnels, l'ensemble $\Omega' := \cap_{(p,q)\in \mathbb{Q}^2_+} \Omega_{p,q}$ a une probabilité $P(\Omega') = 1$.

Soit $\omega \in \Omega'$. Soit $s > t$ et choisissons une paire de rationnels $p < q$ dans $[t, s]$. Puisque $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}(\omega)$ converge vers $q - p > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N$, $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}(\omega) > (q - p)/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(q-p)/2 &< \sum_{i=1}^{n-1} (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot V_{p,q}(B_.(\omega)) \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot V_{s,t}(B_.(\omega))
\end{aligned}$$

Puisque $|\Delta^n_{p,q}|$ tend vers 0 et que la trajectoire $B_.(\omega)$ est uniformément continue sur $[s, t]$, $(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|)$ tend vers 0 avec n. Ceci n'est possible que si $V_{s,t}(B_.(\omega)) = \infty$. ■

The above corollary shows that the trajectoties of the Brownian motion are neither increasing nor decresing on any interval!

Corollary 2.23 *If B is a Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, there exists a subset Ω' of Ω with $P(\Omega') = 1$ such that $\forall \omega \in \Omega'$, the trajectory $B_.(\omega)$ is not holderian of order $\alpha > 1/2$ on any interval.*

Preuve: Reprenons l'ensemble Ω' construit dans la démonstration précédente. Soit $\omega \in \Omega'$, et supposons la trajectoire $B_.(\omega)$ höldérienne d'ordre $\alpha > 1/2$ sur l'intervalle $[t, s]$:

$$\exists K < \infty : \forall t_1, t_2 \in [t, s] : |B_{t_1}(\omega) - B_{t_2}(\omega)| \leq K|t_1 - t_2|^\alpha$$

Si p, q sont des rationnels tels que $t < p < q < s$, alors

$$\begin{aligned}
T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) &= \sum_{i=1}^{n-1}(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\
&\leq K^2 \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|^{2\alpha} \\
&\leq K^2 |\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| \\
&= K^2 |\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1}(p - q)
\end{aligned}$$

Puisque $T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) \to q - p > 0$ et $|\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} \to 0$ $(\alpha > 1/2)$, les dernières inégalités ne sont possibles que si $K = \infty$. ■

Remark 2.24 *Show that with probability 1,are not holderian of order 1/2 on any interval; (the proof is not mandatory, it can be found in various monographs.)*

More generally, one can define the variation of order $p > 0$ of a process X as the limit (in probability) of the sequence

$$T_t^{\Delta,p}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p$$

where the partition Δ is as before.

Exercice 2.25 (IL SERA FAIT EN TD) *Soit X un processus contunuu et adapté. Montrer que si*

$$\lim_{|\Delta| \to 0} T_t^{\Delta,p}(X) = L_t$$

en probabilité, où L_t est une v.a. à valeurs dans $[0, \infty[$ alors

$$\forall q > p, \lim_{|\Delta| \to 0} T_t^{\Delta,q}(X) = 0$$

en probabilité et

$$\forall 0 < q < p, \lim_{|\Delta| \to 0} T_t^{\Delta,q}(X) = \infty$$

en probabilité sur l'ensemble $(L_t > 0)$.

En déduire que les trajectoires du brownien ne sont pas à variation bornée.

3 CHAPITRE 3: Theory of martingales

3.1 Filtrations and Stopping Times

Definition 3.1 *Let τ be a random variable , $\tau : \Omega \to \bar{I\!R}^{+}$. Then$\tau$ is a stopping time with respect to $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, if $\forall t \in I\!R^{+}$ one has $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Exmmple 3.2 *Let X be a right- continuous process adapted to the filtration $\mathcal{F}_t$. If O is an open subset of $I\!R$, then: $\tau_O = inf\{t \geq 0 | X_t \in O\}$ is a stopping time with respect to the filtration $\mathcal{F}_{t^+}$*

Preuve: Pour tout $a \geq 0$, en utilisant de caractéristion de inf

$$\begin{aligned}
\{\tau_O \leq a\} &= \{\omega : \forall \ n \,\exists\, t \in \mathbf{Q}^{+}, t \leq a + \frac{1}{n}, X_t \in O\} \\
&= \cap_n \{\omega : \exists t \in \mathbf{Q}^{+}, t \leq a + \frac{1}{n}, X_t \in O\} \\
&= \cap_n \cup_{t \in \mathbf{Q} \cap [0, a+\frac{1}{n}]} \{\omega | X_t(\omega) \in O\}.
\end{aligned}$$

Or

$$\{\omega | X_t(\omega) \in O\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}}.$$

Mais

$$A_n := \cup_{t \in \mathbf{Q} \cap [0, a+\frac{1}{n}]} \{\omega | X_t(\omega \in O\} \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}}$$

et $\forall n \geq m : A_n \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}}$ d'où $\{\tau_O \leq a\} = \cap_{n \geq m} A_n \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}}$. En conséquence on obtient que

$$\{\tau_O \leq a\} \in \cap_m \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}} = \mathcal{F}_{a^+}.$$

Ceci étant vrai pour tout a, nous avons montré que τ_O est un $\mathcal{F}_{t^+}$ temps d'arrêt. ■

Exmmple 3.3 *If X is a continuous process continu, $\mathcal{F}_t$ adapted,and $A$is an closed subset of $I\!R$, then: $\tau_A(\omega) := \inf\{t | X_t(\omega) \in A\}$, with the convention $\inf \emptyset := \infty$, is a stopping time for $\mathcal{F}_t$.*

Preuve: Puisque A est fermé et X est continu, on a:

$$\{\omega | \tau_A(\omega) \leq t\} = \{\omega \inf_{0 \leq q \leq t} d(X_q(\omega), A) = 0, q \in \mathbf{Q}^{+}\}.$$

Or $d(x, A)$ est une fonction continue en x, donc mesurable sur $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$. $d(X_{q_n}(\omega), A)$ est alors $\mathcal{F}_t$-mesurable, par composition de fonctions mesurables et il s'ensuit que: $g := inf_{0 \leq q \leq t}\{d(X_q(\omega), A), q \in \mathbf{Q}^{+}\}$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable, comme infimum d'un nombre dénombrable de fonctions mesurables. Ainsi:

$$\{\tau_A \leq t\} = g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}_t.$$

τ_A est donc un temps d'arrêt. ■

Remark 3.4 *If the filtration is right-continuous, then clearly τ_O est τ_A are $\mathcal{F}_t$ stopping times.*

Exercice 3.5 *Montrez pourquoi $\tau(\omega) := \inf\{t|X_t = max_{s\geq 0} X_s\}$ n'est pas en général un temps d'arrêt sur la filtration naturelle de X.*

Definition 3.6 *If $\tau$is a $\mathcal{F}_t$ stopping time, we define*

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0 \; A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Exercice 3.7 *Show that $\mathcal{F}_\tau$ is a σ-algebra.*

Preuve: On a: $\emptyset \cap \{\tau \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$.

Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$. Montrons que $A^c \in \mathcal{F}_\tau$: En effet:

$$A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap (A \cap \{\tau \leq t\})^c \in \mathcal{F}_t$$

car $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_\tau$, alors $\forall n$ et $\forall t$ on a:

$$A_n \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \cup_n (A_n \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

donc

$$(\cup_n A_n) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et donc

$$\cup_n A_n \in \mathcal{F}_\tau.$$

Donc $\mathcal{F}_\tau$ est une σ-algèbre. ∎

Theorem 3.8 *If τ and τ' are two $\mathcal{F}_t$ stopping times and if $\forall \omega \; \tau(\omega) \leq \tau'(\omega)$, then $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau'}$.*

Preuve: Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$ montrons que $A \in \mathcal{F}_{\tau'}$: Si $t \geq 0$, alors $\{\tau' \leq t\} \subset \{\tau \leq t\}$ donc

$$A \cap \{\tau' \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\}.$$

Puisque $A \in \mathcal{F}_\tau$, on a $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et, comme τ' est un temps d'arrêt, alors $\{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ d'où $A \cap \{\tau' \leq t\} = A \cap \{\tau' \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ donc $A \in \mathcal{F}_{\tau'}$. ∎

Theorem 3.9 *If τ and τ' are $\mathcal{F}_t$ stopping times, then: $\tau \vee \tau = max(\tau, \tau')$ and $\tau \wedge \tau = min(\tau, \tau')$ are stopping times.*

Preuve: Soit $t \geq 0$, alors

$$\{\tau \vee \tau' \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

car

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et $\{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_t$ est une σ-algèbre.
Donc $\tau \vee \tau = max(\tau, \tau')$ est un temps d'arrêt.

De même,

$$\{\tau \wedge \tau' \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Donc $\tau \wedge \tau'$ est un temps d'arrêt. ■

Exercice 3.10 *Montrez que τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.*

Preuve: Ceci revient à montrer que $\forall a \geq 0 : \{\omega | \tau(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}_\tau$.
Soit $t \geq 0$, alors:

$$\{\tau \leq a\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq a \wedge t\} \in \mathcal{F}_{a \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$$

Ceci étant vrai pour tout t, il suit que $\{\tau \leq a\} \in \mathcal{F}_\tau$ ■

Exercice 3.11 *Montrer que si τ et τ' sont deux temps d'arrêt par rapport à une filtration continue à droite, alors $\tau + \tau'$ est un temps d'arrêt pour la même filtration.*

Preuve: Utiliser la décomposition, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \{\tau + \tau' > t\} &= \{\tau = 0, \tau' > t\} \bigcup \{0 < \tau < t, \tau + \tau' > t\} \\ &\bigcup \{\tau > t, \tau' = 0\} \bigcup \{\tau \geq t, \tau' > 0\}. \end{aligned}$$

Le premier, troisième et quatrième terme sont evidemment dans $\mathcal{F}_t$. Pour le deuxème, l'écrire comme

$$\bigcup_{r \in Q^+, 0 < r < t} \{t > \tau > r, \tau' > t - r\}.$$

■

Exercice 3.12 *Si $(\tau_n)_{n \geq 1}$ est une suite de temps d' arrêt pour une filtration continue à droite, alors*

$$\sup_{n \geq 1} \tau_n, \inf_{n \geq 1} \tau_n, \overline{\lim_{n \geq 1}} \tau_n, \underline{\lim_{n \geq 1}} \tau_n$$

sont des temps d'arrêt.

Preuve: Preuve: Utiliser les indentités

$$\{\sup_n \tau_n \leq t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leq t\}, \{\inf_n \tau_n \geq t\} = \bigcup_n \{\tau_n \geq t\}.$$

■

Progressively measurable stochastic processes

Let X be a stochastic process adapted to the filtration $\mathcal{F}_t$ on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and let τ be a $\mathcal{F}_t$-stopping time.

Remark 3.13 *Let us denote by X_τ the application $\omega \to X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$. The fact that X is adapted does not suffice to conclude that X_τ is a random variable . $\mathcal{F}$ measurable. The purpose of this paragraph is to introducea sufficient condition on X in order to have X_τ measurable.*

Definition 3.14 *A process X is progressively measurable if $\forall\, T \geq 0$*

$$X : (\Omega \times [0,T]) \to I\!R$$

is $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ measurable.

Remark 3.15 *It is obvious that a progressively measruable process X on $\mathcal{F}_t$ is in particular adapted to $\mathcal{F}_t$.*

Theorem 3.16 *If X is $\mathcal{F}_t$ progressively measurable, and if τ is a $\mathcal{F}_t$-stopping time, then X_τ is $\mathcal{F}_\tau$ measurable.*

Preuve: Il suffit de montrer que si $A \in \mathcal{B}_{I\!R}$, alors $X_\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}_\tau$ autrement dit, pour tout $t \geq 0$ fixé, $X_\tau^{-1}(A) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Or

$$\begin{aligned} X_\tau^{-1}(A) \cap \{\tau \leq t\} &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t \text{ et } X_\tau(\omega) \in A\} \\ &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t \text{ et } X_{\tau \wedge t}(\omega) \in A\} \\ &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t\} \cap X_{\tau \wedge t}^{-1}(A). \end{aligned}$$

Si τ est un temps d'arrêt, alors $\tau \wedge t$ est un temps d'arrêt plus petit que t et puisque $\tau \wedge t$ est $\mathcal{F}_{\tau \wedge t}$ mesurable, il est $\mathcal{F}_t$ mesurable. Posons

$$g : (\Omega, \mathcal{F}_t) \longrightarrow (\Omega \times [0,t], \mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}) : \omega \longmapsto g(\omega) := (\omega, \tau \wedge t(\omega)).$$

Puisque les deux composantes de g, ω et $\tau \wedge t(\omega)$ sont mesurables respectivement de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{F}_t$ et de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{B}_{[0,t]}$, g est mesurable de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}$. Considérons X comme une fonction mesurable sur $\Omega \times [0,t]$:

$$X : (\Omega \times [0,t], \mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}) \to (I\!R, \mathcal{B}_{I\!R}) : (\omega, s) \longmapsto X(\omega, s).$$

alors $X_{\tau \wedge t}$ est la composée des fonctions mesurables X et g:

$$X_\tau \wedge t = X \circ g$$

et est donc mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ vers $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$. Ainsi, $\forall A \in \mathcal{B}_{I\!R} : X^{-1}_{\tau \wedge t}(A) \in \mathcal{F}_t$. Puisque par ailleurs $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, on peut conclure que $X^{-1}_\tau(A) \in \mathcal{F}_\tau$. ∎

Theorem 3.17 *If X is a continuous adapted to $\mathcal{F}_t$ stochastic process , then it is progressively measurable.*

Preuve: Soit

$$X^n_t(\omega) := X_{\frac{k}{n}}(\omega) \text{ si } \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}.$$

On montre que X^n_t est progressivement mesurable.

Soit T fixé si $t \leq T$ alors

$$X^n_t(\omega) = \sum_{k=0}^{k \leq nT} \mathbf{1}_{\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}} X_{\frac{k}{n}}(\omega)$$

or $X_{\frac{k}{n}}$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\mathbf{1}_{\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}}$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable donc $X_{\frac{k}{n}} \mathbf{1}_{\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}}$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable, il s'ensuit que $\sum_{k=0}^{k \leq nT} \mathbf{1}_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} X_{\frac{k}{n}}(\omega)$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable.
Par continuité de X on a: $\lim_{n \to \infty} X^n_t(\omega) = X_t(\omega)$ et, comme X^n_t est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable, X l'est également. Autrement dit X est progressivement mesurable. ∎

Exercice 3.18 *Si τ est un temps d'arrêt, si X est un processus continu adapté si $X^\tau_t(\omega) = X_{\tau \wedge t}(\omega)$. Montrez que $X^\tau_t(\omega)$ est progressivement mesurable.*

Exercice 3.19 *(facultatif) Si X est un processus continu, tel que $X_0 = 0$, et si $0 < a < b$ que peut on dire de $X_{\tau_{[a,b]}}(\omega)$ pour les ω tels que $\tau_{[a,b]}(\omega) < \infty$?*

Si X est un mouvement brownien, montez que $P(\tau_{[a,b]}(\omega) < \infty) = 1$.

Exercice 3.20 *(facultatif) Si X est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien, et $a > 0$, et $X^*_s(\omega) := \sup_{t \in [0,s]} X_t(\omega)$,*

a) montrez que X^*_1 est $\mathcal{F}_1$-mesurable.

b) montrez que $\{\tau_{\{a\}} \leq s\} = \{X^*_s \geq a\}$.

c) montrez que X^*_s à la même loi que $\sqrt{s} X^*_1$ et que $\tau_{\{a\}}$ a la même loi que $a^2/(X^*_1)^2$.

d) montrez que $\tau_1 := \inf\{t | X_t = X^*_1\}$ et $\tau_2 := \sup\{t \leq 1 | X_t = 0\}$ ne sont pas des temps d'arrêt.

3.2 Martingales: Definition et properties

Definition 3.21 *A martingale with respect to the filtration $\mathcal{F}_t$ $t \in T$ (T discrete or continuous)is an adapted process such that*

1. $\forall t \in T$, $X_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$
2. $\forall t, s \in T$, $t \geq s$ $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *a.s.*

Exmmple 3.22 *If $Y \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_\infty)$ we set $X_t = E(Y|\mathcal{F}_t)$ then X_t is a martingale.*

Preuve: En effet, si $s > t$, on a $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ donc:

$$E(X_s|\mathcal{F}_t) = E[E(Y|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t] = E(Y|\mathcal{F}_t) = X_t$$

■

Definition 3.23 *A sub-martingale (respectively super-martingale) on the filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ is a $\mathcal{F}_t$ -adapted process such that*

1. $\forall t \in T$ $X_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$
2. $\forall t, s \in T$ $t > s$ $E[X_t|F_s] \geq X_s$ *(respectively* $E[X_s|F_t] \leq X_t$*).*

Exmmple 3.24 *If B_t is a $\mathcal{F}_t$ Brownian motion, then*

1. *B_t is a martingale .*
2. *$X_t = {B_t}^2 - t$ is also a martingale.*
3. *if $\alpha \in I\!R$ then $M_t^\alpha = exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)$ is also a martingale.*

Preuve:

1. On sait que $B_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$ on a:

$$E(B_s|\mathcal{F}_t) = E[B_t + (B_s - B_t)|\mathcal{F}_t] = B_t + E(B_s - B_t)$$

car $B_s - B_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ et comme $B_s - B_t$ suit une loi normale de moyenne nulle alors $E(B_s|\mathcal{F}_t)$=B_t. Donc B_t est une martingale.

2. On sait que $X_t = {B_t}^2 - t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$

$$\begin{aligned}
E(X_s|\mathcal{F}_t) &= E({B_s}^2|\mathcal{F}_t) - s \\
&= E[(B_t + (B_s - B_t))^2|\mathcal{F}_t] - s \\
&= E[B_t^2|\mathcal{F}_t] + E[(B_s - B_t)^2|\mathcal{F}_t] + 2E[B_t(B_s - B_t)|\mathcal{F}_t] - s \\
&= B_t^2 + E[(B_s - B_t)^2] + 2B_t E[B_s - B_t] - s \\
&= B_t^2 + s - t + 0 - s = B_t^2 - t = X_t.
\end{aligned}$$

Donc X_t est une martingale.

3. Il est évident que $M_t^\alpha \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$ on a:

$$\begin{aligned} E(M_s^\alpha|\mathcal{F}_t) &= E[\exp{(\alpha B_t)}|\mathcal{F}_t]\exp{(\frac{-\alpha^2}{2}s)} \\ &= E[\exp{(\alpha[B_t + (B_s - B_t)])}|\mathcal{F}_t]\exp{(\frac{-\alpha^2}{2}s)} \\ &= E[\exp{(\alpha(B_s - B_t))}|\mathcal{F}_t]\exp{(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s)} \\ &= E[\exp{(\alpha\sqrt{s-t}Z)}]\exp{(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s)} \\ &= \psi_Z(-\alpha\sqrt{s-t})\exp{(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s)} \\ &= \exp{(\frac{-(\alpha\sqrt{s-t})^2}{2})}\exp{(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s)} \\ &= \exp{(\frac{\alpha^2(s-t)}{2})}\exp{(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s)} \\ &= \exp{(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)} = M_t^\alpha \end{aligned}$$

oú par ψ on a noté la fonction caractéristique. Donc M_t^α est une martingale. ■

Exmmple 3.25 *(the Poisson process)* A Poisson process with intensity $\lambda > 0$*is an adapted cadlag process* $(N_t)_{t\geq 0}$ *such that* $N_0 = 0$ *a.s. and for every* $0 \leq s \leq t$, $N_t - N_s$ *is independent of* $\mathcal{F}_s$ *and it has the Poisson distribution with parameter* $\lambda(t-s)$. The compensated Poisson process *is defined by, for every* $t \geq 0$

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

Show that $\tilde{N}$ *is a martingale.*

Theorem 3.26 *1. If* X *is a martingale and* ϕ *a continuous convex function such that* $\forall t,\ \phi(X_t) \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$*then* $\phi(X_t)$ *is a sub- martingale.*

2. If X *is a sub-martingale and if* ϕ *is a increasing continuous convex function such that* $\forall t,\ \phi(X_t) \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ *then* $\phi(X_t)$ *is a sub-martingale.*

Preuve:

1. D'après l'inégalité de Jensen on a pour $s > t$ $E[\phi(X_s)|\mathcal{F}_t] \geq \phi[E(X_s|\mathcal{F}_t)] = \phi(X_t)$.
2. Si $s > t$ $E[\phi(X_s)|\mathcal{F}_t] \geq \phi[E(X_s|\mathcal{F}_t)] \geq \phi(X_t)$ car X est une sous martingale et ϕ est croissante. ■

Exmmple 3.27 *If X_t is a martingale then $Y_t = |X_t|^p$ is a sub- martingale $\forall p \geq 1$*

Preuve: En effet, la fonction $x \mapsto |x|^p$ est une fonction convexe continue. ■

Nous allons ensuite considérer les martingales discrètes.

Theorem 3.28 *If H is a bounded process adapted to $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in I\!N}$ and X a $\mathcal{F}_n$ martingale, then the process Y defined recurrently by $Y_0 = 0$ and $Y_{n+1} = Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)$ is a martingale.*

Preuve: Puisque X_n est une martingale et H_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a:

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= Y_n + H_n[E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n] \\ &= Y_n \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E[Y_{n+k}|\mathcal{F}_n] &= E[E(Y_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k-1})|\mathcal{F}_n] \\ &= E[Y_{n+k-1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \cdots \\ &= E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= Y_n \end{aligned}$$

■

Remark 3.29 *If we denote by $\Delta(X_n)$ the increment $(X_{n+1} - X_n)$ of the process X, then Y_n can be formally written asx $Y_n = Y_0 + \sum_{t=0}^{n-1} H_t\Delta(X_t)$.This is discrete time version of the stochastic integral $Y_t = Y_0 + \int H_t dB_t$ which will be introduced in the next chapter.*

Theorem 3.30 *If H is a bounded process adapted to $\mathcal{F}_n$ and positive and if X is a $\mathcal{F}_n$ sub-martingale,then the process Y defined by $Y_0 = 0$ et Y_{n+1}= $Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)$is a sub-martingale.*

Exercice 3.31 *Démontrer ce résultat en suivant la preuve du théorème précédent.*

Theorem 3.32 *(stopping theorem): If X_n is a $\mathcal{F}_n$-martingale, and $\tau \leq \sigma$ are two bounded stopping times then $E(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau)$=$X_\tau$.*

Preuve: Supposons que σest borné par $M > 0$: $|\sigma(\omega)| \leq M$. Il suffit de montrer que

$$E\left(X_\tau - X_\sigma\right) 1_B = 0$$

si $B \in \mathcal{F}_\tau$. Posons

$$H_n = \mathbf{1}_{\{\tau \leq n < \sigma\}} \mathbf{1}_B$$

alors H_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable car $B \cap \{\tau \leq n < \sigma\} = B \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$.

Soit

$$Y_M = 0 + \sum_{n=0}^{n=M-1} H_n(X_{n+1} - X_n).$$

On va prouver que

$$Y_M = 1_B(X_\tau - X_\sigma).$$

Alors

$$Y_M = -H_0X_0 + (H_0 - H_1)X_1 + (H_1 - H_2)X_2 + \cdots + H_{M-1}X_M.$$

Posons $H_n^\sigma = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{n<\sigma\}}$ et $H_n^\tau = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{n<\tau\}}$ de sorte que $H_n = H_n^\sigma - H_n^\tau$. Ainsi, on peut écrire:

$$\begin{aligned} Y_M &= (\mathbf{1}_B - H_0^\sigma)X_0 + (H_0^\sigma - H_1^\sigma)X_1 + \cdots + H_{M-1}^\sigma X_M \\ &\quad -(\mathbf{1}_B - H_0^\tau)X_0 - (H_0^\tau - H_1^\tau)X_1 - \cdots - H_{M-1}^\tau X_M. \end{aligned}$$

Or

$$(H_n^\sigma - H_{n+1}^\sigma) = \mathbf{1}_B(\mathbf{1}_{\{\sigma>n\}} - \mathbf{1}_{\{\sigma>n+1\}}) = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{n+1\geq\sigma>n\}} = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{\sigma=n+1\}}.$$

On montre aussi que $\mathbf{1}_B - H_0^\sigma = \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_{\{\sigma>0\}}) = \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{\sigma=0\}}$. Ainsi:

$$Y_M = (\sum_{n=0}^{n=M} X_n\mathbf{1}_{\{\sigma=n\}})\mathbf{1}_B - (\sum_{n=0}^{n=M} X_n\mathbf{1}_{\{\tau=n\}})\mathbf{1}_B = (X_\sigma - X_\tau)\mathbf{1}_B$$

et puisque Y_M est une martingale:

$$E(Y_M) = E[E(Y_M|\mathcal{F}_0)] = E(Y_0) = 0.$$

Donc $\forall B \in \mathcal{F}_\tau : E[\mathbf{1}_B(X_\sigma - X_\tau)] = 0$ et nous concluons: $E(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau) = X_\tau$. ■

Remark 3.33 *We have the same result for sub-martingales.*

3.3 Doob's inequalities and consequences

We will fist study the discrete case.

Theorem 3.34 *(maximale inequality)*

If $\{X_n\}_{n=0,\ldots,N}$ is a $\mathcal{F}_n$ sub- martingale then $\forall\ \lambda > 0$

$$\lambda \cdot P(\max(X_0, X_1, \ldots, X_N) \geq \lambda) \leq E[X_N\mathbf{1}_{\{\max(X_0,X_1,\ldots,X_N)\geq\lambda\}}]$$

Preuve: Posons $\tau_\lambda := \min\{n|X_n \geq \lambda\}$ avec $\min\emptyset := N$. Alors τ_λ est un temps d'arrêt. Puisque X est une sous-martingale, il suit du théorème d'arrêt que $X_{\tau_\lambda} \leq E[X_N|F_{\tau_\lambda}]$. Donc

$$\begin{aligned} E[X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}>\lambda\}}] &\leq E[\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}E[X_N|F_{\tau_\lambda}]] \\ &= E[X_N\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}] \end{aligned}$$

car $\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}$ est $\mathcal{F}_{\tau_\lambda}$ mesurable. Lorsque $\max\{X_n\} \geq \lambda$, on a par définition de τ_λ: $X_{\tau_\lambda} \geq \lambda$. Ainsi, $X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}} \geq \lambda\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}$ et donc

$$\lambda P(\max\{X_n\} > \lambda) \leq E[X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}] \leq E[X_N\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}]$$

■

Corollary 3.35 *If X_n is a martingale in L^p for $p \geq 1$ and $X^* := \max(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_N|)$, then we have :*

$$\lambda^p P(X^* \geq \lambda) \leq E[|X_N|^p].$$

Preuve: Soit X_n une martingale alors $Y_n = |X_n|^p$ est une sous-martingale à laquelle nous pouvons appliquer le théorème précédent:

$$\lambda^p P(max(Y_1, \ldots, Y_N) \geq \lambda^p) \leq E[Y_N\mathbf{1}_{\{max(Y_1,\ldots,Y_N)\geq\lambda^p\}}] \leq E(Y_N).$$

Puisque $X^{*p} = max(Y_1, \ldots, Y_N)$ et $|X_N|^p = Y_N$, nous avons donc

$$\lambda^p P(X^* \geq \lambda) = \lambda^p P(X^{*p} \geq \lambda^p) \leq E[|X_N^p|].$$

■

Theorem 3.36 *(Inégalité de Doob): $\forall p > 1$, si $\{X_n\}_{n=1,\ldots,N}$ est une martingale dans L^p alors :*

$$E[|X_N|^p] \leq E[X^{*p}] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_N|^p]$$

avec $X^* := max(|X_1|, \ldots, |X_N|)$.

Preuve: On a $|X_N|^p \leq X^{*p}$ d'où $E[|X_N|^p] \leq E[X^{*p}]$. D'autre part d'après l'inégalité maximale on a: $E[|X_N|\mathbf{1}_{X^*>\lambda}] \geq \lambda E[\mathbf{1}_{X^*>\lambda}]$. En multipliant ceci par λ^{p-2} et en intégrant sur $[0, k]$, nous obtennons:

$$\int_0^k E[|X_N|\mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-2}]d\lambda \geq \int_0^k E[\mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-1}]d\lambda$$

Par le théorème de Fubini, on a:

$$\begin{array}{rcl} E[|X_N|\frac{(k\wedge X^*)^{p-1}}{p-1}] & = & E[|X_N| \int_0^k \mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-2}\, d\lambda] \\ & \geq & E[\int_0^k \mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-1}d\lambda] \\ & = & E[\frac{(k\wedge X^*)^p}{p}] \end{array}$$

Enfin si q est le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on a avec l'inégalité de Hölder:

$$E[|X_N|(k \wedge X^*)^{p-1}] \leq (E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(E[(k \wedge X^*)^{(p-1)q}]\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Puisque $(p-1)q = p$, nous avons donc

$$(E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \cdot (E[(k \wedge X^*)^p])^{\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{p-1} E[(k \wedge X^*)^p],$$

ce qui donne après simplification:

$$(E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \geq \frac{p}{p-1} \cdot (E[(k \wedge X^*)^p])^{\frac{1}{p}},$$

Comme $(k \wedge X^*)^p \nearrow (X^*)^p$ lorsque $k \to +\infty$ on obtient par le théorème de la convergence monotone:

$$E[(X^*)^p] = \lim_{k \to \infty} E[(k \wedge X^*)^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_N|^p]$$

■

Next we prove the Doob's inequality in continuous time. Let us consider the filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ on the space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definition 3.37 *We denote by $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ the set of $\{\mathcal{F}_t\}$-martingales X with continuous paths such that $\|X\|_{L^p} < \infty$, where*

$$\|X\|_{L^p} := \sup_{t > 0} \|X_t\|_{L^p}.$$

If $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, we will denote by $\|X\|_{M^p} := \|X^*_\infty\|_{L^p}$, où

$$X^*_t(\omega) := \sup\{|X_s(\omega)| : s \in [0, t]\}.$$

Exercice 3.38 *Montrez que, si $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, alors l'application $t \to \|X_t\|_{L^p}$ est croissante. En particulier $\|X\|_{L^p} = \lim_{t \to \infty} \|X_t\|_{L^p}$.*

Exercice 3.39 *Montrez que, si $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, alors X^*_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Exercice 3.40 *Montrez que $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ est un espace vectoriel réel et que $\|.\|_{L^p}$ est une seminorme sur $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$. Montrez que $\|X\|_{L^p} = 0$ est equivalent à dire que X est une modification de 0: $X \overset{modif}{\equiv} 0$.*

Remark 3.41 *(Remind) If X and Y are continuous processes then $X \overset{modif}{\equiv} Y$ if and only if X and Y are indistinguishables.*

Since $(\mathcal{L}^p, \|.\|_{L^p})$ is not a normed vector spaces we considered L^p the set of equivalence classes in $\mathcal{L}^p$ for the equivalence relation $= P - a.s.$ In the same way, we introduce the space $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$ of equivalence classes in $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$for the relation $\overset{\text{modif}}{\equiv}$.

Exercice 3.42 *Montrez que* $(M^p(\{\mathcal{F}_t\}), \|.\|_{L^p})$ *est un espace vectoriel normé.*

Theorem 3.43 *(Doob's inequality in continuous time)): $\forall p > 1$, if $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, then*

$$\|X\|_{L^p} \leq \|X\|_{M^p} \leq \frac{p}{p-1}\|X\|_{L^p}.$$

In other words, $\|.\|_{L^p}$ et $\|.\|_{M^p}$ are equivalent norms on $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$.

Preuve: Soit $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ et soit $\{D_n\}_{n\in I\!N}$ une suite croissante d'ensembles finis dont l'union est $\mathbb{Q}^+$. Soit $t_n := \max D_n$ et

$$X^*_{D_n}(\omega) := \max\{|X_t(\omega)| : t \in D_n\}.$$

Il est alors clair que $t_n \nearrow \infty$. Par ailleurs, puisque les trajectoires de X sont continues, $X^*_\infty = \sup\{|X_t| : t \in \mathbb{Q}^+\}$, et donc $X^*_{D_n} \nearrow X^*_\infty$. Le théorème 3.36 nous indique alors que

$$\|X_{t_n}\|_{L^p} \leq \|X^*_{D_n}\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|X_{t_n}\|_{L^p}.$$

Or, il suit de l'exercice 3.38 que $\|X\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|X_{t_n}\|_{L^p}$ et par convergence monotone: $\|X\|_{M^p} = \|X^*_\infty\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|X^*_{D_n}\|_{L^p}$. Le théorème est donc démontré. ■

The following corollary plays a crucial role in the construction of the Itô integral.

Corollary 3.44 *If $\{\mathcal{F}_t\}$ is a complete filtration then for every $p > 1$, the space $(M^p(\{\mathcal{F}_t\}), \|.\|_{L^p})$ is a Banach space.*

Preuve: Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy $\{X^n\}_{n\in I\!N}$ dans $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$ admet une limite X dans $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$. Considérons une telle suite $\{X^n\}_{n\in I\!N}$.
1) Nous allons construire un processus X limite:

Par le théorème précédent, $\{X^n\}_{n\in I\!N}$ est également une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_{M^p}$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) : \forall m, n \geq N(\epsilon) : \|X^n - X^m\|^p_{M^p} \leq \epsilon$$

Fixons $n_1 := N(2^{-(p+1)})$, et par récurrence

$$n_{k+1} := \max(N(2^{-(p+1)(k+1)}), 1 + n_k).$$

La suite n_k est alors strictement croissante et, puisque $n_{k+1} > n_k \geq N(2^{-(p+1)(k)})$, la sous-suite $\{X^{n_k}\}_{k\in I\!N}$ vérifie

$$\forall k : \|X^{n_{k+1}} - X^{n_k}\|^p_{M^p} \leq 2^{-(p+1)(k)}.$$

Soit $A := \{\omega \in \Omega : \exists L : \forall k \geq L : \|X^{n_{k+1}}_.(\omega) - X^{n_k}_.(\omega)\|_\infty \leq 2^{-k}\}$ où, pour une fonction $f(.) : [0, \infty[\to I\!R$, $\|f(.)\|_\infty := \sup_{t\in[0,\infty[} |f(t)|$.

Remarquons que si $\omega \in A$, alors les trajectoires $X^{n_k}_{\cdot}(\omega)$ forment une suite de Cauchy dans l'espace $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$ des fonctions continues sur $[0,\infty[$. En effet, si $k' \geq k$,

$$\|X^{n_{k'}}_{\cdot}(\omega) - X^{n_k}_{\cdot}(\omega)\|_\infty \leq \sum_{j=k}^{k'-1} \|X^{n_{j+1}}_{\cdot}(\omega) - X^{n_j}_{\cdot}(\omega)\|_\infty \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

L'espace $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$ étant complet, la suite de trajectoires $X^{n_k}_{\cdot}(\omega)$ converge donc au sens de la norme $\|.\|_\infty$ vers une fonction continue $X_{\cdot}(\omega)$.

Convenons de définir $X_{\cdot}(\omega) := 0$ lorsque $\omega \notin A$. Le processus X ainsi construit a toutes ses trajectoires continues.

2) Montrons à présent que $P(A) = 1$:

En effet, si l'on pose $Y^k := X^{n_{k+1}} - X^{n_k}$,

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \forall L : \exists k \geq L : \|Y^k_{\cdot}(\omega)\|_\infty > 2^{-k}\} = \cap_L \cup_{k\geq L} A^k,$$

où $A^k := \{\omega \in \Omega : \|Y^k_{\cdot}(\omega)\|_\infty > 2^{-k}\}$. Ainsi, $\forall L$,

$$P(A^c) \leq P(\cup_{k\geq L} A^k) \leq \sum_{j=L}^{\infty} P(A^k).$$

Or $\|Y^k_{\cdot}(\omega)\|_\infty = Y^{k*}_\infty(\omega)$ où la notation Y^{k*} a été introduite à la définition 3.37. Il résulte de l'inégalité de Chebichev que $P(A^k)2^{-kp} \leq \|Y^{k*}_\infty\|^p_{L^p}$ et la définition de la sous suite X^{n_k} indique que $\|Y^{k*}_\infty\|^p_{L^p} = \|Y^k\|^p_{M^p} \leq 2^{-(p+1)k}$. Aussi $P(A^k) \leq 2^{-k}$ et donc

$$P(A^c) \leq \sum_{k=L}^{\infty} 2^{-k} \stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dès lors $P(A^c) = 0$.

3) Montrons que X est $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté: $P(A^c) = 0$ implique en effet $A^c \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0$ puisque $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration complète. Aussi le processus $\mathbf{1}_A(\omega)X^{n_k}_t(\omega)$ est-il $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté. Or nous avons montré que $\mathbf{1}_A(\omega)X^{n_k}_t(\omega)$ converge vers $X_t(\omega)$. La limite ponctuelle préservant la mesurabilité, X_t est donc bien $\mathcal{F}_t$-mesurable.

4) Montrons ensuite que X est une $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale: Puisque $\|X^n_t - X^m_t\|_{L^p} \leq \|X^n - X^m\|_{L^p}$, la suite des variables aléatoires X^n_t est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathcal{F}_t)$. Puisqu'il s'agit d'un espace complet, X^n_t est donc une suite convergente au sens L^p. Puisqu'une sous suite $X^{n_k}_t$ converge P-pp (sur A) vers X_t, nous avons montré que X^n_t converge vers X au sens L^p. Puisque l'espérance conditionnelle est un opérateur continu pour la norme L^p, nous avons si $s > t$:

$$E[X_s|\mathcal{F}_t] = E[\lim_{n\to\infty} X^n_s|\mathcal{F}_t] = \lim_{n\to\infty} E[X^n_s|\mathcal{F}_t] = \lim_{n\to\infty} X^n_t = X_t$$

5) Montrons finalement que X^n converge vers X au sens $\|.\|_{L^p}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe N tel que, si $m, n \geq N$, alors $\|X^n - X^m\|_{L^p} \leq \epsilon$. Il s'ensuit que, si $n \geq N$,

$$\|X_t - X^n_t\|_{L^p} = \lim_{m\to\infty} \|X^m_t - X^n_t\|_{L^p} \leq \lim_{m\to\infty} \|X^n - X^m\|_{L^p} \leq \epsilon.$$

Donc $\|X - X^n\|_{L^p} = \sup_{t\geq 0} \|X_t - X_t^n\|_{L^p} \leq \epsilon$. Ce qui précède étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, nous avons montré que $\lim_{n\to\infty} \|X - X^n\|_{L^p} = 0$. ■

Corollary 3.45 *If $X \in M^2(\{\mathcal{F}_t\})$, then there exists a random variable $X_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ such that $X_t \xrightarrow{L^2} X_\infty$ and $X_t \xrightarrow{P\text{-}pp} X_\infty$ when $t \to \infty$.In particular, $\forall t : X_t = E[X_\infty|\mathcal{F}_t]$ and $\|X\|_{L^2} = \|X_\infty\|_{L^2}$.*

Preuve: On montre que, pour toute suite $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers ∞, la suite $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $L^2(\mathcal{F}_t)$ (remarquons que toutes ces suites ont alors une limite identique, sans quoi il existerait une suite sans limite!). L^2 étant complet, il suffit donc de montrer que $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Si $t_m \geq t_n$, X_{t_n} est la projection orthogonale de X_{t_m} sur $L^2(\mathcal{F}_{t_n})$, X étant une martingale. Nous avons dès lors l'identité de Pythagore:

$$\|X_{t_m} - X_{t_n}\|_{L^2}^2 = \|X_{t_m}\|_{L^2}^2 - \|X_{t_n}\|_{L^2}^2$$

La fonction $t \to \|X_t\|_{L^2}^2$ est croissante et converge vers $\|X\|_{L^2}^2$, aussi la suite $\{\|X_{t_n}\|_{L^2}^2\}$ est elle de Cauchy et il en est de même de $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$: $\|X_{t_m} - X_{t_n}\|_{L^2}^2 \stackrel{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc il existe $X_\infty \in L^2$ qui est la limite de toutes les suites $\{X_{t_n}\}$. Il est clair que $X_t \to_{t\to\infty} X_\infty$ in L^2.

De la convergence L^2 de X_t vers la limite commune X_∞ de toutes les suites $\{X_{t_n}\}$, suit immédiatement que $\|X\|_{L^2} = \lim_{t\to\infty} \|X_t\|_{L^2} = \|X_\infty\|_{L^2}$ et, par continuité de l'opérateur $E[.|\mathcal{F}_t]$ par rapport à la norme L^2, il suit aussi que

$$E[X_\infty|\mathcal{F}_t] = \lim_{s\to\infty} E[X_s|\mathcal{F}_t] = X_t.$$

Il nous reste à démontrer la convergence P-pp de X_t vers X_∞. Considérons donc une suite $\{X_{t_n}\}$ convergeant dans L^2 vers X_∞. Quitte à en extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{X_{t_n}\}$ converge également P-pp. Appliquons à présent l'inégalité de Doob à la martingale $(Y_s^n)_{s\geq t_n}$, où $Y_s^n := X_s - X_{t_n}$:

$$\| \sup_{s\geq t_n} |Y_s^n| \|_{L^2} \leq 2\|Y^n\|_{L^2} = 2\|Y_\infty^n\|_{L^2} = 2\|X_\infty - X_{t_n}\|_{L^2}$$

Aussi, les variables $\sup_{s\geq t_n} |Y_s^n|$ tendent-elles vers 0 dans L^2, et par extraction de sous-suite, nous pouvons considérer qu'elles tendent vers 0 P-pp. Si $t \geq t_n$, nous avons:

$$|X_t - X_\infty| \leq |X_t - X_{t_n}| + |X_{t_n} - X_\infty| \leq \sup_{s\geq t_n} |Y_s^n| + |X_{t_n} - X_\infty|$$

Puisque les deux termes du membre de droite de cette inégalité tendent P-pp vers 0, nous avons comme annoncé la convergence P-pp de X_t vers X_∞. ■

Remark 3.46 *We call sometimes the random variable X_∞* as the last element of the martingale X.

3.4 Uniform integrability and martingale convergence theorems

Definition 3.47 *A family $\mathcal{G} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is uniformly integrable (we denote U.I.) if*

$$\lim_{c\to\infty} \left(\sup_{X\in\mathcal{G}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] \right) = 0.$$

We give examples of families which are U.I.

Exercice 3.48 *If $g \in \mathbf{L^1}$ show that the family $\mathcal{G} := \{g\}$ is U.I.*

Preuve: On a $|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}} \leq |g| \ \in \mathbf{L^1}$ et $\lim_{c\to\infty} |g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}} = 0$. Par le théorème de la convergence dominée on a donc:

$$\lim_{c\to\infty} E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] = 0.$$

$\mathcal{G}$ est donc une famille U.I. ■

Exercice 3.49 *Show that if $\mathcal{G}$ is U.I and if $g \in \mathbf{L^1}$ then $\mathcal{G} \cup \{g\}$ is U.I. In particular the finite families in L^1 are U.I.*

Preuve: On a:

$$\sup_{X\in\mathcal{G}\cup\{g\}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] \leq \sup_{X\in\mathcal{G}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] + E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}]$$

or $\{g\}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles uniformément intégrables donc les deux termes du membre de droite tendent vers 0 lorsque c tend vers ∞. Ainsi

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{G}\cup\{g\}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] = 0.$$

■

Exercice 3.50 *Show that if $\mathcal{G}$ is bounded in $L^p(\mathcal{F})$ $(p > 1)$ then $\mathcal{G}$ is U.I.*

Preuve: Soit $M < \infty$ tel que $\forall g \in \mathcal{G}$: $E[g^p] \leq M$. Par application de l'inégalité de Hölder, avec q tel que $1/p + 1/q = 1$, on a $\forall g \in \mathcal{G}$:

$$E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq (E[|g|^p])^{1/p}(E[\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}])^{1/q} \leq M^{1/p}(P(\{|g| > c\}))^{1/q}.$$

Par l'inégalité de Chebichev, on a également $P(\{|g| > c\})c^p \leq E[|g|^p] \leq M$. Aussi $E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq \frac{M^{1/p}M^{1/q}}{c^{p/q}} = \frac{M}{c^{p/q}}$.

On obtient

$$\sup_{g\in\mathcal{G}} E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq \frac{M}{c^{p/q}} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

We give a characterization of the uniform integrability property.

Theorem 3.51 *$\mathcal{G}$ is U.I if and only if $\mathcal{G}$ satisfies the conditions:*

1. *$\mathcal{G}$ is bounded in $\mathbf{L^1}$: $\exists M < \infty : \forall g \in \mathcal{G}, E[|g|] \leq M$.*
2. *$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0$ such that, $\forall A \in \mathcal{F}$, if $P(A) < \delta$ then $\forall g \in \mathcal{G}$ $E[|g|\mathbf{1}_A] \leq \epsilon$.*

Preuve: Supposons 1) et 2) vraies. Alors par Chebichev, $\forall f \in \mathcal{G} : M \geq cP(|f| > c)$. Soit $\epsilon > 0$ et considérons le δ correspondant de 2). Si $c > \frac{M}{\delta}$ alors $\forall f \in \mathcal{G} : P(|f| > c) < \frac{M}{c} < \delta$ donc d'après la propriété 2) on a: $E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \epsilon$. Ainsi $\sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \epsilon$. Nous avons donc montré que

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] = 0.$$

Inversement supposons $\mathcal{G}$ U.I alors $\exists c : \forall f \in \mathcal{G}$:

$$\sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq 1.$$

Or

$$E[|f|] = E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] + E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|\leq c\}}] \leq 1 + c.$$

Ainsi 1) est vraie, avec $M = 1 + c$.

Soit $\epsilon > 0$ alors $\exists c$ tel que $\forall f \in \mathcal{G} : E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \frac{\epsilon}{2}$. Posons $\delta := \frac{\epsilon}{2c}$ et soit $A \in \mathcal{F}$ telque $P(A) \leq \delta$. Alors:

$$E[|f|\mathbf{1}_A] \leq E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] + E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|\leq c\}\cap A}] \leq \frac{\epsilon}{2} + c \cdot P(A) \leq \epsilon.$$

La propriété 2) est donc aussi vérifiée. ■

Theorem 3.52 *Let $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of random variables in $\mathbf{L^1}(\mathcal{F})$ such that $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-a.e. Then the sequence X_n converges to X in the $\mathbf{L^1}$ sense if and only if $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is U.I*

Preuve: Si $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ dans $\mathbf{L^1}$ alors $\{X_n\}$ est bornée dans $\mathbf{L^1}$ et de plus $X \in \mathbf{L^1}$ donc $\{X_n\} \cup \{X\}$ est borné dans $\mathbf{L^1}$.
Soit $\epsilon > 0$ alors $\exists N$ tel que $\forall n \geq N, E[|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{2}$.

La famille finie $\mathcal{G} = \{X_0, X_1, \ldots, X_N, X\}$ est U.I. Donc $\exists \delta > 0$ tel que

$$P(A) < \delta \Rightarrow E[|X_n|\mathbf{1}_A] < \frac{\epsilon}{2} \ \ si \ \ n = 0, \ldots, N \ et \ \ E[|X|\mathbf{1}_A] < \frac{\epsilon}{2}.$$

Montrons que pour tout n: $E[|X_n|\mathbf{1}_A] \leq \epsilon$. Cette relation est évidente si $n \leq N$. De même, si $n > N$, on a:

$$\begin{aligned} E[|X_n|\mathbf{1}_A] &\leq E[|X_n - X|\mathbf{1}_A] + E[|X|\mathbf{1}_A] \\ &\leq E[|X_n - X|] + E[|X|\mathbf{1}_A] \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

La famille $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ est donc U.I.

Montrons à présent que, si la suite $\{X_n\}$ est U.I., alors elle converge dans $\mathbf{L^1}$: $\{X_n\}$ est une suite bornée dans $\mathbf{L^1}$: $\exists M$ tel que $E[|X_n|] \leq M$. Soit $g_m := inf_{n\geq m}|X_n|$. Alors g_m forme une suite croissante de v.a. et, puisque X_n converge vers X P-pp, on a:

$$\lim_{m\to\infty} g_m = \liminf |X_n| = |X|.$$

Par le théorème de la convergence monotone $E[g_m] \nearrow E[|X|]$ et comme $g_m \leq |X_m|$, il suit: $E[g_m] \leq E[|X_m|] \leq M$ donc $E[|X|] \leq M$ d'où $X \in \mathbf{L^1}$. Ainsi $\{X_n\} \cup \{X\}$ est U.I. et par 2) on a: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) < \delta \Rightarrow \forall n : E[|X_n|\mathbf{1}_A] \leq \frac{\epsilon}{3}$ et $E[|X|\mathbf{1}_A] \leq \frac{\epsilon}{3}$.
Soit $c := \frac{2M}{\delta}$. Alors la suite $\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|$ converge P-pp vers 0 et est bornée par $2c$. Donc par le théorème de la convergence dominée elle converge dans $\mathbf{L^1}$ vers 0 d'où $\exists N : \forall n \geq N$:

$$E[\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Si $n \geq N$, alors

$$E[|X_n - X|] \leq E[\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|] + E[|X_n|\mathbf{1}_A] + E[|X|\mathbf{1}_A],$$

où $A := \{|X_n| \geq c\} \cup \{|X| \geq c\}$. Puisque $P(A) \leq P(|X_n| \geq c) + P(|X| \geq c) \leq \frac{2M}{c} = \delta$, il suit que $E[|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Nous avons donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|] = 0.$$

■

Exmmple 3.53 *If $\{\mathcal{G}_s\}_{s\in S} \subset \mathcal{F}$ is a family of σ -algebras and if $X \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F})$, show that the family $\{E[X|\mathcal{G}_s]\}_{s\in S}$ is U.I.*

Preuve: Soit $X_s := E[X|\mathcal{G}_s]$.

L'inégalité de Jensen nous indique que $|X_s| \leq E[|X||\mathcal{G}_s]$. Aussi, puisque $\{|X_s| > c\} \in \mathcal{G}_s$, il suit que $E[|X_s|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq E[|X|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}]$. Puisque $\{X\}$ est U.I., par la caractérisation donnée par Th. 3.51

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : P(A) < \delta \Rightarrow E[|X|\mathbf{1}_A] < \epsilon.$$

Posons

$$A = \{|X_s| > c\}.$$

Si $c > E[|X|]/\delta$, alors $\forall s \in S$:

$$P(A) = P(\{|X_s| > c\}) \leq E[|X_s|]/c \leq E[|X|]/c < \delta,$$

et donc $E[|X_s|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq E[|X|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq \epsilon$. La famille $\{X_s\}_{s\in S}$ est donc U.I. ■

Theorem 3.54 *(stopping theorem): If X is a continuous martingale ,and if τ is a bounded stopping time ($\exists M$ $\forall\omega$, $\tau(\omega) \le M$) , then:*

$$X_\tau = E[X_M|\mathcal{F}_\tau] \tag{1}$$

In particular : if $\tau \le \sigma$ are two stopping time and if σ is bounded, then

$$X_\tau = E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau].$$

Preuve: Par le théorème d'arrêt 3.32, la relation (1) est vraie si τ prend un nombre fini de valeurs.

Si τ est un temps d'arrêt général, posons $\tau_n(\omega) := k\frac{M}{n}$ lorsque $\frac{M(k-1)}{n} < \tau(\omega) \le \frac{Mk}{n}$ pour $k \in I\!N$.

Montrons que τ_n est un également temps d'arrêt: Soit $t \ge 0$ et soit k^* le plus grand entier k tel que $\frac{Mk}{n} \le t$. Alors

$$\{\tau_n \le t\} = \{\tau_n \le \frac{Mk^*}{n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{Mk^*}{n}} \subset \mathcal{F}_t.$$

τ_n est donc bien un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt.

Puisque $\tau_n \searrow \tau$ lorsque $n \to \infty$, la continuité des trajectoires de X nous permet de conclure que $X_{\tau_n} \to X_\tau$ P-pp.

τ_n prend au plus $n+1$ valeurs donc $X_{\tau_n} = E[X_M|\mathcal{F}_{\tau_n}]$. La famille $\{X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ est alors U.I. comme il suit de l'exercice 3.53.

La convergence P-pp de X_{τ_n} et le caractère U.I. de la suite nous permet d'affirmer avec le théorème 3.52 que X_{τ_n} converge vers X_τ dans L^1.

Si $Z \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_\tau) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_{\tau_n})$ alors: $E[X_{\tau_n}Z] = E[X_M Z]$. Or, $X_{\tau_n} \to X_\tau$ dans $\mathbf{L^1}$ et $Z \in L^\infty$ et donc $E[X_\tau Z] = \lim_{n\to\infty} E[X_{\tau_n}Z] = E[X_M Z]$. X_τ étant $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et vérifiant l'égalité précédente $\forall Z \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_\tau)$, nous concluons : $X_\tau = E[X_M|\mathcal{F}_\tau]$.

Prouvons la deuxième assertion: si $\tau \le \sigma \le M$, alors

$$E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau] = E[E[X_M|\mathcal{F}_\sigma]|\mathcal{F}_\tau] = E[X_M|\mathcal{F}_\tau] = X_\tau,$$

car $X_\sigma = E[X_M|\mathcal{F}_\sigma]$ et $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$. ■

The next result generalizes the construction of the last element of a martingale (Cor. 3.45).

Theorem 3.55 *If $X$is a cont. U.I. martingale (i.e. the family $\{X_t\}_{t\ge0}$ is U.I.), then $\exists X_\infty \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_\infty)$ such that X_t converges to X_∞ P-a.s. and in $\mathbf{L^1}$ when $t \to \infty$.*

Moreover, for every stopping time τ we have: $X_\tau = E[X_\infty|\mathcal{F}_\tau]$.

Preuve: Ce théorème généralise le corolaire 3.45. Il ne sera pas démontré ici. ■

Remark 3.56 *The Brownian motion* $(B_t, t \in [0,T])$ *satisfy the above result? How about* $(B_t, t \geq 0)$*? How about the martingale* $(B_t^2 - t, t \geq 0)$*? Are these families U.I. ?*

Corollary 3.57 *(the stopping theorem: the general case) If* X *is a* $\{\mathcal{F}_t\}$*-martingale continuous and U.I., then for every stopping times* $\tau \leq \sigma$*:* $X_\tau = E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau]$*.*

Preuve: Se démontre en remplaceant X_M par X_∞ dans la fin de la preuve du théorème 3.54. ■

Remark 3.58 *We cannot eliminate the assumption* X_t *U.I. in the above theorem , as we can see from the following example: Let* B_t *be a Brownian motion and* $\sigma = \inf\{t|B_t \geq 1\}$*. Since the Brownian motion touches every point in* $\mathbb{R}$ *infinitely many times, we conclude that* $\sigma < \infty$ *P-a.s and then* $B_\sigma = 1$ *P-a.s. Let's fix* $\tau := 0$ *then* $0 = B_\tau \neq E[B_\sigma|\mathcal{F}_\tau] = 1$*.*

To finish this section, let us mention the next result on the regularization of the trajectories of a martingale.

Theorem 3.59 *If* $\{\mathcal{F}_t\}$ *is a complete and right continuous filtration, then every martingale* X *admits a modification* X' *with right continuous trajectories and whose left limits exist in any point* t*.*

4 CHAPTER 4: The ITÔ INTEGRAL

4.1 The space $\mathcal{H}_2^2$:

Let $(B_t)_{t\geq 0}$ be a Brownian motion and $(\phi_t)_{t\geq 0}$ a stochastic process on $(\Omega, \mathcal{F}_t)$. We want to define a process Y which would be the integral with respect to the Brownian motion of the process Φ

$$Y_t = \int_0^t \phi_s dB_s. \tag{2}$$

The first idea is to construct this integral in a pathwise way "omega by omega": Fix ω and try to define $Y_t(\omega) := \int_0^t \phi_s(\omega)dB_s(\omega)$. If f and g are functions from $I\!R$ to $I\!R$, the theory of the Riemann-Stieltjes integration allows to define $\int_0^t f(s)dg(s)$ as limit of the Riemann sums $\Sigma f(s_i)(g(s_{i+1}) - g(s_i))$ along the partitions $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$ of $[0,t]$ when the mesh $max_i|s_{i+1} - s_i|$ of this partition tends to 0. In order to have a such integral well-defined we need to impose conditions on f and on g.

Exercice 4.1 *Show that if g is continuous and $f := \mathbf{1}_{[a,b[}$ then the Riemann sums converge to $g(t\wedge b) - g(t\wedge a)$. Show also that, if g is continuous, $\int_0^t f(s)dg(s)$ is a linear functional on the vector space $\mathcal{R}$ generated by the functions $\mathbf{1}_{[a,b[}$, $a \leq b$.*

If one wants to integrate more general functions f, for examples continuous functions f, then we need to restrict the class of functions g: the Riemann-Stieltjes theory assumes that g is a bounded variation function. the trajectory $t \to B_t(\omega)$ being without bounded variation, this theory cannot be applied here.

To define the integral (2), we need to restrict the class of processes ϕ that are integrated. Let define the first set on which we will work:

Definition 4.2 *$\mathcal{H}_2^2$ is the set of processes ϕ $\mathcal{F}_t$- progressively measurable such that*

$$\|\phi\|^2_{H_2^2} = E[\int_0^\infty \phi^2(s)ds] < \infty.$$

H_2^2 is the quotient of $\mathcal{H}_2^2$ by the equivalence relation $\equiv$, où $\phi \equiv \phi'$ si et seulement si $\|\phi - \phi'\|^2_{H_2^2} = 0$.

Exercice 4.3 *Montrez que $\mathcal{H}_2^2$ est un espace vectoriel et que $\|.\|_{H_2^2}$ est une semi-norme sur cet espace. H_2^2 est donc un espace vectoriel normé.*

Remark 4.4 *Pour $\alpha > 1$, on considère parfois les normes suivantes $\|\phi\|_{H_2^\alpha} = \left(E[(\int_0^\infty \phi_s^2 ds)^{\frac{\alpha}{2}}]\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et les espaces $\mathcal{H}_2^\alpha$ correspondants.*

Exercice 4.5 *Soit $t_1 < t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$. Posons $\phi_t(\omega) := \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$. Montrez que $\phi \in \mathcal{H}_2^2$ et calculez $\|\phi\|_{H_2^2}$.*

Preuve: Remarquons que ϕ est progressivement mesurable en effet: Soit T fixé si $T < t_1$ alors $\phi : \Omega \times [0,T] \to 0$ donc ϕ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable car c'est l'application constante.

Si $T \geq t_1$ alors $\phi(\omega,t) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, or $\psi(\omega)$ est $\mathcal{F}_{t_1}$ mesurable donc $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable donc $\phi(\omega,t) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable.

Ensuite $\|\phi\|^2{}_{\mathcal{H}_2^2}$=$E[\int_0^\infty \phi^2(s)ds] = E[\int_0^\infty \mathbf{1}^2_{[t_1,t_2[}(t)\psi^2(\omega)dt]$

$$= E[(t_1 - t_2)\psi^2(\omega)] = (t_2 - t_1)E(\psi^2(\omega)) < \infty.$$

Donc $\phi \in \mathcal{H}_2^2$. ■

Definition 4.6 *We introduce $\mathcal{E}sc$ cas the vector space generated by $\{\psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[} : t_1 < t_2, \psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})\}$.*

Theorem 4.7 *$(H_2^2, \|.\|_{H_2^2})$ is a Hilbert space.*

Preuve: H_2^2 est un sous espace vectoriel de $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ avec $\mu = P \bigotimes \lambda$, P étant la mesure sur $\mathcal{F}_\infty$ et λ la mesure de Lebesgue sur $[0,\infty[$. En effet:

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2_{\mathbf{L^2}} &= \int_{\Omega\times[0,\infty[} \phi^2(\omega,t)d\mu(\omega,t) \\ &= \int_\Omega (\int_0^\infty \phi^2(\omega,t)dt)dP(\omega) \\ &= E(\int_0^\infty \phi^2(\omega,t)dt). \end{aligned}$$

$L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ étant un espace de Hilbert, il nous suffit pour prouver la première assertion de démontrer que H_2^2 est fermé dans $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$:

Soit $\phi_n \to \phi$ dans $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ avec $\phi_n \in H_2^2$. Montrons que $\phi \in H_2^2$. Pour T fixé on a:

$$\begin{aligned} \|\phi_n - \phi\|^2_{L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]})} &= E[\int_0^T (\phi_{n,t}(\omega) - \phi_t(\omega))^2 dt] \\ &\leq E[\int_0^\infty (\phi_{n,t} - \phi_t)^2 dt] \\ &= \|\phi_n - \phi\|^2_{H_2^2} \to 0. \end{aligned}$$

La restriction de ϕ à $\Omega \times [0,T]$ est la limite dans $L^2(\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}\mu)$ des restrictions de ϕ_n à $\Omega \times [0,T]$. La restriction de ϕ à $[0,T]$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$- mesurable. Ceci étant vrai pour tout T, ϕ est progressivement mesurable et donc dans H_2^2. ■

Theorem 4.8 *$\mathcal{E}sc$ is dense in H_2^2.*

Preuve: 1) Si $f \in L^2([0,\infty[)$ et $n \in I\!N$, définissons $T_n(f)$ par $T_n(f)_t = \sum_{k=1}^{\infty}(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t)$.

Montrons que $T_n(f) \in L^2$ et que $\|T_n(f)\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$.

$$\begin{aligned}
\|T_n(f)\|_{\mathbf{L^2}}^2 &= \int_0^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty}(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t))^2dt \\
&= \int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)^2\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)^2\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

or d'après l'inégalité de Jensen $[E[f(U)]]^2 \leq E[f^2(U)]$ en prenant U une variable uniforme sur $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$, on a:

$$\|T_n(f)\|_{L^2}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f^2(s)ds = \int_0^{\infty} f^2(s)ds = \|f\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Montrons à présent que $T_n(f) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^2: l'espace $\mathcal{C}_K([0,\infty[)$ des fonctions continues à support compact est dense dans L^2, donc si $\phi \in L^2([0,\infty[)$ alors $\forall\epsilon > 0$, $\exists f \in \mathcal{C}_K([0,\infty[)$: $\|\phi - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{3}$.

Or, la continuité uniforme de f implique que $T_n(f)$ converge uniformément vers f et donc $\|T_n(f) - f\|_{L^2} \to 0$. Ainsi, $\exists N : \forall n \geq N\ \|T_n(f) - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{3}$. Ainsi:

$$\begin{aligned}
\|T_n(\phi) - \phi\|_{L^2} &\leq \|T_n(\phi - f)\| + \|T_n(f) - f\| + \|f - \phi\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, nous concluons que $T_n(f) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^2.

2)Si $\phi \in H_2^2$ est tel que $\phi_t = 0$, $\forall t \geq T$, définissons le processus ϕ^n par

$$\phi^n(\omega,t) = T_n(\phi(\omega,.))(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega,s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t).$$

Cette somme ne contient en fait qu'un nombre fini de termes non nuls. Or, si $s \leq \frac{k}{n}$, $\phi(\omega,s)$ est $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$ mesurable donc $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega,s)ds$ est $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$-mesurable. De plus

$$E[(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega,s)ds)^2] \leq E[n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega,s)^2ds)] < \infty.$$

Ainsi $\phi^n(\omega,t) \in \mathcal{E}sc$.

Montrons que $\phi^n \to \phi$ pour la norme de H_2^2: Soit $Y_n(\omega) := \int_0^{\infty}(\phi^n(\omega,t) - \phi(\omega,t))^2dt$. Observons que

$$Y_n(\omega) = \|T_n(\phi(\omega,.)) - \phi(\omega,.)\|_{L^2([0,\infty[)}^2.$$

Aussi, $\forall\omega$, $Y_n(\omega) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. De plus

$$\begin{aligned}
\sqrt{Y_n(\omega)} &= \|T_n(\phi(\omega,.)) - \phi(\omega,.)\|_{L^2([0,\infty[)} \\
&\leq \|T_n(\phi(\omega,.))\|_{L^2([0,\infty[)} + \|\phi(\omega,.)\|_{L^2([0,\infty[)} \\
&\leq 2\|\phi(\omega,.)\|_{L^2([0,\infty[)}
\end{aligned}$$

Ainsi $Y_n(\omega) \leq 4\int_0^\infty(\phi(\omega,t))^2dt$. Le membre de droite de cette inégalité ayant une espérance finie, nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour conclure que $\|\phi^n - \phi\|_{H_2^2} = E[Y_n] \to 0$.

3) Si $\phi \in H_2^2$, nous allons montrer que $\mathbf{1}_{[0,T]}\phi$ converge vers ϕ dans H_2^2 lorque T tend vers ∞. Le théorème sera établi puisque, par le point 2, $\mathbf{1}_{[0,T]}\phi$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par un processus de $\mathcal{E}sc$.

Puisque $(\phi - \mathbf{1}_{[0,T]}\phi)^2 = \mathbf{1}_{]T,\infty[}\phi^2 \leq \phi^2$ et que $\mathbf{1}_{]T,\infty[}\phi^2 \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il suffit d'appliquer à nouveau le théorème de la convergence dominée de Lebesgue sur l'espace $L^1(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ pour conclure que $\|\phi - \mathbf{1}_{[0,T]}\phi\|_{H_2^2} \to 0$. ∎

4.2 The Itô integral on H_2^2

We aim now to define the integral (2) for processes ϕ in the space H_2^2. It is possible to construct the random variable $Y_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ for fixed t, but in this way this random variable would be a random variable in $L^2(\mathcal{F}_t)$: Y_t would be therefore defined modulo a set with zero measure and nothing would indicate that Y, viewed as a stochastic process $(Y_t)_{t\geq 0}$, has a regular enough version (continuous version, for example). We prefer to define directly the integral as a process which will be denoted by $I(\phi)$.

Definition 4.9 *If $\phi \in \mathcal{E}sc$, then for every ω the trajectory $\phi_.(\omega)$ is in the space $\mathcal{R}$ given in the exercise 4.1. We can thus define $I(\phi)$ pathwise "omega by omega"*

$$I(\phi)_t(\omega) := \int_0^t \phi_s(\omega)dB_s(\omega),$$

the above integral being understood in the sense of Exercise 4.1.In particular, if $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, où $t_1 \leq t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$, we have

$$I(\phi)_t = \psi \cdot (B_{t_2\wedge t} - B_{t_1\wedge t}).$$

Remark 4.10 *Note that, if $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, the constructed process $I(\phi)$ is $\{\mathcal{F}_t\}$-adapted and continuous. The integral from exercise 4.1being linear on $\mathcal{R}$, the application I will also be linear and I applies linearly $\mathcal{E}sc$ into the space of continuous adapted to $\{\mathcal{F}_t\}$ processes..*

Exercice 4.11 *Si $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, où $t_1 \leq t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$, montrez que $I(\phi)$ est une martingale et calculez $\|I(\phi)\|_{L^2}$.*

Preuve: Soit $s > t$.

1) Supposons d'abord que $t \in [t_1, t_2]$: alors $\psi \in L^2(\mathcal{F}_t)$, et $t_1 \wedge s = t_1 = t_1 \wedge t \leq t$. Donc

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[\psi \cdot (B_{t_2 \wedge s} - B_{t_1 \wedge s})|\mathcal{F}_t] = \psi \cdot (E[B_{t_2 \wedge s}|\mathcal{F}_t] - B_{t_1 \wedge t}).$$

Puisque B est une martingale et $t_2 \wedge s \geq t = t_2 \wedge t$, nous avons

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = \psi \cdot (B_{t_2 \wedge t} - B_{t_1 \wedge t}) = I(\phi)_t.$$

2) Si $t < t_1$ alors, soit $s \leq t_1$, et partant

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[0|\mathcal{F}_t] = 0 = I(\phi)_t,$$

soit $s > t_1$, et donc, il suit du cas 1) que:

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_{t_1}]|\mathcal{F}_t] = E[I(\phi)_{t_1}|\mathcal{F}_t] = E[0|\mathcal{F}_t] = 0 = I(\phi)_t.$$

3) Si $t > t_2$, alors $I(\phi)_t = I(\phi)_{t_2} = I(\phi)_s$, et puisque $I(\phi)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, nous avons également $E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = I(\phi)_t$.

Enfin,

$$\begin{array}{rcl} \|I(\phi)\|^2_{L^2} & = & \lim_{t\to\infty} \|I(\phi)_t\|^2_{L^2} \\ & = & \|I(\phi)_{t_2}\|^2_{L^2} \\ & = & E[\psi^2(B_{t_2} - B_{t_1})^2] \\ & = & E[\psi^2](t_2 - t_1). \end{array}$$

■

En comparant au résultat obtenu à l'exercice 4.5, nous voyons que

$$\|I(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H^2_2}.$$

■

Cette propriété se généralise:

Theorem 4.12 *I is a linear isometric application from $(\mathcal{E}sc, \|.\|_{H^2_2})$ to $(M^2, \|.\|_{L^2})$.*

Preuve: Nous savons d'une part que I est linéaire. D'autre part si ϕ est de la forme $\psi \mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$, il découle de l'exercice précédent que $I(\phi) \in M^2$. Par linéarité, cette propriété s'étend à tout $\phi \in \mathcal{E}sc$.

Remarquons que si $\phi \in \mathcal{E}sc$, alors $\phi = \sum_0^n \psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[}$ avec $t_1^k \leq t_2^k$, $\psi_k \in L^2(\mathcal{F}_{t_1^k})$ et $[t_1^k, t_2^k[\cap [t_1^{k'}, t_2^{k'}[= \emptyset$ si $k \neq k'$. Nous calculons alors:

$$\begin{aligned}
I(\phi)\|_{L^2}^2 &= E[I(\phi)_\infty^2] \\
&= E[(\sum_0^n I(\psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k,t_2^k[})_\infty)^2] \\
&= E[(\sum_0^n \psi_k (B_{t_2^k} - B_{t_1^k}))^2] \\
&= E[\sum_0^n \psi_k^2 (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})^2] \\
&\quad +2E[\sum_{k<j} \psi_k \psi_j (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})(B_{t_2^j} - B_{t_1^j})] \\
&= \sum_0^n E[\psi_k^2](t_2^k - t_1^k)
\end{aligned}$$

car, les intervalles $[t_1^k, t_2^k[$ et $[t_1^j, t_2^j[$ sont disjoints si $k < j$, donc $E[\psi_k \psi_j (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})(B_{t_2^j} - B_{t_1^j})] = 0$. Par ailleurs:

$$\begin{aligned}
\phi\|_{H_2^2}^2 &= E[\int_0^\infty (\sum_0^n \psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k,t_2^k[})^2 dt] \\
&= E[\int_0^\infty (\sum_0^n \psi_k^2 \mathbf{1}_{[t_1^k,t_2^k[}) dt] \\
&= E[\sum_k \psi_k^2(\omega)(t_2^k - t_1^k)] \\
&= \sum_k E(\psi_k^2)(t_2^k - t_1^k) \\
&= \|I(\phi)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Nous concluons donc que $\|I(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}$: I est bien une isométrie. ■

Corollary 4.13 *Si $\{\phi_n\} \subset \mathcal{E}sc$ converge vers $\phi \in H_2^2$ au sens de $\|.\|_{H_2^2}$, alors la suite $\{I(\phi_n)\}$ converge dans M^2.*

Si $\{\phi_n'\} \subset \mathcal{E}sc$ converge également ϕ, alors

$$\lim_{n\to\infty} I(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} I(\phi_n').$$

Preuve: En effet, si $\{\phi_n\}$ converge, il s'agit d'une suite de Cauchy dans H_2^2 donc, I étant linéaire et isométrique:

$$\|I(\phi_n) - I(\phi_m)\|_{L^2} = \|I(\phi_n - \phi_m)\|_{L^2} = \|\phi_n - \phi_m\|_{H_2^2} \to 0.$$

Ainsi $\{I(\phi_n)\}$ est une suite de Cauchy dans M^2 et, M^2 étant complet, la limite $\lim_{n\to\infty} I(\phi_n)$ existe. Si $\{\phi'_n\}$ est une autre suite convergent vers ϕ, nous pouvons en créer une troisième $\{\phi''_n\}$ qui prend alternativement ses éléments dans les suites $\{\phi_n\}$ et $\{\phi'_n\}$. Puisque $\{\phi''_n\}$ converge vers ϕ, la suite $\{I(\phi''_n)\}$ est convergente et toutes les sous-suites de $\{I(\phi''_n)\}$,– $\{I(\phi_n)\}$ et $\{I(\phi'_n)\}$ en particulier–, convergent donc vers une limite commune. ∎

We are able to introduce now the Itô integral:

Definition 4.14 *(Itô integral on H_2^2) If $\phi \in H_2^2$, there exists a sequence $\{\phi_n\} \subset \mathcal{E}sc$ that converges to ϕ. We set $\bar{I}(\phi) := \lim_{n\to\infty} I(\phi_n)$. By using the previous corollary, the limit does not depend on the chosen sequence $\{\phi_n\}$. $\bar{I}(\phi)$ is called the Itô integral of the process ϕ.*

Exercice 4.15 *Montrez que $\bar{I}$ est linéaire et isométrique et que si $\phi \in \mathcal{E}sc$: $\bar{I}(\phi) = I(\phi)$.*

Preuve: Soient ϕ et $\phi' \in H_2^2$, soient $\{\phi_n\}$ et $\{\phi'_n\} \subset \mathcal{E}sc$ telles que $\phi_n \to \phi$ et $\phi'_n \to \phi'$. Alors $\forall \alpha, \beta \in I\!R : (\alpha\phi_n + \beta\phi'_n) \to (\alpha\phi + \beta\phi')$ et donc

$$\begin{aligned} \bar{I}(\alpha\phi + \beta\phi') &= L^2 - \lim I(\alpha\phi_n + \beta{\phi'}_n) \\ &= \alpha \lim I(\phi_n) + \beta \lim I({\phi'}_n) \\ &= \alpha\bar{I}(\phi) + \beta\bar{I}(\phi') \end{aligned}$$

d'où $\bar{I}$ est linéaire. Montrons que $\bar{I}$ est isométrique:

$$\|\bar{I}(\phi)\|_{L^2} = \lim \|I(\phi_n)\|_{L^2} = \lim \|\phi_n\|_{H_2^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

Enfin si $\phi \in \mathcal{E}sc$, la suite constante $\phi_n := \phi$ est une suite dans $\mathcal{E}sc$ qui converge vers ϕ. Ainsi $\bar{I}(\phi) = \lim I(\phi_n) = I(\phi)$. ∎

Definition 4.16 *From now on we will denote $\bar{I}(\phi) = \int_0^{\cdot} \phi_t dB_t$, $\bar{I}(\phi)_s = \int_0^s \phi_t dB_t$ and $\int_a^b \phi_t dB_t = \bar{I}(\phi)_b - \bar{I}(\phi)_a$.*

Remark 4.17 *Remark that $\bar{I}(\phi)$ has been globally defined as a stochastic process. We don(t know apriori if $\bar{I}(\phi)_s$ depends or not on the behavior of the process ϕ after the time s (property which is evident in the construction "pathwise" of the integral)*

The next exercise proves that actually the integral at time t depends only on the trajectory of the integrand from zero to t.

Exercice 4.18 *Si T est fixé, montrez que*

$$\forall \phi \in H_2^2 : \bar{I}(\phi)_T = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,T[}\phi)_\infty.$$

Avec les notations intégrales, cela revient à dire:

$$\int_0^T \phi_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,T[}(s)\phi_s dB_s$$

ou encore $\int_T^\infty \mathbf{1}_{[0,T[}(s)\phi_s dB_s = 0$.

Preuve: Définissons les applications $J : H_2^2 \to L^2(\mathcal{F}_T)$ et $K : H_2^2 \to L^2(\mathcal{F}_\infty)$ comme suit: $J(\phi) := \bar{I}(\phi)_T$ et $K(\phi) := \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,T[}\phi)_\infty$.

J et K sont clairement linéaires puique $\bar{I}$ l'est. Montrons que ces applications sont également continues. En effet:

$$\|J(\phi)\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi)_T\|_{L^2} \leq \|\bar{I}(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

De même

$$\|K(\phi)\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})_\infty\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})\|_{L^2} = \|\phi\mathbf{1}_{[0,T[}\|_{H_2^2},$$

d'où

$$\|K(\phi)\|_{L^2} = \sqrt{E(\int_0^T {\phi^2}_s ds)} \leq \sqrt{E(\int_0^\infty {\phi^2}_s ds)} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

Posons à présent $\mathcal{F} := \{\phi \in H_2^2 | J(\phi) = K(\phi)\}$. Par continuité et linéarité de J et K, $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel fermé de H_2^2.

Remarquons que, si ϕ est de la forme $\phi = \psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$, alors:

$$J(\phi) = \bar{I}(\phi)_T = \psi(B_{T\wedge t_2} - B_{T\wedge t_1})$$

et, puisque $[t_1, t_2[\cap[0, T[= [T \wedge t_1, T \wedge t_2[$, nous avons $\phi\mathbf{1}_{[0,T[} = \psi\mathbf{1}_{[T\wedge t_1,T\wedge t_2[}$. Ainsi

$$K(\phi) = \bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})_\infty = \psi(B_{T\wedge t_2} - B_{T\wedge t_1}) = J(\phi).$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ contient tous les ϕ de la forme $\phi = \psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$. $\mathcal{F}$ contient donc $\mathcal{E}sc$ qui est l'espace vectoriel engendré par ces ϕ. $\mathcal{F}$ étant fermé, et $\mathcal{E}sc$ étant dense dans H_2^2, nous avons établi que $H_2^2 \subset \mathcal{F}$: ce que nous voulions montrer. ■

Exercice 4.19 *Montrez que si $\phi \in H_2^2$, si $A \in \mathcal{F}_t$ alors:*

1. $\psi_s(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[t,\infty[}(s)\phi_s(\omega) \in H_2^2$.
2. $\int_0^\cdot \psi_s dB_s = \mathbf{1}_A \int_0^\cdot \mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi_s dB_s$.

Nous montrons en fait ici que si $Z \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ alors

$$\int_t^\infty Z\phi_s dB_s = Z \cdot \int_t^\infty \phi_s dB_s$$

Preuve:

1) Montrons que ψ est progressivement mesurable. Soit T fixé:

Si $T < t$ alors la resrtiction de ψ à $\Omega \times [0, T]$ est identiquement nulle donc $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$-mesurable.

Si $T \geq t$ alors $\mathbf{1}_A$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable donc $\mathcal{F}_T$-mesurable et $\mathbf{1}_{[t,\infty[}$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable d'où $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{[t,\infty[}$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$-mesurable et, puisque $\phi \in H_2^2$, $\psi(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[t,\infty[}(s)\phi_s(\omega)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,T[}$-mesurable.

Calculons à présent $\|\psi\|_{H_2^2}$:

$$\|\psi\|^2_{H_2^2} = E[\int_0^\infty \psi_s^2 ds] = E[\mathbf{1}_A \int_t^\infty \phi_s^2 ds] \le E[\int_0^\infty \phi_s^2 ds] = \|\phi\|^2_{H_2^2} < \infty.$$

Ainsi: $\psi \in H_2^2$.

2) Pour montrer la deuxième assertion, posons

$$J(\phi) := \bar{I}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi) \text{ et } K(\phi) := \mathbf{1}_A \cdot \bar{I}(\mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi).$$

Il est facile de voir que si ϕ est de la forme $\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}\psi$, alors $J(\phi) = K(\phi)$. On montre aisément que J et K sont des applications linéaires continues de H_2^2 dans M^2. Nous pouvons donc appliquer la preuve de l'exercice précédent. ■

Exercice 4.20 *Si τ est un temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs: $\tau(\Omega) = \{t_1, \ldots, t_n\}$ où $t_1 < \ldots < t_n$, si $\phi \in H_2^2$, montrez que $\bar{I}(\phi)_\tau = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)_\infty$. En d'autres termes:*

$$\int_0^\tau \phi_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau[}(s)\phi_s dB_s.$$

Montrez ensuite que cette relation est vérifiée pour tout temps d'arrêt τ.

Preuve: Considérons un temps d'arrêt τ discret. Alors, puisque $\{\tau = t_i\}$ est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, nous obtenons avec les deux exercices précédents:

$$\begin{aligned}
\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)_\infty &= \bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\mathbf{1}_{[\tau,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \bar{I}(\phi)_\infty - \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}(\bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,t_i[}\phi)_\infty \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\phi)_{t_i} \\
&= \bar{I}(\phi)_\tau.
\end{aligned}$$

Si τ est un temps d'arrêt général, il existe une suite $\{\tau_n\}$ de temps d'arrêt discrets telle que $\tau_n \searrow \tau$ (voir la démonstration du théorème d'arrêt , Ch. 3). Par continuité des trajectoires de $\bar{I}(\phi)$, nous avons:

$$\bar{I}(\phi)_\tau = \lim_{n\to\infty} \bar{I}(\phi)_{\tau_n} = \lim_{n\to\infty} \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi)_\infty$$

Pour terminer la démonstration, il nous suffit donc de montrer que les processus $\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi$ converge dans H_2^2 vers $\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi$. Mais ceci suit le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à la mesure $P \otimes \lambda$ sur $\Omega \times [0, \infty[$: d'une part $\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi$ converge ponctuellement vers $\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi$ et d'autre part, $\forall n : |\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi| \leq |\phi|$. ■

Exercice 4.21 *Si τ est un temps d'arrêt, et X un processus, nous rappelons que la notation X^τ désigne le processus $t \to X_t^\tau := X_{\tau\wedge t}$. Améliorez les démonstrations antérieures pour prouver que*

$$\bar{I}(\phi)^\tau = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi).$$

Exercice 4.22 *Il suit de l'exercice précédent que si $\sigma \leq \tau$ sont deux temps d'arrêt, alors les processus $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\sigma[}\phi)$ et $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)$ concident jusqu'au temps σ: $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\sigma[}\phi) = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)^\sigma$. Nous mettons à profits cette remarque dans la suite pour étendre la définition de l'intégrale d'Itô $\bar{I}$ à une classe plus vaste de processus.*

Definition 4.23 *(Local martingale) A process X is a $\{\mathcal{F}_t\}$-local martingale if it is continuous and adapted to the filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ and there exists an increasing sequence τ_n of stopping times such that $\tau_n \nearrow \infty$ P-a.s. for every n: $X^{\tau_n} \in \mathcal{M}^2$. We denote by $\mathcal{M}^{loc}$ the set of local martingales and by M^{loc} the quotient of $\mathcal{M}^{loc}$ for the equivalence relation $\stackrel{modif}{\equiv}$.*

Exercice 4.24 *Montrez que toute martingale continue est une martingale locale.*

Remark 4.25 *In general a local martingales is not a martingale. The next exercise provides an example in this sense.*

Exercice 4.26 *Soit V une variable aléatoire finie positive telle que $E[V] = \infty$. Soit par ailleurs B un mouvement Brownien indépendant de V. Posons $\mathcal{F}_t := \sigma(V, B_s, s \in [0,t])$ et $X_t := V \cdot B_t$.*

1) Montrez que X_t n'est pas dans L^1 si $t > 0$. X ne peut donc pas être une martingale.

2) Montrez que B est un $\{\mathcal{F}_t\}$-mouvement brownien.

3) Soit $\tau_n := \mathbf{1}_{\{V \leq n\}} n$. Montrez que τ_n est un $\{\mathcal{F}_t\}$-temps d'arrêt et que $\tau_n \nearrow \infty$.

4) Montrez que $X_s^{\tau_n} = \mathbf{1}_{V\leq n}(V \wedge n) \cdot B_{s\wedge n}$. Concluez que $X^{\tau_n} \in M^2$.

Exercice 4.27 *Montrez que si $X \in M^{loc}$, si τ est un temps d'arrêt tel que X^τ soit un processus borné, alors X^τ est une martingale.*

Preuve: *Voila une idée pour le cas $X \in M^2$. Montrer d'abord que X adapté est une martingale si et seulement si pout tout temps d'arrêt borné T, on a*

$$E(X_T) = E(X_0).$$

(une direction est claire, pour l'autre utiliser le temps d'arrêt particulier $T = t1_A s + 1_{A^c} t$ si $A \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$

Utiliser ensuite cela pour conclure que $X_S^T = X_O^T$ pour tout S temps d'arrêt borné.

En général on ne peut pas remplacer borné par U.I. dans l'énoncé précédent.

Definition 4.28 *(The space H_2^{loc}) H_2^{loc} is the set of processes a which are progressively measurable and for every $T \in [0, \infty[$:*

$$\int_0^T a_t^2 \, dt < \infty \ P\text{-}P.P.$$

For a such process, we put τ_n^a the stopping time(!)

$$\tau_n^a := inf\{t | \int_0^t a_s^2 ds \geq n\}.$$

The process $\mathbf{1}_{[0,\tau_n^a[} a$ is then in H_2^2. In addition, if $a \in M^{loc}$, τ_n^a is an increasing sequence of stopping times who converges to ∞ almost surely.

Remark 4.29 *We aim now to define $J(\phi) := \int_0^{\cdot} \phi_s dB_s$ for a process ϕ in H_2^{loc}. It is natural to ask that $\forall n$: $J(\phi)_{\tau_n^\phi}$ coincides with $\int_0^{\tau_n^\phi} \phi_s dB_s$ interpreted as the integral $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}\phi)_\infty$ previously defined. We will actually ask that $J(\phi)$ and $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}\phi)$ coincide until the time τ_n^ϕ. The next theorem indicates that a such process $J(\phi)$ exists.*

Theorem 4.30 *If $\{\mathcal{F}_t\}$ is a complete filtration then $\forall \phi \in H_2^{loc}$,there exists a process $J(\phi)$ unique in M^{loc} such that $\forall n : J(\phi)^{\tau_n^\phi} = \bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$.*

Preuve: $\bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$ est un élément de M^2 soit une classe d'équivalence pour la relation $\overset{\text{modif}}{\equiv}$. Choisissons un représentant Y_n de cette classe. Si $n < m$, l'identité $\bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}) = \bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_m^\phi[})^{\tau_n^\phi}$ de la remarque 4.22 se traduit en terme de Y_n et Y_m par $Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Y_m^{\tau_n^\phi}$. L'exercice 1.40, Ch. 3 nous apprend que Y_n et Y_m sont indistinguables. Ainsi $P(A_{n,m}) = 1$, où $A_{n,m} := \{\omega | \forall t \geq 0 : Y_{n,t}(\omega) = Y_{m,t}^{\tau_n^\phi}(\omega)\}$. Soit $A := \cap_{n<m} A_{n,m}$. Nous avons également $P(A) = 1$.

Soit $B := \{\omega : \lim_{n\to\infty} \tau_n^\phi(\omega) = \infty\}$. Nous avons alors $P(B) = 1$, et donc $P(A') = 1$, où $A' := A \cap B$. Si ω appartient à A', définissons $Y_t(\omega)$ comme suit: il existe n tel que $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$. Posons $Y_t(\omega) := Y_{n,t}(\omega)$. Remarquons que cette définition ne dépend pas du n choisi tel que $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$. En effet, si $t \leq \tau_m^\phi(\omega)$, et par exemple $n < m$, alors $Y_{n,t}(\omega) = Y_{m,t}^{\tau_n^\phi}(\omega) = Y_{m,t\wedge\tau_n^\phi}(\omega) = Y_{m,t}(\omega)$.

Le processus Y est donc bien défini sur A'. Définissons alors $Y_t(\omega) := 0$ si $\omega \notin A'$. Le processus Y obtenu est donc continu, et si $\omega \in A'$ nous avons $Y_{n,t}(\omega) = Y_t(\omega)$ si $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$ et si $t > \tau_n^\phi(\omega)$, $Y_{n,t}(\omega) = Y_{n,\tau_n^\phi(\omega)}(\omega) = Y_{\tau_n^\phi(\omega)}(\omega)$. Nous venons de montrer que $Y_t^{\tau_n^\phi} = Y_{n,t}\mathbf{1}_{A'}$.

Aussi $\forall\omega$: $Y_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A'} Y_{n,t}(\omega)$. Puisque la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ est complète et qur $P(A') = 1$, $\mathbf{1}_{A'} Y_{n,t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et en passant à la limité, Y_t l'est aussi: Y est adapté à $\{\mathcal{F}_t\}$. De plus, la relation $Y_t^{\tau_n^\phi} = Y_{n,t}\mathbf{1}_{A'}$ implique que $Y_{n,t} = Y_t^{\tau_n^\phi}$ P-ps. Ainsi $Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Y^{\tau_n^\phi}$. Puisque $Y_n \in \mathcal{M}^2$, cette relation indique que $Y \in \mathcal{M}^{loc}$. Nous définissons enfin $J(\phi)$ comme la classe d'équivalence sur $\mathcal{M}^{loc}$ pour $\overset{\text{modif}}{\equiv}$ qui contient Y. Nous avons alors $\forall n : J(\phi)^{\tau_n^\phi} = \bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$.

Il nous reste à montrer l'unicité de $J(\phi)$: soit $Z \in \mathcal{M}^{loc}$ tel que $\forall n : Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Z^{\tau_n^\phi}$, alors $\forall n : Y^{\tau_n^\phi} \overset{\text{modif}}{\equiv} Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Z^{\tau_n^\phi}$. Puisque $\tau_n^\phi \nearrow \infty$, cela implique clairement que $Y \overset{\text{modif}}{\equiv} Z$. ■

Show that the application $J : H_2^{loc} \to M^{loc} : \phi \to J(\phi)$ is linear.

Remark 4.31 *Show that if $\phi \in H_2^2$, then $J(\phi) = \bar{I}(\phi)$.*

Definition 4.32 *$J(\phi)$ will be the Itô integral of the process $\phi \in H_2^{loc}$. We adopt the following integral notation: $J(\phi)_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ et $J(\phi) = \int_0^\cdot \phi_s dB_s$.*

Exercice 4.33 *Nous avons défini l'application $J : H_2^{loc} \to M^{loc}$ comme l'intégrale par rapport à un mouvement brownien donné B quelconque. Si B^1 et B^2 sont deux mouvements browniens indépendants, nous savons que $B^3 := \frac{1}{\sqrt{2}}(B^1 + B^2)$ est encore un mouvement brownien. A chacun de ces mouvements browniens correspond donc une application $J : H_2^{loc} \to M^{loc}$ différente que nous noterons respectivement J_1, J_2 et J_3. Montrez que $J_3(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1(\phi) + J_2(\phi))$. En notation intégrale, cela revient à montrer que*

$$\int_0^\cdot \phi_t dB_t^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\int_0^\cdot \phi_t dB_t^1 + \int_0^\cdot \phi_t dB_t^2).$$

4.3 The semi-martingales and their brackets:

Definition 4.34 *We define $\mathcal{H}_1^{loc}$ as the set of progressively measurable processes ϕ such that for every $T < \infty$*

$$\int_0^T |\phi_s| ds < \infty \ P\text{-}ps.$$

H_1^{loc} is the quotient of $\mathcal{H}_1^{loc}$ with respect to the relation: $P \otimes \lambda$-pp, where λ is the Lebesgue measure on $[0, \infty[$.

Definition 4.35 *A process X adapted to the filtration $\mathcal{F}_t$ is a semi-martingale if $\exists X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, $a \in H_2^{loc}$ and $b \in H_1^{loc}$ with:*

$$X = X_0 + \int_0^\cdot a_s dB_s + \int_0^\cdot b_s\, ds. \tag{3}$$

More generally, if $B^1, \cdots, B^n$ are s $\{\mathcal{F}_t\}$in dependent Brownian motion and if $X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, $a^1, \cdots, a^n \in H_2^{loc}$ and $b \in H_1^{loc}$, then we will also consider that the below process X is a *semi-martingale*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\cdot} a_s^i dB_s^i + \int_0^{\cdot} b_s ds \tag{4}$$

Remark 4.36 *We define in general a semi-martingale as a sum $M+A$ of a local martingale M and an adapted process A with finite variation on any interval. Our definition is more restrictive.*

Theorem 4.37 *If the process X is a semi-martingale, then the decomposition (3) is unique.*

Preuve: Par linéarité des intégrales, montrer l'unicité de la représentation (3), revient à montrer que, si $\alpha \in H_2^{loc}$ et $\beta \in H_1^{loc}$ vérifient

$$\int_0^{\cdot} \alpha_s dB_s = \int_0^{\cdot} \beta_s ds,$$

alors $\alpha = \beta = 0$.

Posons $M := \int_0^{\cdot} \alpha_s dB_s$, et définissons:

$$\tau_n = inf\{t : |M_t| \geq n \ \ ou \int_0^t \beta_s|ds \geq n\}.$$

Montrons d'abord que le processus que M^{τ_n} est identiquement nulle: soit $t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = t$. Alors, puisque par l'exercice 4.27, M^{τ_n} est une martingale, nous avons:

$$\begin{aligned}
E[(M_t^{\tau_n})^2] &= \sum_i E[(M_{t_{i+1}}^{\tau_n})^2 - (M_{t_i}^{\tau_n})^2] \\
&= \sum_i E[(M_{t_{i+1}}^{\tau_n} - M_{t_i}^{\tau_n})^2] \\
&\leq E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \sum_i |M_{t_{i+1}}^{\tau_n} - M_{t_i}^{\tau_n}|] \\
&= E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \sum_i |\int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta_s \mathbf{1}_{s \leq \tau_n} ds|] \\
&\leq E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \int_0^t |\beta_s| ds] \\
&\leq n \cdot E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}|].
\end{aligned}$$

Puisque M^{τ_n} est continue, ses trajectoires sont uniformément continues sur $[0, t]$ et donc $\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \to 0$ P-pp lorsque $\max_j |t_{j+1} - t_j| \to 0$. Puisque $|M_{t_{j+1}}^{\tau_n}| \leq n$, par définition de τ_n, il suit du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que $E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}|] \to 0$

Ainsi, $\forall t$ nous avons obtenu

$$E[(M_t^{\tau_n})^2] = 0$$

et donc M^{τ_n} est donc identiquement nulle. Puisque $\tau_n \nearrow \infty$ P-pp, $0 = M_t^{\tau_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M_t$. P-ps.

Ceci implique que M est identiquement nul, et donc α et β sont nuls. ∎

The next lemma is a consequence of the above proof. It is interesting by itself and it deserves to be retained.

Proposition 4.38 *If M est is a local martingale with bounded variation, then $M_t \equiv 0$ for every t.*

The result that follows will generalize the quadratic variation of the Brownian motion (Chapter 2). Let $\Delta = \{t_1, \ldots, t_n\}$ with $0 = t_0 < t_2 < \ldots < t_n = T$, a partition of the interval $[0, T]$. If X is a process, we define

$$T^{\Delta}(X) := \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

We first treat the case of the space H_2^2.

Theorem 4.39 *If $a \in H_2^2$ and*

$$X = \int_0^{\cdot} a_s dB_s,$$

then

$$T^{\Delta}(X) \to \int_0^T a_s^2 ds$$

in L^1 when $|\Delta| \to 0$

Preuve: Observons d'abord que si le processus a est dans $\mathcal{E}sc$, le résultat est une conséquence de la propriété de variation quadratique du mouvement brownien. En effet, pour tout intervalle de type $]a, b]$ ou u prend la valeur constante c, on a une contribution du type

$$c^2 \sum_{a \le t_{j-1} \le t_j \le b} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$$

qui converge vers $c^2(b-a)$.

Considérons maintenant $a \in H_2^2$. Par le théorème de densité de $\mathcal{E}sc$ dans H_2^2, il existe une suite a^k de $\mathcal{E}sc$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} E \int_0^T \left| a_t - a_t^k \right|^2 dt = 0.$$

On peut supposer que le processus a^k est constant sur $[t_j, t_{j+1})$, sinon il suffit d'inclure les points de la partition associés à a^k dans les t_j.

On aura, en posant $X_t^k = \int_0^t a_s^k dB_s$

$$\begin{aligned}
E\left(\left|T^\Delta(X) - \int_0^t a_s^2 ds\right|\right) &\leq E(|T^\Delta(X) - T^\Delta(X^k)|) \\
&\quad + E\left(\left|T^\Delta(X^k) - \int_0^t (a_s^k)^2 ds\right|\right) \\
&\quad + E\left(\left|\int_0^t (a_s^k)^2 ds - \int_0^t (a_s)^2 ds\right|\right).
\end{aligned}$$

On peut borner le premier terme en utilisant l'inégalité de Schwartz et l'isométrie de l'intégrale stochastique

$$\begin{aligned}
E(|T^\Delta(X) - T^\Delta(X^k)|) &= E\left[\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_s + a_s^k) dB_s\right)\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_s - a_s^k) dB_s\right)\right] \\
&\leq \left(E(T^\Delta(X + X^k)\right)^{\frac{1}{2}} \left(E(T^\Delta(X - X^k)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[E\left(\int_0^t (a_s + a_s^k)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} E\left(\int_0^t (a_s - a_s^k)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

Observons que la borne obtenue ne dépend pas de n et converge quand $k \to \infty$. Donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$E\left(\left|T^\Delta(X) - \int_0^t a_s^2 ds\right|\right) \leq \varepsilon + E\left(\left|T^\Delta(X^k) - \int_0^t (a_s^k)^2 ds\right|\right).$$

Il suffit maintenant de prendre la limite lorsque la norme de la division tend vers 0. ■

We also present a more general situation with a slightly different proof.

Theorem 4.40 *If $a \in H_2^{loc}$ and $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$, then $T^\Delta(X) \to \int_0^T a_s^2 ds$ in probability when $|\Delta| \to 0$*

Preuve: Soit $a \in H_2^{loc}$ et $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$. Posons

$$\tau_n := \inf\{t : |X_t| \geq n \text{ ou } \int_0^t a_s^2 ds \geq n\},$$

$a_n := \mathbf{1}_{[0,\tau_n[} a$ et $X_n := \int_0^\cdot a_{n,s} dB_s$. Il suit de la définition de $\int_0^\cdot a_s dB_s$ que $X_n = X^{\tau_n}$, et nous avons aussi $\int_0^T a_{n,s}^2 ds = \int_0^{T\wedge\tau_n} a_s^2 ds$, de sorte que sur $\{\tau_n \geq T\}$, pour tout Δ, $T^\Delta(X_n) = T^\Delta(X)$ et $\int_0^T a_{n,s}^2 ds = \int_0^T a_s^2 ds$. Il nous suffit donc d'établir le résultat pour les processus $a \in H_2^2$ tels que $|X|$ et $\int_0^\infty a_s^2 ds$ soient bornés: le résultat sera vrai pour a_n et donc, $\forall \delta > 0$, $P(|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta)$ est borné par

$$P(\tau_n < T) + P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta\}).$$

$P(\tau_n < T)$ est aussi petit que l'on désire en prenant n suffisemment grand et $P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta\})$ est égal à

$$P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X_n) - \int_0^T a_{n,s}^2 ds| > \delta\}).$$

Ce dernier terme est aussi petit que l'on désire en prenant $|\Delta|$ suffisemment petit.

Supposons donc que $a \in H_2^2$ est tel que $|X|$ et $\int_0^\infty a_s^2 ds$ soient bornés par M. Notons $\Delta X_i := X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ et calculons $E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}]$: Si $A \in \mathcal{F}_{t_i}$, il suit de l'exercice 4.19 que

$$\mathbf{1}_A \Delta X_i = \mathbf{1}_A \int_0^\infty \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) a_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) a_s dB_s.$$

Aussi:

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{1}_A (\Delta X_i)^2] &= E[(\mathbf{1}_A \Delta X_i)^2] = I(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} a)\|_{L^2}^2 \\
&= \|\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} a\|_{H_2^2}^2 = E[\mathbf{1}_A \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds] \\
&= E[\mathbf{1}_A E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds | \mathcal{F}_{t_i}]]
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_{t_i}$, nous avons montré que

$$E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}] = E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds | \mathcal{F}_{t_i}].$$

Ainsi, si l'on pose $V_0 := 0$ et $V_{i+1} := V_i + (\Delta X_i)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds$, V est une $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_{i=0,\ldots,n}$-martingale et $V_n = T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds$. Dès lors:

$$\begin{aligned}
E[(T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds)^2] &= E[V_n^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E[(V_{i+1} - V_i)^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E[((\Delta X_i)^2 - E[(\Delta X_i)^2 | \mathcal{F}_{t_i}])^2] \leq \sum_{i=0}^{n-1} E[(\Delta X_i)^4], \quad (5)
\end{aligned}$$

car, en posant $S := (\Delta X_i)^2$, on a:

$$E[S^2] = E[(S - E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2] + E[(E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2] \geq E[(S - E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2].$$

Remarquons ensuite que

$$E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^4] \leq E[\Delta X_*^2 \cdot T^\Delta(X)] \leq \sqrt{E[\Delta X_*^4]} \cdot \sqrt{E[(T^\Delta(X))^2]},$$

où $\Delta X_* := \max_i(\Delta X_i)$. Puisque X est un processus continu, ΔX_* tend P-pp vers 0 lorsque $|\Delta| \to 0$, et par ailleurs ΔX_* est borné par $2M$, puisque X est borné par M. Partant $\sqrt{E[\Delta X_*^4]}$ tend vers 0.

Nous allons montrer maitenant que $E[(T^\Delta(X))^2]$ est borné. Nous aurons ainsi démontré la convergence L^2 de $T^\Delta(X)$ vers $\int_0^T a_s^2 ds$, et donc la convergence en probabilité. En utilisant l'inégalité (5), le fait que X est une martingale bornée par M et que $\int_0^\infty a_s^2 ds \leq M$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|T^\Delta(X)\|_{L^2} &\leq \|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds\|_{L^2} + \|\int_0^T a_s^2 ds\|_{L^2} \\
&\leq \sqrt{E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^4]} + M \\
&\leq \sqrt{(2M)^2 E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^2]} + M \\
&= \sqrt{(2M)^2 E[X_T^2]} + M \\
&= 2M^2 + M.
\end{aligned}$$

■

Definition 4.41 *A continuous stochastic process A such that for every T: $T^\Delta(X)$ converges in probability to A_T when the mesh $|\Delta|$ of the partition of $[0,T]$ tends to 0 is called the bracket of X and it is denoted by $\langle X, X\rangle := A$.*

Remark 4.42 *The previous theorem shows that, if $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$ où $a \in H_2^{loc}$, then$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t a_s^2 ds$.*

Definition 4.43 *(joint bracket) If X and Y are two processes, we denote by*

$$T^\Delta(X,Y) := \sum_{i=1}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \cdot (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

The process A which is the limit in ptobability of $T^\Delta(X,Y)$is called the joint bracket of X and Y and it is denoted by $\langle X, Y\rangle$.

L'exercice qui suit donnera le crochet d'une semimartingale ainsi que le crochet croisé d'une martingale est d'un processus à variation bornée (absolument continu)

Exercice 4.44 *1) Montrez que si* $Y = \int_0^{\cdot} b_s ds$ *où* $b \in H_1^{loc}$*, alors* $\langle Y, Y \rangle = 0$.

2) Si $X = \int_0^{\cdot} a_s dB_s$ *où* $a \in H_2^{loc}$*, montrez que* $T^{\Delta}(X, Y) \to 0$ *en probabilité. (i.e.* $\langle X, Y \rangle = 0$*).*

3) Si $X = X_0 + \int_0^{\cdot} a_t dB_t + \int_0^{\cdot} b_t dt$ *est une semi-martingale, montrez que* $\langle X, X \rangle_t = \int_0^t a_s^2 ds$.

4) Montrez que $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\langle X+Y, X+Y \rangle + \langle X-Y, X-Y \rangle)$ *et calculez le crochet croisé* $\langle X, Y \rangle$ *de deux semi-martingales* $X = X_0 + \int_0^{\cdot} a_t dB_t + \int_0^{\cdot} b_t dt$ *et* $Y = Y_0 + \int_0^{\cdot} a'_t dB_t + \int_0^{\cdot} b'_t dt$.

5) Supposons que B_1 *et* B_2 *soient deux* $\{\mathcal{F}_t\}$*-mouvements browniens indépendants. Calculez* $\langle B_1 + B_2, B_1 + B_2 \rangle$, $\langle B_1 - B_2, B_1 - B_2 \rangle$ *et finalement montrez que* $\langle B_1, B_2 \rangle = 0$.

Exercice 4.45 *L'objet de cet exercice est de montrer que si* B^1 *et* B^2 *sont des mouvements browniens indépendents, si* $a^1, a^2 \in H_2^{loc}$ *et* $X^i := \int_0^{\cdot} a_t^i dB_t^i$*, alors* $\langle X^1, X^2 \rangle = 0$.

1) Montrez que pour démontrer cette affirmation, il suffit de la prouver pour des processus a^i *tels que* X^i *et* $\int_0^{\cdot} (a_s^i)^2 ds$ *soient bornés par une constante* M*. Nous supposerons donc que ces hypothèses sont vérifiées dans la suite de l'exercice.*

2) Soit $S > T$ *et* $A \in \mathcal{F}_T$*, et considérons l'application*

$$F : H_2^2 \times H_2^2 \to I\!R, (u, v) \to F(u, v) := E[\mathbf{1}_A \int_T^S u_t dB_t^1 \cdot \int_T^S v_t dB_t^2].$$

Montrer que F *est bilinéaire et continue:*

$$|F(u, v)| \leq \|u\|_{H_2^2} \cdot \|v\|_{H_2^2}.$$

3) Montrez que si $u = \phi \mathbf{1}_{[t^1, t^2[}$, $v = \psi \mathbf{1}_{[s^1, s^2[}$*, avec* $t^1 < t^2$, $\phi \in L^2(\mathcal{F}_{t^1})$, $s_1 < s_2$ *et* $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{s^1})$*, alors* $F(u, v) = 0$.

Concluez que $\forall u, v \in H_2^2 : F(u, v) = 0$.

4) Montrez que le processus $Z_t = X_t^1 \cdot X_t^2$ *est une martingale.*

5) Soit Δ *une partition de* $[0, T]$*. Nous reprenons les notations de l'exercice précédent et du théorème 4.40. Montrez que*

$$2(\Delta Z_i)^2 \leq (\Delta X_i^1)^4 + (\Delta X_i^2)^4$$

6) Montrez que $E[(T^{\Delta}(X^1, X^2))^2] = E[\sum_{i=1}^{n-1} (\Delta Z_i)^2]$*. En utilisant la fin de la preuve du théorème 4.40, montrez que* $T^{\Delta}(X^1, X^2) \to 0$ *dans* L^2 *lorsque* $|\Delta|$ *tend vers 0.*

7) En utilisant les résultats de cet exercice et du précédent, calculez le crochet $\langle X, X \rangle$ *de la semi-martingale générale définie à la définition 4.35 formule (4).*

4.4 Change of variable formula (Itô formula)

The stochastic integral with respect to a semi-martingale is defined as follows:

Definition 4.46 *If $(v_t)_{t\geq 0}$ is a progressively measurable process we will write by convention*

$$\int_0^\cdot v_t dX_t := \int_0^\cdot v_t \cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot v_t \cdot b_t dt.$$

Here is a first step to the obtention of the Itô formula.

Exercice 4.47 *If $X = X_0 + \int_0^\cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot b_t dt$ is a semi-martingale then for every t:*

$$X_t^2 \overset{P\text{-}pp}{=} X_0^2 + \int_0^t 2X_s\, dX_s + \int_0^t d\langle X, X\rangle_s$$

In particular the processes in both sides above are indistinguishables.

Preuve: Comme pour la démonstration précédente, par arrêt à des temps τ_n appropriés, il suffit de démontrer le corollaire pour des processus tels que X, $\int_0^\infty a_s^2 ds$ et $\int_0^\infty |b_s| ds$ soient bornés.

Fixons T et remarquons que si Δ est une partition de $[0, T]$, alors:

$$\begin{aligned} X_T^2 &= X_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2) = X_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1}((X_{t_i} + \Delta X_i)^2 - X_{t_i}^2) \\ &= X_0^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\Delta X_i + \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^2 \\ &= X_0^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s dB_s + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} b_s ds + T^\Delta(X) \end{aligned}$$

Utilisant le fait que X est borné et continu, il est aisé de remarquer que le processus

$$\phi_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\mathbf{1}_{[t_i t_{i+1}[}(s) a_s$$

converge vers $X_s a_s$ dans H_2^2 lorsque $|\Delta| \to 0$. La première somme convergera donc dans L^2 vers $2\int_0^T X_s a_s dB_s$ et donc aussi en probabilité. Par un raisonnement analogue la deuxième somme convergera vers $2\int_0^T X_s b_s ds$ en probabilité. Enfin $T^\Delta(X)$ converge en probabilité vers $\langle X, X\rangle$ par définition du crochet de X. La première assertion est donc démontrée.

Les processus d'une part et de l'autre part de l'égalité sont continus. Nous venons de démontrer qu'ils sont des modifications l'un de l'autre. Ils sont donc indistinguables, comme il ressort de l'exercice 1.40, Ch. 3. ■

Exercice 4.48 *If X and Y are semi-martingales, show that*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \int_0^t d\langle X,Y\rangle_s.$$

Preuve: On sait que $X_tY_t = \frac{1}{4}[(X_t+Y_t)^2 - (X_t-Y_t)^2]$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent aux martingales $X+Y$ et $X-Y$. ■

The last exercise proves that the product of two semi-martingale is still a semi-martingale. The following result shows that if we apply a smooth enough function to a semi-martingale, the result is still a semi-martingale.

Theorem 4.49 *(Itô formula) If X is a semi-martingale of the form (3) and $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a function of class $\mathcal{C}^2$, then*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)a_s dB_s + \int_0^t f'(X_s)b_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)a_s^2 ds \qquad (6)$$

or, in other words,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s.$$

Preuve: Nous allons donner les idées de la démonstration dans le cas particulier $b=0$.

Par un argument de localisation, on peut supposer que f, f', f'' sont bornées. En effet, pour tout $n\geq 1$, on pose

$$T_n = \inf\{t\geq 0; |X_0| + |\int_0^t a_s dB_s| + |\int_0^t a_s^2 ds| \geq n\}\wedge n.$$

Il est clair que T_n est un temps d'arrêt tel que $T_n \nearrow \infty$. Considérons la semimartingale $X_{t\wedge T_n}$. Alors

$$|X_{t\wedge T_n}| \leq n$$

pour tout $n\geq 1$ et tout $t\geq 0$. Il suffit de prouver (6) pour $X_{t\wedge T_n}$ à la place de X_t (car après on prend la limite quand $n\to\infty$). De cette façon, tout se réduit à prouver (6) pour X tel que

$$|\int_0^t a_s dB_s| + |X_t| \leq c$$

et dans ce cas il y a que les valeurs de f, f', f'' sur le compact $[0,t]\times B(\bar{0},c)$ qui interviennent. Donc f, f', f'' peuvent être supposées continues à support compact, donc bornées.

D'une autre part, en approximant a par une suite de processus bornés de $\mathcal{E}sc$ telle que

$$P\left(\int_0^t (a_s - a_s^n)^2 ds > \varepsilon\right) \to_{n\to\infty} 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prouver (6) pour un processus a escalier borné.

Considérons $t_j = \frac{tj}{n}$. On peut supposer par un argument standard que le processus a est constant sur $[t_j, t_{j+1})$, sinon il suffit d'inclure les points de la partition associés à a dans les t_j.

La formule de Taylor d'ordre 2 nous donne

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} \big(f(X_{t_j}) - f(X_{t_{j-1}})\big) \\ &= f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} f'(X_{t_{j-1}})\Delta X_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f''(\bar{X}_j)(\Delta X_j)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

où $\Delta X_j = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ et $\bar{X}_j$ est un point situé entre $X_{t_{j-1}}$ et X_{t_j}.

La première somme à droite de (7) converge dans L^2 vers $\int_0^t f'(X_s)a_s dB_s$. En effet

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{j=1}^{n} f'(X_{t_{j-1}})\Delta X_j - \int_0^t f'(X_s)a_s dB_s\right]^2 \\ =\ & E\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} (f'(X_{t_{j-1}}) - f'(X_s))^2 a_s^2 ds\right) \\ \leq\ & K^2 t E\left(\sup_{|s-r|\leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2\right) \end{aligned}$$

en assumant que a est majoré par la constante K. Cela converge vers zero car $f(X_t)$ est continu est borné.

La deuxième somme à droite de (7) converge dans L^2 vers

$$\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)a_s^2 ds$$

car

$$\begin{aligned} & \left|\sum_{j=1}^{n} f''(\bar{X}_j)(\Delta X_j)^2 - \int_0^t f''(X_s)a_s^2 ds\right| \\ \leq\ & \left|\sum_{j=1}^{n}(f''(\bar{X}_j) - f''(X_{t_{j-1}}))(\Delta X_j)^2\right|^2 + \left|f''(X_{t_{j-1}})\left((\Delta X_j)^2 - \int_{t_{j-1}}^{t_j} a_s^2 ds\right)\right| \\ & + \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \big(f''(X_{t_{j-1}}) - f''(X_s)\big)\, a_s^2 ds\right| \\ :=\ & a_1 + a_2 + a_3. \end{aligned}$$

Les termes a_1 et a_3 se traitent par les majorations

$$a_1 \leq \sup_{|r-s|\leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \sum_{j=1}^{n} (\Delta X_j)^2$$

et

$$a_3 \leq \sup_{|r-s|\leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \int_0^t a_s^2 ds$$

donc ils convergent vers zero.

Voyons le terme a_2. Notons ϕ_j la valeur du processus escalier a sur $[t_{j-1}, t_j[$. Comme $\Delta X_j = \phi_j \Delta B_j$ et en posant

$$d_j := \phi_j f''(X_{t_{j-1}})$$

on obtient en utilisant l'indépendance des acroissements du brown ien et en notant $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$

$$\begin{aligned} E(a_2^2) &\leq E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)\right)^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} E\left(d_j^2 \left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 E\left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 E\left((\Delta B_j)^4 - 2(\Delta B_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2\right) \\ &= 2\sum_{j=1}^{n} E d_j^2 (\Delta t_j)^2 \leq \frac{2t}{n} \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 (\Delta t_j) \to_{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

■

Remark 4.50 *Sometimes we use the differential notation*

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X, X\rangle_t$$

Exercice 4.51 *Comparer la formule d'Itô pour $f(x) = x^2$ avec celle donne par l'exercice 4.47.*

Theorem 4.52 *(Itô formula for functions depending on time) let $f = f(t,x)$ be a function of class $C^{1,2}$ and let $Y_t = f(t, X_t)$ where X is a semi-martingale of the form (3). Then*

$$\begin{aligned} f(t,Y_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)a_s dB_s \\ & \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)b_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)a_s^2 ds. \end{aligned}$$

We present below the multidimensional version of the Itô formula.

Theorem 4.53 *If $f : I\!R^d \to I\!R$ is $\mathcal{C}^2$, if*

$$X^j = X_0^j + \sum_k \int_0^\cdot a_s^{k,j} dB_s^k + \int_0^\cdot b_s^j ds$$

are semi-martingales and if $X := (X^1, \cdots, X^d)$, then:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,j'} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{j'}}(X_s) d\langle X^j, X^{j'}\rangle_s. \end{aligned} \tag{8}$$

Preuve: Par la technique d'arrêt des démonstrations précédentes, il suffit de démontrer le résultat pour les semi-martingales X à valeurs dans un ensemble compact K de $I\!R^d$. Soit $\mathcal{V}$ la classe des fonctions $f : K \to I\!R$ vérifiant le théorème.

Les fonctions constantes ainsi que les fonctons

$$g^j : x = (x^1, \cdots, x^d) \to g^j(x) := x^j$$

sont dans $\mathcal{V}$.

Par linéarité en f de la formule (8), si f et g sont dans $\mathcal{V}$ et $\alpha, \beta \in I\!R$ alors clairement $\alpha f + \beta g \in \mathcal{V}$.

Montrons que si f et g sont dans $\mathcal{V}$ alors $h := f \cdot g$ l'est également. Soit $F_t := f(X_t)$, $G_t := g(X_t)$, $H_t := g(X_t)$, Par d'exercice 4.48, nous avons:

$$dH_t = F_t dG_t + G_t dF_t + d\langle F, G\rangle_t$$

Puisque f et g sont dans $\mathcal{V}$, on trouve:

$$\begin{aligned} dF_t &= \textstyle\sum_j \partial_j f(X_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j,j'} \partial_{j,j'} f(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \\ dG_t &= \textstyle\sum_j \partial_j g(X_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j,j'} \partial_{j,j'} g(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \end{aligned}$$

Puisque les termes en $d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t$ sont à 1-variation bornée, ils n'interviennent pas dans le calcul de $d\langle F, G\rangle_t$. On trouve alors:

$$d\langle F, G\rangle_t = \sum_{j,j'} \partial_j f(X_t) \cdot \partial_{j'} g(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t.$$

Aussi

$$\begin{array}{rcl} dH_t & = & \sum_j (G_t \partial_j f(X_t) + F_t \partial_j g(X_t)) \cdot dX_t^j \\ & & + \frac{1}{2} \sum_{j,j'} L_t^{j,j'} \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \end{array}$$

où $L_t^{j,j'} = (G_t \partial_{j,j'} f(X_t) + F_t \partial_{j,j'} g(X_t) + 2\partial_j f(X_t) \cdot \partial_{j'} g(X_t))$. Puisque $\partial_j h(X_t) = G_t \partial_j f(X_t) + F_t \partial_j g(X_t)$ et $\partial_{j,j'} h(X_t) = L_t^{j,j'}$, on en conclut donc que dH_t vérifie bien la formule (8) et partant $h \in \mathcal{V}$.

De ce qui précède, on conclut que $\mathcal{V}$ contient tous les polynômes. Soit $\epsilon > 0$. Toute fonction $f \in \mathcal{C}_2$ peut être approximée sur K par un polynôme g tel que $\|f - g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$, $\forall j$: $\|\partial_j f - \partial_j g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$ et $\forall j, j'$: $\|\partial_{j,j'} f - \partial_{j,j'} g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$. Puisque la formule (8) est vérifiée par g, elle sera vérifiée par f par passage à la limite, et le théorème est donc démontré. ■

4.5 Applications of the Itô formula

Les exercices qui suivent constituent quelques applications immédiates de la formule d'Itô.

Exercice 4.54 *Montrer que, si B est le mouvement brownien, alors*

$$B_t^n = n \int_0^t B_s^{n-1} dB_s + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t B_s^{n-2} ds.$$

Exercice 4.55 *En utilisant la formule d'Itô, montrez que, si B est un mouvement brownien, alors $M_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$ est une martingale locale.*

Preuve: Soit $f(x) := \exp(x)$ et $X_t := \alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t$. Puisque $X_t = \int_0^t \alpha dB_s + \int_0^t (-\alpha^2/2) ds$, on a $\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \alpha^2 ds = \alpha^2 t$. La formule d'Itô nous donne donc, avec $f(x) = f'(x) = f''(x)$:

$$\begin{array}{rcl} M_t & = & f(M_t) \\ & = & f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s \\ & = & f(0) + \int_0^t M_s \alpha dB_s - \int_0^t M_s \frac{\alpha^2}{2} ds + \frac{1}{2} \int_0^t M_s \alpha^2 ds \\ & = & 1 + \int_0^t M_s \alpha dB_s \end{array}$$

Puisque les trajectoires de B et donc de M sont continues, la variable $M_T^* := \sup\{M_s : 0 \leq s \leq T\}$ est, pour tout $T < \infty$, une variable P-pp finie. Puisque $\int_0^T M_s^2 \alpha^2 ds \leq$

$M_T^{*2} \cdot \alpha^2 \cdot T$, le processus $M_t\alpha$ appartient à H_2^{loc}. Son intégrale $\int_0^{\cdot} M_s \alpha dB_s$ est donc une martingale locale et il en est alors de même pour M. ■

Definition 4.56 *Si X et Y sont deux semimartingales, on définit l'intégrale de Stratonovich de X par rapport à Y par*

$$\int_0^t X_s d \circ Y_s = \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle_t.$$

Exercice 4.57 *En déduire de l'exercice 4.48 que*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s d \circ Y_s + \int_0^t Y_s d \circ X_s$$

Exercice 4.58 *Montrer que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(X_{t_{i+1}} + X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

converge en probabilité vers $\int_0^t X_s d \circ Y_s$ si $0 = t_0 < \dots t_n = t$ est une partition de $[0, t]$.

Exercice 4.59 *Soit B^1, B^2, B^3 trois mouvements browniens indépéndants. Soit $f(x_1, x_2, x_3) := (\sum_{i=1}^3 (1 + x_i)^2)^{-1/2}$ et $Z_t := f(B_t^1, B_t^2, B_t^3)$.*

1) Montrez que $\sum_{i=1}^3 \partial_{i,i} f(x_1, , x_2, x_3) = 0$, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \neq (-1, -1, -1)$.

2) Soit $\tau_n := \inf\{t : Z_t \geq n\}$. En utilisant la formule d'Itô, montrez que Z^{τ_n} est une martingale positive bornée par n.

3) Montrez que $E[Z_{\tau_n}] = 1/\sqrt{3}$. Déduire de cela que

$$P(\tau_n < \infty) \leq 1/(n\sqrt{3})$$

et que $\tau_n \nearrow \infty$ P-ps. Z est donc une martingale locale.

4) Soit $\sigma_m := \inf\{t : Z_t \leq 1/m\}$. En utilisant le corollaire 2.15, montrez que $\sigma_m < \infty$ P-ps. Montrez ensuite que $\sigma_m \nearrow \infty$ P-ps.

Montrez que $Z_{\tau_n \wedge \sigma_m} \in \{1/m, n\}$ P-ps. et que $Z_{\tau_n \wedge \sigma_m} \stackrel{P\text{-}pp}{\longrightarrow} Z_{\tau_n}$ lorsque $m \to \infty$. Déduizez-en que $Z_{\tau_n} = n \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}$ P-ps.

5) Montrez que $Z_{\tau_n} \stackrel{P\text{-}pp}{\longrightarrow} 0$ lorsque n tend vers l'infini.

6) En utilisant la densité normale, montrez qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\forall t$ $E[Z_t^2] \leq C$.

7) Si Z était une martingale, nous aurions $Z \in \mathcal{M}^2$. Montrez qu'en vertu du corollaire 4.22, Z ne peut donc être une martingale.

Z est donc une martingale locale bornée en norme L^2 (donc U.I.) qui n'est pas une martingale.