Cours de CALCUL STOCHASTIQUE

Ciprian TUDOR
Université de Panthéon-Sorbonne Paris 1

November 12, 2008

MASTER M2: Mathématiques Appliquées à l'Economie et à la Finance

Version 2008-2009

1 CHAPITRE I: Introduction et rappels

1.1 Variables Aléatoires: définition, loi, fonction caractéristique, indépendance, espaces L^p

Le cadre général est le suivant: on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où:

Ω est un ensemble non vide, appelé "univers", qui représente l'ensemble des résultats possibles d'une expérience

$\mathcal{F}$ est une σ-algèbre (tribu), c.à. d. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et

a) $\Phi \in \mathcal{F}$

b) si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$.

c) si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

P est une probabilité, c.à.d P est une application $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ qui satisfait:

a) $P(\Omega) = 1$

b) si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ sont disjoints, alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definition 1 *Une variable aléatoire est une application X mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$.*

On rappelle que X est mesurable si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, $X^{-1}(B) := \{\omega | X(\omega) \in B\}$ est un élément de $\mathcal{F}$.

La variable X "transporte" la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en une probabilité P_X sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} : P_X(B) := P(X^{-1}(B))$$

P_X est appelée loi de la v.a X.

Exercice 1.1 *Montrez que P_X est une probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$.*

Exercice 1.2 *Montrez que $\sigma(X) := \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\}$ est une σ-algèbre d'ensembles. C'est la plus petite tribu sur Ω qui rend X mesurable.*

Exercice 1.3 *Montrez que si $\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de σ-algèbres sur Ω, alors $\cap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ est également une σ-algèbre.*

En particulier, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on définit $\sigma(\mathcal{G})$

$$\sigma(\mathcal{G}) = \bigcap_{\mathcal{F} tribu \supset \mathcal{G}} \mathcal{F}.$$

$\sigma(\mathcal{G})$ est donc la plus petite σ-algèbre qui contient $\mathcal{G}$.

Définition 1.4 *On définit l'espérance d'une v.a.$X \geq 0$ par:*

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$$

Si $p \in [1, \infty[$, on définit $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ comme l'espace des v.a. X telles que $\|X\|_{L^p}^p := E(|X|^p) < \infty$.

Sur $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit par

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$$

Exercice 1.5 *Montrez que $\|X\|_{L^p} = 0$ est équivalent à $X = 0$ P-pp.*

$\|.\|_{L^p}$ ne peut donc être une norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On définit:

Définition 1.6 *$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est l'espace des classes d'équivalence de v.a. de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour la relation d'équivalence $=$ P-pp (presque partout).*

Théorème 1.7 *Pour tout $p \in [1, \infty[$, l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni de la norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach.*

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni du produit scalaire $\langle X, Y\rangle := E[X \cdot Y]$ est un espace de Hilbert

Exercice 1.8 *Montrez que si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^d} x\, dP_X(x) :$$

L'espérance d'une v.a. ne dépend que de sa loi.

Définition 1.9 *Si X et Y sont des v.a. de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit*

$$var[X] := E[(X - E[X])^2] \text{ et } cov[X, Y] := E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])].$$

Si Z est un vecteur aléatoire, considéré comme une matrice colonne, dont toutes les composantes sont dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la matrice de covariance $var[Z]$ est définie par

$$var[Z] := E[(Z - E[Z])(Z - E[Z])^\top].$$

Exercice 1.10 *Montrez que si $v \in \mathbb{R}^d$, alors $var[\langle v, Z\rangle] = v^\top var[Z] v$. En déduire que $var[Z]$ est une matrice définie positive.*

Exercice 1.11 Inégalité de Tchebychev: *si $\lambda > 0$, alors $\forall p \geq 1$*

$$P(|X| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|X|^p).$$

Inégalité de Schwartz:

$$E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Inégalité de Hölder:

$$E(XY) \leq [E|X|^p]^{\frac{1}{p}}[E|Y|^q]^{\frac{1}{q}} \qquad si\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Inégalité de Jensen: *si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et Y est un vecteur aléatoire d dimensionnel, alors $E[f(Y)] \geq f(E[Y])$.*

En déduire que si $\alpha > \beta$ alors $\|X\|_{L^\alpha} \geq \|X\|_{L^\beta}$. En particulier $L^\alpha(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset L^\beta(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Définition 1.12 *Une variable aléatoire Z à valeurs réelles suit une loi normale centrée réduite, ce que l'on note $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ si sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue s'écrit sous la forme:*

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-z^2}{2})$$

Définition 1.13 *Une variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 si $Y = \mu + \sigma Z$ où Z suit une loi normale centrée et réduite. On note alors $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. μ et σ^2 sont respectivement l'espérance et la variance de la v. a. Y.*

Définition 1.14 *La fontion caractéristique φ_Z d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est définie par: $\varphi_Z : \mathbb{R}^d \to \mathcal{C} : \alpha \to \varphi_Z(\alpha)$:*

$$\varphi_Z(\alpha) = E(exp(i \cdot \langle \alpha, Z \rangle)).$$

Théorème 1.15 *La fonction caractéristique caractérise la loi: Si les variables aléatoires X et Y ont mêmes fonctions caractéristiques (i.e. $\varphi_X = \varphi_Y$), alors elles ont mêmes lois: $P_X = P_Y$.*

Exercice 1.16 *Montrez que si Z est une variable normale centrée réduite alors $\varphi_Z(\alpha) = \exp(-\alpha^2/2)$. Calculez $\varphi_Y(\alpha)$ lorsque $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.*

Définition 1.17 *Deux événements A et B de $\mathcal{F}$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. On écrit alors $A \perp\!\!\!\perp B$. Deux sous tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ sont indépendantes, ce que l'on note $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}$, si $\forall B \in \mathcal{B}, \forall C \in \mathcal{C} : B \perp\!\!\!\perp C$. Deux variables aléatoires X et Y sur Ω sont indépendantes si $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$.*

Exercice 1.18 *Montrez que $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall \alpha, \beta$:*

$$\varphi_{(X,Y)}(\alpha, \beta) = \varphi_X(\alpha) \cdot \varphi_Y(\beta)$$

Exercice 1.19 *Montrez que si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $cov(X,Y) = 0$. Donnez un exemple de vecteur (X,Y) tel que $cov(X,Y) = 0$, mais tel que X et Y ne soient pas indépendants.*

Exercice 1.20 *Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre d'ensembles et $\mathcal{C}$ une algèbre d'ensembles qui vérifient $\forall B \in \mathcal{B}, \forall C \in \mathcal{C} : B \perp\!\!\!\perp C$, alors $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{C})$.*

Exercice 1.21 *si $Y_1 \sim N(\mu_1, {\sigma^2}_1)$ et $Y_2 \sim N(\mu_2, {\sigma^2}_2)$ sont deux v.a. indépendantes, calculer φ_S où $S := Y_1 + Y_2$. En déduire que $S \sim N(\mu_1 + \mu_2, {\sigma^2}_1 + {\sigma^2}_2)$.*

Types de convergence pour les variables aléatoires:

Convergence en loi: Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers X ssi pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on a la convergence de $E[f(X_n)]$ vers $E[f(X)]$.

Convergence en probabilité: Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en probabilité vers X si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \to_{n\to\infty} 0$$

Convergence presque sûre: Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge presque surement vers X si

$$X_n(\omega) \to_{n\to\infty} X(w).$$

pour tout $\omega \notin N$ où $P(N) = 0$.

Convergence dans L^p, $p \geq 1$: Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge dans L^p vers X si

$$E\left(|X_n - X|^p\right) \to_{n\to\infty} 0.$$

Exercice 1.22 *Rappeller les relations entre les différentes types de convergence pour les variables aléatoires.*

Exercice 1.23 *Montrez que si $X_n \stackrel{Loi}{\to} X$, et $P[X = a] = 0$, alors $P[X_n \leq a] \to P[X \leq a]$, lorsque $n \to \infty$.*

Théorème 1.24 *Si X_n est une suite de variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, alors $X_n \stackrel{Loi}{\to} X$ ssi*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^d : \varphi_{X_n}(\alpha) \to \varphi_X(\alpha).$$

Le théorème précédent permet de montrer aisément le théorème central limite:

Théorème 1.25 *(théorème central limite TCL) Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, indépendantes, identiquement distribuées d'espérance nulle et de variance 1, alors*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Ce théorème explique l'apparition fréquente de la loi normale dans la nature.

Définition 1.26 *Un vecteur aléatoire Y dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si $\forall v \in \mathbb{R}^d$, $< v, Y >$ est une v.a gaussienne.*

Exercice 1.27 *Montrez que si Y est un vecteur gaussien tel que $E(Y) = \mu$ et la matrice de variance covariance $var(Y) = \Sigma$, alors*

$$\varphi_Y(v) = exp[i < v, \mu > -\frac{v^t\Sigma\, v}{2}]$$

(les vecteurs v de $\mathbb{R}^d$ sont considérés dans cette expression comme des matrices colonnes). Ceci montre que la loi d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par μ et Σ.

1.2 Processus aléatoires:

Définition 1.28 *Un processus aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$, indicé par un ensemble de temps $T \subset \mathbb{R}$ est une famille $\{X_t\}_{t\in T}$ de v.a aléatoires de $(\Omega,\mathcal{F},P)$.*

X_t représente l'état du processus au temps T.

A ω fixé, l'application $t \to X_t(\omega)$ s'appelle trajectoire du processus.

On peut définir différentes relations d'équivalence entre deux processus ainsi:

Définition 1.29 *Les processus X et Y sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ sont des modifications l'un de l'autre (notation $Y \overset{modif}{\equiv} Y$) si:*

$$\forall t \geq 0, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\ P - pp.$$

Définition 1.30 *Les processus X et Y sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ sont indistinguables si et seulement si:*

$$\{\omega | \forall\, 0 \leq t < \infty,\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$$

est mesurable et a pour probabilité 1.

Définition 1.31 *Les processus X et Y sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ont mêmes lois fini-dimensionnelles si:*

$$\forall\, 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty, (X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \text{ et } (Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})$$

ont la même loi.

Exercice 1.32 *Monter que, si X et Y sont indistinguables, alors ils sont des modifications l'un de l'autre.*

Exercice 1.33 *Montrer que la réciproque est fausse.*

Preuve: En effet soit $\Omega = [0,1]$ et P la mesure de Lebesgue, posons:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $Y_t(\omega) = 0$.
Alors on a :$P(\{\omega | X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\})$=$P(\{t = \omega\}) = 0$ donc $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ P-pp d'où $X_t(\omega)$ et $Y_t(\omega)$ sont des modifications l'un de l'autre.

Par contre

$$\{\omega | \ \forall\ 0 \leq t < \infty, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = \{\omega | \ \forall\ 0 \leq t < \infty, t \neq \omega\} = \emptyset$$

donc $P(\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 0 \neq 1$ d'où X_t et Y_t ne sont pas indistinguables . ■

Exercice 1.34 *Montrez que si deux processus ont toutes leurs trajectoires continues (même continues à droite), alors $X \overset{modif}{\equiv} Y$ implique que X et Y sont indistinguables.*

Preuve: Soit

$$N_t = \{\omega \in \Omega / X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

et

$$N = \bigcup_{t \in Q} N_t$$

Q étant les rationels de $[0, \infty)$. Alors

$$P(N) = 0$$

donc $X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in Q$, $\forall \omega \notin N$. Si $t \notin Q$, on considère t_n une suite de Q telle que $t_n \downarrow t$. Alors, pour tout $\omega \notin N$, on a $X_{t_n} = Y_{t_n}$ pour tout n et donc

$$X_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n \to \infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega)$$

et par conséquent X et Y sont indistinguable. ■

Exercice 1.35 *(***A faire en TD***) Montrez que si deux processus sont des modifications l'un de l'autre, alors ils ont mêmes lois fini-dimensionnelles.*

1.3 Filtration

Définition 1.36 *Une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *est une famille croissante de sous-*σ*-algèbres de* $\mathcal{F}$*. C'est à dire* $\forall 0 \leq s < t < \infty$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$*.*

$\mathcal{F}_t$ représente le niveau de connaissance du processus X au temps t, c.à. d $\mathcal{F}_t$ est la classe des événements que l'on peut "identifier" au temps t.

Définition 1.37 *Si* $\mathcal{F}_t$ *est une filtration, alors on note:*

- $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$
- $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$
- $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s)$.

Définition 1.38 *Une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *est continue à droite (respectivement à gauche) si* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ *(respectivement* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$*)* $\forall t \geq 0$.

Définition 1.39 *Une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *est complète si* $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$ *tel que* $P(A) = 0$*,* $A \in \mathcal{F}_0$*.*

Définition 1.40 *Le processus* X *est adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si et seulement si* $\forall$ $0 \leq t < \infty$*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.41 *Soit* $\mathcal{F}$ *une sous* σ*-algèbre de* $\mathcal{G}$ *et soit* $\mathcal{N}$ *la classe des ensembles de* $\mathcal{G}$ *de probabilité nulle. Alors la tribu* $\bar{\mathcal{F}} := \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ *est appelée complètion de la tribu* $\mathcal{F}$*.*

Exercice 1.42 *Montrez que toute variable* $\bar{X}$ $\bar{\mathcal{F}}$*-mesurable est égale* P*-pp à une variable* X $\mathcal{F}$*-mesurable.*

Définition 1.43 *La filtration* $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in T}$ *est appelée la complétion de* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$*.*

Exercice 1.44 *Montrez que toute modification* X' *d'un processus* X *adapté à* $\mathcal{F}_t$ *est adapté à* $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in T}$

1.4 Espérance conditionnelle:

La probabilité conditionnelle d'un événement $A \in \mathcal{F}$ par un événement $B \in \mathcal{F}$ avec $P(B) > 0$ est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}.$$

On voit que A et B sont indépendants ssi $P(A|B) = P(A)$. La probabilité conditionnelle $P(A|B)$ représente la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé. L'application

$$A \to P(A|B)$$

définit alors une nouvelle probabilité sur $\mathcal{F}$. On peut alors définir l'espérance conditionnelle d'une v.a. X par rapport à un événement B par

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} E(X 1_B).$$

Un concept plus compliqué est le conditionnement par une σ algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ d'une v.a. X.

Exercice 1.45 *Soit X une variable aléatoire de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrez que $C := E[X]$ est la constante qui approxime le mieux X au sens $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Interprétons une sous σ-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ comme un "niveau d'information" concernant l'expérience aléatoire: A ce niveau d'information, on peut décider de tout événement $B \in \mathcal{B}$ s'il a ou non été réalisé. On peut donc également calculer la valeur de toute fonction $\mathcal{B}$ mesurable. Au vu de l'exercice précédent, il est assez naturel de définir l'espérance conditionnelle comme suit:

Définition 1.46 *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ et $X \in L^2(\mathcal{F})$. La variable dans $L^2(\mathcal{B})$ qui approxime le mieux X au sens de L^2 est notée $E[X|\mathcal{B}]$ et se lit espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.*

$E[X|\mathcal{B}]$ est ainsi la projection orthogonale de X sur l'espace $L^2(\mathcal{B})$ donc $E[X|\mathcal{B}]$ existe toujours, puisque $L^2(\mathcal{B})$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\mathcal{F})$, et est unique au sens L^2.

Les relations d'orthogonalité s'écrivent:

$$\forall Z \in \mathbf{L^2}(\mathcal{B}) : E[ZX] = E[ZE[X|\mathcal{B}]].$$

Exercice 1.47 *Montrez que, si $X \geq Y$ $P-pp$, alors $E[X|\mathcal{B}] \geq E[Y|\mathcal{B}]$ $P-pp$.*

Idée de la preuve: On pose

$$A_\varepsilon = \{E[Y|\mathcal{B}] - E[X|\mathcal{B}] \geq \varepsilon > 0\}$$

et on montre aisément que

$$P(A_\varepsilon) = 0.$$

■

Exercice 1.48 *(**A faire en TD**)Si $U \in L^2(\mathcal{B})$, montrez que $U = E[X|\mathcal{B}]$ si et seulement si $\forall B \in \mathcal{B} : E[U\mathbf{1}_B] = E[X\mathbf{1}_B]$.*

Exercice 1.49 *On considère* $(\Omega_j)_{j\geq 1}$ *une partition de* Ω *telle que* $P(\Omega_j) > 0$ *pour tout* $j \geq 1$*. Soit* $\mathcal{F} = \sigma(\Omega_j, j \geq 1)$*. Alors*

$$E(X/\mathcal{F}) = \sum_{j\geq 1} \frac{E(X1_{\Omega_j})}{P(\Omega_j)} 1_{\Omega_j} := Y$$

Preuve: Comme $1_{\Omega_j} \in \mathcal{F}$, on a $\sum_{j\geq 1} \frac{E(X1_{\Omega_j})}{P(\Omega_j)} 1_{\Omega_j} \in \mathcal{F}$. Il suffit de vérifier la propriété d'orthogonalité pour $A = \Omega_n$, n fixé. Mais

$$E(Y1_{\Omega_n}) = E\left(\frac{X1_{\Omega_n}}{P(\Omega_n)} 1_{\Omega_n}\right) = \frac{X1_{\Omega_n}}{P(\Omega_n)} E(1_{\Omega_n}) = E(X1_{\Omega_n}).$$

■

Théorème 1.50

1. $\forall \alpha, \beta \in I\!R$ $E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{B}] = \alpha E[X|\mathcal{B}] + \beta E[X|\mathcal{B}]$.
2. *Si* $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$*, alors* $E[X|\mathcal{B}] = E[E[X|\mathcal{C}]|\mathcal{B}]$.
3. *Si* X *est indépendant de* $\mathcal{B}$*, alors* $E[X|\mathcal{B}] = E[X]$.
4. $\forall Z \in L^2(\mathcal{B})$*:*
$$E[(X - Z)^2] = E[(X - E[X|\mathcal{B}])^2] + E[(E[X|\mathcal{B}] - Z)^2].$$
5. $\forall\, Y \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{B})$*:* $E[YX|\mathcal{B}] = YE[X|\mathcal{B}]$.
6. *Soit* $\phi : I\!R \to I\!R$ *une fonction convexe telle que* $\phi(X) \in \mathbf{L^2}(\mathcal{F})$*, alors :*
$$E[\phi(X)|\mathcal{B}] \geq \phi(E[X]\mathcal{B}]) \ ps.$$

Preuve:

1. Résulte du fait que la projection orthogonale sur $L^2(\mathcal{B})$ est une application linéaire.
2. Soit $Z \in L^2(\mathcal{B})$, alors $E[ZE[X|\mathcal{B}]] = E[ZX]$. Puisque $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, on a aussi $E[ZX] = E[ZE[X|\mathcal{C}]]$, d'où $E[ZE[X|B]] = E[ZE[X|\mathcal{C}]]$ $\forall Z \in L^2(\mathcal{B})$. Puisque par définition $E[X|\mathcal{B}] \in L^2(\mathcal{B})$, la dernière relation n'est autre que la relation d'orthogonalité qui définit $E[E[X|\mathcal{C}]|\mathcal{B}]$. Ainsi $E[X|\mathcal{B}] = E[E[X|\mathcal{C}]|\mathcal{B}]$.
3. $\forall$ Z $\in L^2(\mathcal{B})$ et X indépendant de $\mathcal{B}$, $E[ZX] = E[X]E[Z] = E[E[X]Z]$, donc $E[X|\mathcal{B}] = E[X]$. Car la seule v.a Y de $\mathbf{L^2}(\mathcal{B})$ vérifiant pour tout $Z \in \mathbf{L^2}(\mathcal{B})$ $E[ZX] = E[ZY]$ est $Y = E[X|\mathcal{B}]$.

4. On a:

$$\begin{aligned}E[(X-Z)^2] &= E[(X-E[X|\mathcal{B}]+E[X|\mathcal{B}]-Z)^2]\\ &= E[(X-E[X|\mathcal{B}])^2]+E[(E[X|\mathcal{B}]-Z)^2]\\ &\quad +2E[(X-E[X|\mathcal{B}])(E[X|\mathcal{B}]-Z)]\end{aligned}$$

Or: $(E[X|\mathcal{B}]-Z)\in L^2(\mathcal{B})$. On en déduit que

$$E[(X-E[X|\mathcal{B}])(E[X|\mathcal{B}]-Z)]=0,$$

et la relation est vérifiée .

5. Posons $H=YE[X|\mathcal{B}]$. Comme $Y\in\mathbf{L}^\infty(\mathcal{B})$ et $E[X|\mathcal{B}]\in L^2(\mathcal{B})$, nous avons: $H\in\mathbf{L^2}(\mathcal{B})$. Ainsi, si $Z\in L^2(\mathcal{B})$, on a:

$$E[ZH]=E[ZYE[X|\mathcal{B}]]=E[Z(YX)]$$

(car $ZY\in\mathbf{L^2}(\mathcal{B})$). Donc $H=E[YX|\mathcal{B}]=YE[X|\mathcal{B}]$.

6. Nous nous limitons ici à des fonction ϕ différentiables. On sait que, si ϕ est convexe, alors $\forall y,z$:

$$\phi(z)\geq\phi(y)+\phi'(y)(z-y)$$

donc $\forall\omega$ on a :

$$\phi(X(\omega))\geq\phi(E[X|\mathcal{B}](\omega))+\phi'(E[X|\mathcal{B}](\omega))(X(\omega)-E[X|\mathcal{B}](\omega))$$

donc, en prenant l'espérance conditionnelle, nous obtenons:

$$\begin{aligned}E[\phi(X)|\mathcal{B}] &\geq E[(\phi(E[X|\mathcal{B}])+\phi'(E[X|\mathcal{B}])(X-E[X|\mathcal{B}])|\mathcal{B}]\\ &= \phi(E[X|\mathcal{B}])+\phi'(E[X|\mathcal{B}])E[(X-E[X|\mathcal{B}])|\mathcal{B}]\end{aligned}$$

Mais

$$E[(X-E[X|\mathcal{B}])|B]=E[X|\mathcal{B}]-E[E[X|\mathcal{B}]|\mathcal{B}]=0,$$

et partant $E[\phi(X)|B]\geq\phi[E[X|\mathcal{B}]],P-ps.$

Exercice 1.51 *(***A faire en TD***) Sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$, on considère la classe*

$$\mathcal{B}:=\{B\in\mathcal{F}|P(B)=0\ ou\ P(B)=1\}.$$

1. *Montrez que $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre.*

2. *Caractérisez les fonctions $\mathcal{B}$-mesurables.*

3. *Pour* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, calculez* $E[X|\mathcal{B}]$.

Exercice 1.52 *(***A faire en TD***) Si* (X,Y) *est un vecteur aléatoire dont la densité* $f_{(X,Y)}$ *vérifie* $\forall x, y \in I\!R : f_{(X,Y)}(x,y) > 0$*, si* $\mathcal{B} := \sigma(Y)$*;*

1. *Montrez que* $E[X|\mathcal{B}] = g(Y)$*, où*

$$g : I\!R \to I\!R : y \to g(y) := \frac{\int_{I\!R} x f_{(X,Y)}(x,y)dx}{\int_{I\!R} f_{(X,Y)}(x,y)dx}$$

   Idée de la preuve: *On a* $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $g(Y) \in \sigma(Y)$.

   Soit maintenant $A \in \sigma(Y)$*. Alors* A *est de la forme* $A = \{\omega, Y(\omega) \in B\}$ *et* $1_A = 1_B(Y)$*. Ensuite*

$$\begin{aligned} E(g(Y)1_A) &= E\left(g(Y)1_B(Y)\right) \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}} g(y)f(x,y)dxdy \\ &= \int_B dy \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{zf(z,y)dz}{\int f(z,y)dz}\right) f(x,y)dx \\ &= \int_B dy \int_{\mathbb{R}} zf(z,y)dz = E(X1_B(Y)) \end{aligned}$$

   et cela entraine que $g(Y)$ *est l'espérance conditionnelle de* X *sachant* $\mathcal{B}$*.*

2. *Si* (X,Y) *est un vecteur gaussien tel que* $E[X] = E[Y] = 0$*,* $var[X] = 1 = var[Y]$ *et* $cov[X,Y] = \rho \in [0,1]$*, calculez* $E[X|\mathcal{B}]$.

Exercice 1.53 *(***A faire en TD***) On prend* $\Omega = (0,1)$*,* $\mathcal{F}_0 = B((0,1))$ *et* $P = \lambda$ *la mesure de Lebesque. On pose* $X(\omega) = cos(\omega\pi)$ *et*

$$\mathcal{F} = \{A \subset (0,1), A \text{ ou } A^c \text{ denombrable } \}.$$

Alors $E(X/\mathcal{F}) = 0$.

Exercice 1.54 *(***A faire en TD***) Si* $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ *et* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1. *Montrez que* $E[X|\mathcal{B}] = E[(E[X|\mathcal{C}])|\mathcal{B}]$.
2. *Montrez que la relation précédente n'est en général pas vérifiée si* $\mathcal{B}$ *n'est pas inclus dans* $\mathcal{C}$*, en considérant le point 2 de l'exercice précédent 1.52 avec* $\mathcal{B} := \sigma(X)$ *et* $\mathcal{C} := \sigma(Y)$*.*

Exercice 1.55 *(***A faire en TD***) La loi d'un vecteur aléatoire* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *est dite échangeable si pour toute permutation* π *de* $\{1, \ldots, n\}$ *les vecteurs* X *et* X_π *ont même loi, où* $X_\pi := (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$*.*

Si X *a une loi échangeable, et* $S := X_1 + \ldots + X_n$*, calculez* $E[X_1|S]$ *(*$E[X_1|S]$ *est une notation abrégée pour* $E[X_1|\sigma(S)]$*).*

Exercice 1.56 *(***A faire en TD***)Si $Z_1, Z_2, \ldots$ est une suite i.i.d. de variables $\mathcal{N}(0,1)$, si $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ et si $X_n := Z_1 + \ldots + Z_n$,*

1. *Montrez que $\forall n \geq m : E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$.*
2. *Montrez que $\forall n \geq m : E[Y_n|\mathcal{F}_m] = Y_m$, où $Y_n := X_n^2 - n$.*
3. *Montrez que $\forall n \geq m : E[M_n|\mathcal{F}_m] = M_m$, où $M_n := \exp(X_n - n/2)$.*

(Les relations précédentes s'expriment en disant que les processus X, Y et M sont des martingales.)

L'espérance conditionnelle sur L^1

L'espérance conditionnelle $E[X|\mathcal{B}]$ a été définie plus haut pour les variables X de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Le théorème de Radon Nikodym est utilisé dans l'exercice suivant pour définir l'espérance conditionnelle des variables X de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ce théorème affirme que si μ est une mesure signée bornée et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$, alors les deux énoncés suivants sont équivalents:

1)μ admet une densité Y par rapport à P (i.e. $\exists Y \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P) : \forall U \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu) : \int_\Omega U d\mu = E_P[U.Y]$)

2) μ est absolument continue par rapport à P (i.e. $\forall B \in \mathcal{B} : P(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$.)

Exercice 1.57 *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{B}$ une sous σ-algèbre de $\mathcal{F}$. Montrez que la mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ définie par $\mu(B) := E_P[X \cdot \mathbf{1}_B]$ est absolument continue par rapport à P. Montrez que la densité Y de μ par rapport à P, qui éxiste par le théorème de Radon Nikodym, vérifie $\forall Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$: $E[Z \cdot X] = E[Z \cdot Y]$ et Y est donc un candidat naturel pour définir $E[X|\mathcal{B}]$.*

CHAPITRE 2

2 CHAPITRE 2: Mouvement brownien

Lors de ses observations microscopiques de particules de pollen en suspension dans l'eau, le botaniste anglais Brown est frappé en 1827 par le mouvement erratique et apparemment imprévisible de ces particules.

Ce mouvement, dénommé depuis mouvement brownien, fut expliqué physiquement par Einstein (1905), qui en donna également les pricipales caractéristiques. Si B_t dénote la position horizontale de la particule de pollen au temps t, Einstein suggère que

(1) $(\forall t, s \geq 0 : (B_{t+s} - B_t) \perp\!\!\!\perp \sigma(B_u; 0 \leq u \leq t)$.

(2) $(\forall t, s \geq 0 : (B_{t+s} - B_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$.

(3) Les trajectoires du processus B sont continues.

Il voit en effet le déplacement de la particule $(B_{t+s} - B_t)$ comme une conséquence des chocs des molécules d'eau sur la particule: On conoit aisément que l'effet de tels chocs est en moyenne nul et que les chocs peuvent être considérés comme indépendants et équidistribués. Le point (1) suit alors l'indépendance des chocs évoquée plus haut. Le point (2) provient d'une utilisation intuitive du théorème central limite: Une somme d'un grand nombre de chocs indépendants suit essentiellement un loi normale dont la variance est proportionnelle au nombre de chocs considérés dans la somme et donc l'intervalle de temps considéré. Le point (3) est évident si l'on considère que B_t est la trajectoire d'une particule physique.

Le modèle physique du mouvement brownien décrit plus haut semble justifier heuristiquement son existence. La preuve mathématique de l'existence d'un espace probabilisé et d'un processus sur cet espace qui a les trois propriétés décrites par Einstein n'a été réalisée qu'en 1920 par Wiener.

2.1 Construction d'un mouvement brownien

Définition 2.1 *Si $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$,un processus B_t adapté la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien standard si:*

- *1) $B_0 = 0$*
- *2) $\forall\ 0 \leq t < s < \infty$, $B_s - B_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ et suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $s - t$.*
- *3) les trajectoires $B(\omega)$ sont continues $\forall \omega$.*

Dans cette section, nous construisons explicitement un mouvement brownien sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivant: $\Omega = I\!R^{I\!N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{I\!R^{I\!N}}$ et $P = (\mathcal{N}(0,1))^{\otimes I\!N}$

(NB. L'existence de cet espace provient du théorème de consistence de Kolmogorov. Rappelons le cadre général. Soit $(E_t, \mathcal{E}_t)_{t\in T}$ une famille d'espaces mesurables où $\mathcal{E}_t = \mathcal{B}(E_t)$ pour tout $t \in T$. Pout tout $F \subset T$, F fini, soit P_F une probabilité sur $\mathcal{E}^F$. Supposons que

1. pour tout $A \in \mathcal{E}^F$ on a

$$P_F(A) = \sup\left(P_F(K), K \subset A, K \text{ compact }\right)$$

2. la famille $\left(E^F, \mathcal{E}^F, P_F\right)_{F\subset T, F \text{ fini}}$ vérifie *la propriété de consistence*

$$P_{F_2} \circ \left(\pi_{F_1}^{F_2}\right)^{-1} = P_{F_1}$$

pour tous $F_1 \subset F_2 \subset T$, F_1, F_2 finis, où $\pi_{F_1}^{F_2}$ représente la projection de E^{F_2} à E^{F_1}.

Alors il existe une probabilité P sur $(E^T, \mathcal{E}^T)$ telle que

$$P \circ (\pi_F^T)^{-1} = P_F$$

pour tout F fini.)

Exercice 2.2 *Appliquer le résultat précedent pour $E_t = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$,$T = \mathbb{N}$ et P_F la loi normale $|F|$-dimensionnelle.*

Soit $\omega = (\xi_n)_{n\in I\!N} \in \Omega$.

Remarque 2.3 *Sous P, les ξ_n sont des variables aléatoires, normales, centrées, réduites et indépendantes. (Cela vient en fait de la construction de la probabilité $P = N(0,1)^{\mathbb{N}}$.)*

Considérons $\{e_i\}$ une base hilbertienne de $L^2([0,\infty[)$ et construisons l'application linéaire:

$$F : L^2([0,\infty[) \to L^2(\Omega) \text{ telle que } \forall i \in I\!N : F(e_i) = \xi_i.$$

Lemme 2.4 *F est bien définie et est une isométrie de $L^2([0,\infty[)$ vers $L^2(\Omega)$. De plus, pour tout $g \in L^2([0,\infty[)$, $F(g)$ suit une loi normale centrée de variance $\|g\|^2$.*

Preuve:
Soit $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel engendré par les e_i. Si $g \in \mathcal{G}$, g peut s'écrire comme une somme finie $g = \sum_{i=0}^N \alpha_i e_i$, où

$$\alpha_i =< e_i, g >= \int_{I\!R} e_i(x) g(x)\, dx.$$

Par linéarité, on trouve $F(g) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \xi_i$, ce qui définit donc F sur $\mathcal{G}$ de manière univoque puisque les α_i sont univoquement déterminés.

Puisque $\|g\|^2_{L^2} = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i^2$ et comme les ξ_i sont des v.a indépendantes normales centrées et réduites, on a

$$F(g) \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=0}^{N} \alpha_i^2) = \mathcal{N}(0, \|g\|^2_{L^2([0,\infty[}).$$

En particulier, si $g \in \mathcal{G}$, $\|F(g)\|^2_{L^2(\Omega)} := E[F(g)^2] = \|g\|^2_{L^2([0,\infty[}$. Ainsi F est une isométrie de $\mathcal{G}$ vers $L^2(\Omega)$ qui peut s'étendre par uniforme continuité $L^2([0,\infty[)$, $\mathcal{G}$ étant dense dans $L^2([0,\infty[)$.

Montrons la dernière assertion: si $g \in L^2([0,\infty[)$, il existe une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ qui converge vers g au sens $L^2([0,\infty[)$. $\{F(g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $F(g)$ au sens $L^2(\Omega)$. Par choix d'une sous-suite, on peut considérer que la convergence a également lieu $P-pp$. Par le théorème de la convergence dominée, on obtient ainsi

$$E[\exp(i\alpha F(g_n))] \to E[\exp(i\alpha F(g))].$$

Or puisque $F(g_n) \sim \mathcal{N}(0, \|g_n\|^2_{L^2([0,\infty[})$, on a $E[\exp(i\alpha F(g_n))] = \exp(-\alpha^2 \|g_n\|^2_{L^2([0,\infty[})$ et en passant la limite: $E[\exp(i\alpha F(g))] = \exp(-\alpha^2 \|g\|^2_{L^2([0,\infty[})$, ce qui démontre que $F(g) \sim \mathcal{N}(0, \|g\|^2_{L^2([0,\infty[})$ ■

Définissons alors $B_s := F(\mathbf{1}_{[0,s]})$.

Lemme 2.5 *Le processus B ainsi construit vérifie les propriétés 1) et 2) de la définition 2.1 relativement sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \in [0,t])$.*

Preuve: Il est évident que $B_0 := F(0) = 0$ P-pp.

Montrons que $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$. A cette fin, montrons d'abord que $\forall t_1 < \ldots < t_n < t < t+s$ le vecteur $\vec{B} = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}, B_{t+s} - B_t)$ est un vecteur gaussien:

si $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}) \in R^{n+1}$, on a:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} v_i B_{t_i} + v_{n+1}(B_{t+s} - B_t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} v_i F(\mathbf{1}_{[0,t_i]}) + v_{n+1} F(\mathbf{1}_{]t,t+s]}) \\
&= F(\sum_{i=0}^{n} v_i \mathbf{1}_{[0,t_i]} + v_{n+1} \mathbf{1}_{]t,t+s]})
\end{aligned}$$

car F est linéaire. Ainsi $\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle$ suit une loi normale, comme il résulte du lemme précédent. Ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{v}$, $\vec{B}$ est bien un vecteur gaussien.

Montrons ensuite que $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. Puisque $\vec{B}$ est gaussien, il suffit de montrez que $cov(B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) = 0$ (exercice 1.56, Ch.1-2).

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} cov(B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) &= E[(B_{t_i} - E(B_{t_i}))(B_{t+s} - B_t - E(B_{t+s} - B_t)] \\ &= E[B_{t_i}(B_{t+s} - B_t)] = \langle B_{t_i}, B_{t+s} - B_t) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle F(\mathbf{1}_{[0,t_i]}), F(\mathbf{1}_{]t,t+s]}) \rangle_{\mathbf{L^2}(\Omega)} = \langle \mathbf{1}_{[0,t_i]}, \mathbf{1}_{]t,t+s]} \rangle_{\mathbf{L^2}([0,\infty[)} \\ &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t_i]}(x) \mathbf{1}_{]t,t+s]}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Donc $(B_{t+s} - B_t) \perp\!\!\!\perp \cup_{T \text{ fini } \subset [0,t]} \sigma(B_v, v \in T)$. Enfin, $\cup_{T \text{ fini } \subset[0,t]} \sigma(B_v, v \in T)$ est une algèbre d'ensembles qui engendre $\mathcal{F}_t$ et on peut donc utiliser l'exercice 1.20, Ch.1 pour conclure l'indépendance de $B_{t+s} - B_t$ et de $\mathcal{F}_t$.

Montrons enfin que $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$.

En effet $B_{t+s} - B_t = F(\mathbf{1}_{[0,t+s]}) - F(\mathbf{1}_{[0,t]}) = F(\mathbf{1}_{]t,t+s]})$ suit une loi normale centrée et on a:

$$\|\mathbf{1}_{]t,t+s]}\|^2_{\mathbf{L^2}([0,\infty[)} = \int_0^\infty \mathbf{1}^2_{]t,t+s]}(x) dx = s.$$

Donc $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$. ■

Ainsi il reste à montrer la continuité des trajectoires. Notons cependant que B_t a été défini plus haut comme $F(\mathbf{1}_{[0,t[})$ où F est une application valeurs dans L^2 et non dans $\mathcal{L}^2$. Ainsi B_t n'est en fait défini qu' un ensemble de probabilité nulle près! Peut-on choisir pour tout t un représentant $\bar{B}_t \in \mathcal{L}^2$ de la classe d'équivalence $B_t \in L^2$, de telle sorte que le processus résultant ait ses trajectoires continues? Pour répondre affirmativement cette question, nous allons nous servir du théorème suivant:

Théorème 2.6 *(critère de continuité de Kolmogorov)*

Si X est un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel qu'il existe α, β et C strictement positifs tels que : $\forall\, 0 \leq s, t < \infty$

$$E[|X_s - X_t|^\alpha] \leq C|s - t|^{1+\beta},$$

alors il existe une modification $\bar{X}$ de X telle que $\forall \delta \in [0, \frac{\beta}{\alpha}[$*:*

$$E\left[\left(sup\{\frac{|\bar{X}_s - \bar{X}_t|}{|s-t|^\delta}, 0 \leq s, t \leq 1, s \neq t\}\right)^\alpha\right] < \infty.$$

En particulier $\bar{X}$ est un processus trajectoires continues sur $[0, \infty[$.

Idée de la preuve: On donnera les étapes de la preuve. On considère $t \in [0, 1]$.

1. Par l'inegalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} E|X_t - X_s|^\alpha \leq C\varepsilon^{-\alpha}|t-s|^{1+\beta}$$

donc $X_s - X_t \to 0$ en probabilité si $s \to t$. Posons

$$t = \frac{k}{2^n}, s = \frac{k-1}{2^n} \text{ et } \varepsilon = 2^{-\gamma n}(0 < \gamma < \beta/\alpha)$$

dans l'inegalité précédente. On obtient

$$P\left(|X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \leq C2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} &P\left(\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| \geq 2^{-\gamma n}\right) \\ &\leq C2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}. \end{aligned}$$

Commee la série $\sum_n 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}$ converge, par le lemme de Borel-Cantelli, il existe en ensemble $\Omega^\star$ de probabilité égale à 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega^\star$,

$$\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{k/2^n} - X_{k-1/2^n}| < 2^{-\gamma n} \qquad \forall n \geq n^\star(\omega)$$

où $n^\star(\omega)$ est une v.a. positive et entière.

2. Posons

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \text{ où } D_n = \{\frac{k}{2^n}, k = 0, \ldots, 2^n\}.$$

On montre que pour tout $\omega \in \Omega^\star$ et $n > n^\star(\omega)$ fixés, et pour tout $m > n$,

$$|X_t - X_s| \leq 2\sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}, \qquad \forall t, s \in D_m, |t-s| < 2^{-n}.$$

3. On prouve que $X_t(\omega), t \in D$ est uniformément continue en t pour tout $\omega \in \Omega^\star$.

4. On construit la modification voulue $\tilde{X}$ de X comme il suit: $\tilde{X}_t(\omega) = 0$ si $\omega \notin \Omega^\star$; $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ si $\omega \in \Omega^\star$ et $t \in D$; si $\omega \in \Omega^\star$ et $t \notin D$, on considère une suite $s_n \in D, s_n \to_{n\to\infty} t$. Alors la suite $X_{s_n}(\omega)$ est de Cauchy (étape précédente) et donc elle a une limite qui dépend de t. On pose alos $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_n X_{s_n}(\omega)$.

■

Exercice 2.7 *Montrez que, sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que $P(\Omega') = 1$ vérifiant: $\forall \omega \in \Omega'$, la trajectoire $t \in [0,1] \to X_t(\omega)$ est δ-Höldérienne pour tout δ dans $[0, \beta/\alpha[$. En d'autres termes:*

$$\forall \delta \in [0, \beta/\alpha[, \exists K(\delta) < \infty : \forall t, s \in [0,1] : |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq K(\delta)|t-s|^{\delta}$$

Montrez que si X vérifie l'inégalité du théorème précédent pour tout $s, t \geq 0$, alors il existe une modification $\bar{X}$ de X dont les trajectoires sont continues sur $[0, \infty[$.

Appliquons le théorème de Kolmogorov au processus B construit plus haut: On a $B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, s-t)$. Donc $B_s - B_t$ a même loi que $\sqrt{s-t}Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi:

$$E[|B_s - B_t|^{\alpha}] = E[\sqrt{s-t}^{\alpha}|Z|^{\alpha}] = |s-t|^{\frac{\alpha}{2}} C_{\alpha} \leq C_{\alpha}|s-t|^{1+\beta}$$

avec $C_{\alpha} := E[|Z|^{\alpha}] < \infty$ et $\beta := \frac{\alpha}{2} - 1$. Puisque il faut que β soit strictement positif, il faut que $\alpha > 2$. Ainsi on obtient une modification de B dont les trajectoires sont localement höldériennes d'ordre $\delta < \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}$. Puisque α est arbitrairement grand, nous avons établi le théorème suivant:

Théorème 2.8 *Il existe une modification $\bar{B}$ du processus B dont les trajectoires sont localement höldériennes d'ordre δ, pout tout δ dans $[0, 1/2[$.*

Remarque 2.9 *Soit $\bar{\mathcal{F}}_t$ la complétion de $\mathcal{F}_t$. Montrez que $\bar{B}$ est adapté $\bar{\mathcal{F}}_t$ et est un $\bar{\mathcal{F}}_t$-mouvement brownien.*

Exercice 2.10 (IL SERA FAIT EN TD) *Montrez que si B est un mouvement brownien, alors $cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, où $s \wedge t$ est une notation pour* $\min(s,t)$.

Montrez que si X est un processus continu gaussien centré —i.e. pour toute famille finie $\{t_1, \ldots, t_n\}$, le vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est gaussien centré— et si $\forall s, t \geq 0 : cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, alors B est un mouvement brownien sur sa filtration naturelle. (Si on ne suppose pas que X est continuu nous trouvons une modification $\bar{X}$ de X qui est un mouvement brownien).

Sur $\Omega_0 := \mathcal{C}([0, \infty[)$, on définit le processus X_t, $\omega_0 \in \Omega_0 \to X_t(\omega_0) := \omega(t)$. Soit $\mathcal{G}_t$ sa filtration naturelle.

Corollaire 2.11 *Sur $(\Omega_0, \mathcal{G}_{\infty})$ il existe une mesure de probabilité Π unique, telle que X_t soit un $\mathcal{G}_t$-mouvement brownien. Π est appelée mesure de Wiener.*

Preuve:

1) *existence:* Soit l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel nous avons construit le mouvement brownien $\hat{B}$. Nous pouvons voir $\hat{B}$ comme une application qui $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire $\hat{B}_{\cdot}(\omega) : t \to \hat{B}_t(\omega)$. Ainsi, $\hat{B}_{\cdot}$ est une application de Ω dans Ω_0. Elle est clairement mesurable

de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}_\infty$, puisque $\forall t$: $\hat{B}_t$ est $\mathcal{F}$-mesurable. On prend pour Π la mesure image de P par $\hat{B}_.$: $\Pi := P_{\hat{B}_.}$ cd $\forall C \in \mathcal{G}_\infty : \Pi(C) := P(\hat{B}_.^{-1}(C))$.

Sous Π, montrons que $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. En effet, pour $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Pi(\{\omega_0|X_t(\omega_0) \in A\}) &= \Pi(X_t^{-1}(A)) = P(\hat{B}_.^{-1}(X_t^{-1}(A))) \\ &= P(\{\omega|\hat{B}_.(\omega) \in X_t^{-1}(A)\}) \\ &= P(\{\omega|X_t(\hat{B}_.(\omega)) \in A\}) \\ &= P(\{\omega|\hat{B}_t(\omega) \in A\})\end{aligned}$$

Or $\hat{B}$ est un mouvement brownien sous P.

Cet argument se généralise aisément pour montrer que $X(\omega_0)$ est un mouvement brownien sous Π (en réalité, on peut montrer que les processus X et $\hat{B}$ sont équivalents, c.à. d. ils ont les mêmes distributions fini-dimensionnelles.)

2) *unicité:* Si Π et Π' sont deux mesures sur $(\Omega_0, \mathcal{G}_\infty)$ telles que X soit un mouvement brownien, alors, pour tout ensemble J fini dans $I\!R^+$, Π et Π' concident sur $\mathcal{G}_J := \sigma(X_t, t \in J)$. En effet, du caractère brownien de X, on déduit que le vecteur aléatoire $(X_t, t \in J)$ est gaussien centré et $cov(X_t, X_t') = t \wedge t'$. La loi de $(X_t, t \in J)$ est donc entièrement déterminée et est identique sous Π et Π'.

En d'autres termes $\mathcal{G}_J \subset \mathcal{U} := \{A \in \mathcal{G}_\infty | \Pi(A) = \Pi'(A)\}$. Partant $\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J \subset \mathcal{U}$.

Or $\mathcal{U}$ se révèle être une classe monotone suite la σ-additivité de Π et Π'. Il résulte donc du théorème des classes monotones que $\sigma(\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J) \subset \mathcal{U}$. Or $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\cup_{J \text{ fini}} \mathcal{G}_J)$. Par la définition de $\mathcal{U}$, on en déduit que Π et Π' concident sur $\mathcal{G}_\infty$. ■

2.2 Quelques propriétés du mouvement brownien

Théorème 2.12 *Si B est un mouvement brownien, alors :*

1. *(autosimilarité) $\forall c > 0$ $X_t = c^{-1} B_{c^2 t}$ est un mouvement brownien.*
2. *$Y_t = t B_{t^{-1}}$ est un mouvement brownien, $Y_0 = 0$.*
3. *$\forall\ \delta > 0$ $Z_t = B_{t+\delta} - B_\delta$ est un mouvement brownien.*

Preuve:

1. Les trajectoires X_t sont continues, car celles de B_t le sont. De plus $X_0 = c^{-1} B_0 = 0$. Observons que
$X_{t+s} - X_t = c^{-1}(B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t})$=$c^{-1}(B_{t'+s'} - B_{t'})$ avec $t' = c^2 t$ et $s' = c^2 s$ donc $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(B_\mu, \mu \le t') = \sigma(B_\mu, \mu \le c^2 t) = \sigma(X_v, v \le t)$ donc $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(X_v, v \le t)$. Puisque $B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t} \sim \mathcal{N}(0, c^2 s)$, il est clair que $X_{t+s} - X_t = c^{-1}(B_{c^2(t+s)} - B_{c^2 t}) \sim \mathcal{N}(0, s)$. Ainsi X_t est un mouvement brownien.

2. Y est clairement un processus gaussien centré (voir exercice 2.10): Pour tout J fini $\subset]0,\infty[$, le vecteur aléatoire $(Y_t, t \in J)$ est l'image du vecteur gaussien centré $(B_t, t \in J)$ par une application linéaire. De plus $cov(Y_t, Y_s) = ts \cdot cov(B_{\frac{1}{t}}, B_{\frac{1}{s}}) = ts(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}) = s \wedge t$. Ainsi, pour tout J fini $\subset]0,\infty[$, les vecteurs aléatoires $(Y_t, t \in J)$ et $(B_t, t \in J)$ ont même loi, puisqu'ils sont des vecteur gaussiens centrés de même matrice de covariance. Pour pouvoir appliquer l'exercice 2.10 et conclure que Y est un mouvement brownien, il nous suffit de montrer que les trajectoires de Y sont continues. Par continuité de celles de B, les trajectoires de Y sont clairement continues pour $t > 0$ et il nous suffit de montrer que $P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\}) = 1$. Puisque $t \in]0,\infty[\to Y_t(\omega)$ est une fonction continue, nous avons

$$\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\} = \{\omega | \lim_{q\searrow 0, q\in \mathbb{Q}} Y_t(\omega) = 0\}$$

Si $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles finis dont l'union est $\mathbb{Q}_+$, l'ensemble $\{\omega | \lim_{q\searrow 0, q\in\mathbb{Q}} Y_t(\omega) = 0\}$ est égal

$$\{\omega | \forall k \in \mathbb{N}\colon \exists M \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon \forall q \in J_n \cap]0, 1/M]\colon |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}.$$

Par monotonie des suites d'ensembles considérées, la probabilité $P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\})$ peut s'écrire comme

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M]; |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}).$$

Puisque $(Y_t, t \in \forall q \in J_n \cap]0, 1/M])$ a la même loi que $(B_t, t \in \forall q \in J_n \cap]0, 1/M])$, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} &P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M\} \, |Y_q(\omega)| \leq 1/k\}) \\ &= P(\{\omega | \forall q \in J_n \cap]0, 1/M\} \, |B_q(\omega)| \leq 1/k\}), \end{aligned}$$

et donc

$$P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} Y_t(\omega) = 0\}) = P(\{\omega | \lim_{t\searrow 0} B_t(\omega) = 0\}) = 1.$$

3. Les Z_t ont leurs trajectoires continues et $Z_0 = B_\delta - B_\delta = 0$
$Z_{t+s} - Z_t = B_{t+s+\delta} - B_\delta + B_{t+\delta} - B_\delta = B_{t+\delta+s} - B_{t+\delta}$ ceci est indépendant de $\sigma(B_\mu, \mu \leq t + \delta) \supset \sigma(Z_v, v \leq t)$.
Enfin, $Z_{t+s} - Z_t = B_{t+\delta+s} - B_{t+\delta} \sim \mathcal{N}(0, s)$ Donc Z_t est un mouvement brownien. ■

Théorème 2.13 *(Loi du tout ou du rien)*
Si B est un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, alors

$$\forall A \in \mathcal{F}_{0^+} : P(A) \in \{0, 1\}.$$

Preuve: Soit $0 < \epsilon < \delta$. Posons $\mathcal{F}_{\epsilon,\delta} = \sigma(B_t - B_\epsilon, \epsilon \leq t \leq \delta)$. Puisque $\forall t \in [0, \delta]$:

$$B_t = \lim_{\epsilon \searrow 0} (B_t - B_\epsilon)$$

il suit que B_t, $0 \leq t \leq \delta$ est $\sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta})$-mesurable. Ainsi

$$\mathcal{F}_\delta \subset \sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}) \text{ donc } \mathcal{F}_\delta = \sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}).$$

Si $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, alors $\forall \epsilon > 0$, $A \in \mathcal{F}_\epsilon$ qui est indépendant de $\mathcal{F}_{\epsilon,\delta}$, donc, en utilisant l'exercice 1.20, Ch.1, A est indépendant de $\sigma(\cup_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,\delta}) = \mathcal{F}_\delta \ni A^c$. Ainsi A est indépendant de A^c, et donc $P(A)P(A^c) = P(A \cap A^c) = 0$, d'où $P(A)(1 - P(A)) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
■

Corollaire 2.14 *Si B est un mouvement brownien, alors*

$$P(\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0) = 1.$$

Preuve: Soit $A_\epsilon = \{\sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0\}$. On a alors:

$$A = \{\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0\} = \cap_n A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{F}_{0^+}$$

donc, d'après le théorème précédent $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
Or $P(A) = \lim P(A_{\frac{1}{n}}) \geq \lim P(B_{\frac{1}{n}} > 0) = \frac{1}{2}$ donc $P(A) = 1$. ■

Remarque 2.15 *Puisque $-B$ est également un mouvement brownien, on montre aussi: $P(\forall \epsilon > 0, \inf_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t < 0) = 1$, et donc*

$$P(\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t > 0 \text{ et } \inf_{0 \leq t \leq \epsilon} B_t < 0) = 1.$$

Ainsi, avant de quitter 0, la trajectoire générique d'un mouvement brownien oscille une infinité de fois entre les valeurs positives et négatives, comme le fait par exemple la fonction $t \to t \sin(1/t)$. Entre deux telles oscillations, le brownien s'annule, par continuité et donc $P(\{\omega | \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} : t_n \searrow 0 \text{ et } B_{t_n}(\omega) = 0\}) = 1$.

Corollaire 2.16 $P(\sup_{t \geq 0} B_t = \infty) = 1$.

Preuve: Soient $c > 0$ et $\delta > 0$, alors

$$\begin{aligned}
P(\sup_{t \geq 0} B_t \geq c) &= P(\sup_{t \geq 0} \frac{\delta}{c} B_t \geq \delta) \\
&= P(\sup_{t \geq 0} \frac{\delta}{c} B_{\frac{\delta}{c} t} \geq \delta) \\
&= P(\sup_{t \geq 0} X_t \geq \delta),
\end{aligned}$$

où X est un mouvement brownien, comme il résulte du Théorème 2.12(la propriété d'autosimilarité). En prenant la limite de la dernière ligne lorsque $\delta \searrow 0$, on obtient $P(\sup_{t\geq 0} X_t > 0)$ qui vaut 1 par le corollaire précédent. Ainsi $\forall c > 0$, $P(\sup_{t\geq 0} B_t \geq c) = 1$, ce qui nous permet de conclure $P(\sup_{t\geq 0} B_t = \infty) = 1$. ■

Remarque 2.17 *Puisque la trajectoire générique du mouvement brownien est continue, le corollaire précédent indique en fait que* $\limsup_{t\nearrow\infty} B_t = \infty$. *Par symétrie, nous avons aussi* $\liminf_{t\nearrow\infty} B_t = -\infty$, *et donc le mouvement brownien (de dimension 1) passe une infinité de fois par n'importe quelle valeur de* $I\!R$: *ceci s'exprime en disant que le mouvement brownien est un processus récurrent.*

Quelques processus liés au mouvement brownien

- Le pont brownien: Considérons le processus

$$X_t = B_t - tB_1$$

avec $t \in [0,1]$.

Exercice 2.18 (IL SERA FAIT EN TD) *Montrer qu'll s'agit d'un processus gaussian centré de covariance*

$$E(X_t X_s) = \min(s,t) - st.$$

- le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui est un processus gaussien centré de covariance

$$E(X_t X_s) = e^{-\beta|t-s|}$$

où $\beta > 0$.

- le mouvement brownien géométrique, proposé par Black, Scholes et Merton pour modeliser les actifs financiers:

$$X_t = e^{\sigma B_t + \mu t}$$

avec $t \geq 0$, $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

- le mouvement brownien fractionnaire: il s'agit d'un processus gaussien centré B^H de covariance

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

où $H \in (0,1)$ est l'indice de Hurst.

Exercice 2.19 (IL SERA FAIT EN TD) *Montrer que si* $H = \frac{1}{2}$ *on retrouve le mouvement brownien. Montrer que* B^H *est* H *-autosimilaire, c.à.d pour tout* $c > 0$, $c^{-H}B_{ct}, t \geq 0$ *est un mouvement brownien fractionnaire; Montrer que les trajectoires* B^H *sont p.s. contunues (ces trajectories sont même Hölderiennes d'ordre* $\delta < H$*).*

2.3 Variation quadratique:

Soit B un mouvement brownien et soit $s > t$. Pour un découpage (partition) fini Δ de l'intervalle $[t, s]$ (i.e. $\Delta = \{t = t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n = s\}$), nous posons: $|\Delta|=\max_{i=1}^{i=n-1}(t_{i+1}-t_i)$. Enfin notons $T^{\Delta}_{s,t}$ la variable aléatoire $T^{\Delta}_{s,t} = \sum_{i=1}^{i=n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$.

Théorème 2.20 *Si $\{\Delta^n\}_{n\in N}$ est une suite de partitions de [s,t] telle que $|\Delta^n| \to 0$ quand $n \to \infty$, alors*

$$T^{\Delta^n}_{s,t} \to s - t$$

dans L^2.

Preuve: Calculons $E[T^{\Delta^n}_{s,t}]$: puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$, $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ peut s'écrire $\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_i$ avec $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ainsi:

$$E[T^{\Delta^n}_{s,t}] = \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)E[Z_i^2] = \sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = t_n - t_1 = s - t.$$

$$\begin{aligned}
var[T^{\Delta^n}_{s,t}] &= \sum_{i=1}^{i=n-1} var[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{i=1}^{i=n-1} var[(t_{i+1} - t_i)Z_i^2] \\
&= \sum_{i=1}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 var(Z_i^2) \\
&\leq \sum_{i=1}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)|\Delta^n| var(Z^2) \\
&= (s - t)var(Z^2)|\Delta^n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Or

$$var[T^{\Delta^n}_{s,t}] = E[(T^{\Delta^n}_{s,t} - (s - t))^2] = \|T^{\Delta^n}_{s,t} - (s - t)\|^2_{L^2}$$

d'où $T^{\Delta^n}_{s,t} \to s - t$ dans L^2 ■

Si $f : [0, \infty[\to I\!R$, on défini

$$V_{t,s}(f) := \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

où Δ parcourt la classe des découpages finis de $[t, s]$. $V_{t,s}(f)$ s'appelle la variation de f sur l'intervalle $[t, s]$.

Remarque 2.21 *Rappelons le théorème suivant qui caractérise la classe des fonctions variation bornée:* $V_{t,s}(f) < \infty$ *si et seulement si il existe deux fonctions croissantes* g *et* $h : [s,t] \to \mathbb{R}$ *telles que* $f = g - h$.

Corollaire 2.22 *Si* B *est un mouvement brownien sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *il existe un sous ensemble* Ω' *de* Ω *de probabilité* $P(\Omega') = 1$ *tel que* $\forall \omega \in \Omega' : \forall s > t \geq 0 : V_{t,s}(B_\cdot(\omega)) = \infty$.

Preuve: Pour toute paire de nombres rationnels $p < q$, choisissons une suite $\Delta^n_{p,q}$ de découpages de $[p,q]$ telle que $|\Delta^n_{p,q}| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème 2.20, $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}$ converge au sens L^2 vers $p - q$. Par selection d'une sous-suite, nous pouvons supposer la convergence P-pp. Ainsi, il existe un ensemble $\Omega_{p,q} \subset \Omega$ de probabilité $P(\Omega_{p,q}) = 1$ sur lequel $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}$ converge ponctuellement vers $p - q$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de paires de rationnels, l'ensemble $\Omega' := \cap_{(p,q)\in \mathbb{Q}^2_+} \Omega_{p,q}$ a une probabilité $P(\Omega') = 1$.

Soit $\omega \in \Omega'$. Soit $s > t$ et choisissons une paire de rationnels $p < q$ dans $[t,s]$. Puisque $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}(\omega)$ converge vers $q - p > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N$, $T^{\Delta^n_{p,q}}_{p,q}(\omega) > (q-p)/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(q-p)/2 &< \sum_{i=1}^{n-1} (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot V_{p,q}(B_\cdot(\omega)) \\
&\leq \left(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|\right) \cdot V_{s,t}(B_\cdot(\omega))
\end{aligned}$$

Puisque $|\Delta^n_{p,q}|$ tend vers 0 et que la trajectoire $B_\cdot(\omega)$ est uniformément continue sur $[s,t]$, $(\max_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|)$ tend vers 0 avec n. Ceci n'est possible que si $V_{s,t}(B_\cdot(\omega)) = \infty$. ■

Le corollaire précédent implique en particulier que la trajectoire générique du mouvement brownien n'est croissante ou décroissante sur aucun intervalle!

Corollaire 2.23 *Si* B *est un mouvement brownien sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *il existe un sous ensemble* Ω' *de* Ω *de probabilité* $P(\Omega') = 1$ *tel que* $\forall \omega \in \Omega'$, *la trajectoire* $B_\cdot(\omega)$ *n'est höldérienne d'ordre* $\alpha > 1/2$ *sur aucun intervalle.*

Preuve: Reprenons l'ensemble Ω' construit dans la démonstration précédente. Soit $\omega \in \Omega'$, et supposons la trajectoire $B_\cdot(\omega)$ höldérienne d'ordre $\alpha > 1/2$ sur l'intervalle $[t,s]$:

$$\exists K < \infty : \forall t_1, t_2 \in [t,s] : |B_{t_1}(\omega) - B_{t_2}(\omega)| \leq K|t_1 - t_2|^\alpha$$

Si p, q sont des rationnels tels que $t < p < q < s$, alors

$$\begin{aligned}
T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) &= \sum_{i=1}^{n-1}(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega))^2 \\
&\leq K^2 \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|^{2\alpha} \\
&\leq K^2 |\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} \sum_{i=1}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| \\
&= K^2 |\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1}(p - q)
\end{aligned}$$

Puisque $T_{p,q}^{\Delta_{p,q}^n}(\omega) \to q - p > 0$ et $|\Delta_{p,q}^n|^{2\alpha-1} \to 0$ ($\alpha > 1/2$), les dernières inégalités ne sont possibles que si $K = \infty$. ■

Remarque 2.24 *(facultatif) Montrez que, avec probabilité 1, les trajectoires du mouvement brownien ne sont höldériennes d'ordre 1/2 sur aucun intervalle.(*

Plus généralement, on peut définir la variation d'ordre $p > 0$ d'un processus stochastique X comme la limite (en probabilité) de

$$T_t^{\Delta,p}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p$$

où la partition Δ est comme avant.

Exercice 2.25 (IL SERA FAIT EN TD) *Soit X un processus contunuu et adapté. Montrer que si*

$$\lim_{|\Delta|\to 0} T_t^{\Delta,p}(X) = L_t$$

en probabilité, où L_t est une v.a. à valeurs dans $[0, \infty[$ alors

$$\forall q > p, \lim_{|\Delta|\to 0} T_t^{\Delta,q}(X) = 0$$

en probabilité et

$$\forall 0 < q < p, \lim_{|\Delta|\to 0} T_t^{\Delta,q}(X) = \infty$$

en probabilité sur l'ensemble $(L_t > 0)$.

En déduire que les trajectoires du brownien ne sont pas à variation bornée.

3 CHAPITRE 3: Théorie des martingales

3.1 Filtration et Temps d'Arrêt

Définition 3.1 *Soit τ une v.a , $\tau : \Omega \to \bar{I\!R}^+$. Alors τ est un temps d'arrêt sur $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, si $\forall t \in I\!R^+$ on a $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Exemple 3.2 *Soit X un processus à trajectoires continues à droite adapté à $\mathcal{F}_t$. Si O est un ouvert de $I\!R$, alors: $\tau_O = inf\{t \geq 0 | X_t \in O\}$ est un temps d'arrêt sur la filtration $\mathcal{F}_{t^+}$*

Preuve: Pour tout $a \geq 0$, en utilisant de caractéristion de inf (en fait plusieurs arguments s'enchainent dans le première ligne!)

$$\begin{aligned}
\{\tau_O \leq a\} &= \{\omega : \forall \; n \,\exists\, t \in \mathbf{Q}^+, t \leq a + \frac{1}{n}, X_t \in O\} \\
&= \cap_n \{\omega : \exists t \in \mathbf{Q}^+, t \leq a + \frac{1}{n}, X_t \in O\} \\
&= \cap_n \cup_{t \in \mathbf{Q} \cap [0, a+\frac{1}{n}]} \{\omega | X_t(\omega) \in O\}.
\end{aligned}$$

Or

$$\{\omega | X_t(\omega) \in O\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}}.$$

Mais

$$A_n := \cup_{t \in \mathbf{Q} \cap [0, a+\frac{1}{n}]} \{\omega | X_t(\omega \in O\} \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}}$$

et $\forall n \geq m : A_n \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}}$ d'où $\{\tau_O \leq a\} = \cap_{n \geq m} A_n \in \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}}$. En conséquence on obtient que

$$\{\tau_O \leq a\} \in \cap_m \mathcal{F}_{a+\frac{1}{m}} = \mathcal{F}_{a^+}.$$

Ceci étant vrai pour tout a, nous avons montré que τ_O est un $\mathcal{F}_{t^+}$ temps d'arrêt. ∎

Exemple 3.3 *(facultatif) Si X est un processus continu, $\mathcal{F}_t$ adapté, si A est un ensemble fermé de $I\!R$, alors: $\tau_A(\omega) := \inf\{t | X_t(\omega) \in A\}$, avec la convention $\inf \emptyset := \infty$, est un temps d'arrêt sur $\mathcal{F}_t$.*

Preuve: Puisque A est fermé et X est continu, on a:

$$\{\omega | \tau_A(\omega) \leq t\} = \{\omega \inf_{0 \leq q \leq t} d(X_q(\omega), A) = 0, q \in \mathbf{Q}^+\}.$$

Or $d(x, A)$ est une fonction continue en x, donc mesurable sur $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$. $d(X_{q_n}(\omega), A)$ est alors $\mathcal{F}_t$-mesurable, par composition de fonctions mesurables et il s'ensuit que: $g := inf_{0 \leq q \leq t}\{d(X_q(\omega), A), q \in \mathbf{Q}^+\}$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable, comme infimum d'un nombre dénombrable de fonctions mesurables. Ainsi:

$$\{\tau_A \leq t\} = g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}_t.$$

τ_A est donc un temps d'arrêt. ∎

Remarque 3.4 *Si la filtration est continue à droite, alors évidemment τ_O est τ_A sont des $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt.*

Exercice 3.5 *(***IL SERA FAIT EN TD***)Montrez pourquoi $\tau(\omega) := \inf\{t|X_t = max_{s\geq 0} X_s\}$ n'est pas en général un temps d'arrêt sur la filtration naturelle de X.*

Définition 3.6 *Si τ est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt, on définit alors*

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0 \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Exercice 3.7 *Montrez que $\mathcal{F}_\tau$ est une σ-algèbre.*

Preuve: On a: $\emptyset \cap \{\tau \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$.

Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$. Montrons que $A^c \in \mathcal{F}_\tau$: En effet:

$$A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap (A \cap \{\tau \leq t\})^c \in \mathcal{F}_t$$

car $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_\tau$, alors $\forall n$ et $\forall t$ on a:

$$A_n \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \cup_n (A_n \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

donc

$$(\cup_n A_n) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et donc

$$\cup_n A_n \in \mathcal{F}_\tau.$$

Donc $\mathcal{F}_\tau$ est une σ-algèbre. ■

Théorème 3.8 *Si τ et τ' sont deux $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt et si $\forall \omega \ \tau(\omega) \leq \tau'(\omega)$, alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau'}$.*

Preuve: Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$ montrons que $A \in \mathcal{F}_{\tau'}$: Si $t \geq 0$, alors $\{\tau' \leq t\} \subset \{\tau \leq t\}$ donc

$$A \cap \{\tau' \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\}.$$

Puisque $A \in \mathcal{F}_\tau$, on a $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et, comme τ' est un temps d'arrêt, alors $\{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ d'où $A \cap \{\tau' \leq t\} = A \cap \{\tau' \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ donc $A \in \mathcal{F}_{\tau'}$. ■

Théorème 3.9 *Si τ et τ' sont deux $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt, alors: $\tau \vee \tau = max(\tau, \tau')$ et $\tau \wedge \tau = min(\tau, \tau')$ sont des temps d'arrêt.*

Preuve: Soit $t \geq 0$, alors

$$\{\tau \vee \tau' \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

car

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et $\{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_t$ est une σ-algèbre.
Donc $\tau \vee \tau = max(\tau, \tau')$ est un temps d'arrêt.

De même,

$$\{\tau \wedge \tau' \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Donc $\tau \wedge \tau'$ est un temps d'arrêt. ■

Exercice 3.10 *Montrez que τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.*

Preuve: Ceci revient à montrer que $\forall a \geq 0 : \{\omega | \tau(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}_\tau$.
Soit $t \geq 0$, alors:

$$\{\tau \leq a\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq a \wedge t\} \in \mathcal{F}_{a \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$$

Ceci étant vrai pour tout t, il suit que $\{\tau \leq a\} \in \mathcal{F}_\tau$ ■

Exercice 3.11 *(***IL SERA FAIT EN TD***) Montrer que si τ et τ' sont deux temps d'arrêt par rapport à une filtration continue à droite, alors $\tau + \tau'$ est un temps d'arrêt pour la même filtration.*

Idée de la preuve: Utiliser la décomposition, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\{\tau + \tau' > t\} &= \{\tau = 0, \tau' > t\} \bigcup \{0 < \tau < t, \tau + \tau' > t\} \\ &\quad \bigcup \{\tau > t, \tau' = 0\} \bigcup \{\tau \geq t, \tau' > 0\}.\end{aligned}$$

Le premier, troisième et quatrième terme sont evidemment dans $\mathcal{F}_t$. Pour le deuxème, l'écrire comme

$$\bigcup_{r \in Q^+, 0 < r < t} \{t > \tau > r, \tau' > t - r\}.$$

■

Exercice 3.12 *(***IL SERA FAIT EN TD***) Si $(\tau_n)_{n \geq 1}$ est une suite de temps d' arrêt pour une filtration continue à droite, alors*

$$\sup_{n \geq 1} \tau_n, \inf_{n \geq 1} \tau_n, \overline{\lim_{n \geq 1}} \tau_n, \underline{\lim_{n \geq 1}} \tau_n$$

sont des temps d'arrêt.

Preuve: Utiliser les indentités

$$\{\sup_n \tau_n \leq t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leq t\}, \{\inf_n \tau_n \geq t\} = \bigcup_n \{\tau_n \geq t\}.$$

■

Processus progressivement mesurables

Soit X un processus adapté à une filtration $\mathcal{F}_t$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et τ un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt.

Remarque 3.13 *On note X_τ l'application $\omega \to X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$. Le fait que X soit adapté ne suffit en fait pas pour que X_τ soit une v.a. $\mathcal{F}$ mesurable. L'objet de ce paragraphe est d'introduire une condition suffisante sur X pour que X_τ soit mesurable.*

Définition 3.14 *Un processus X est progressivement mesurable si $\forall\, T \geq 0$*

$$X : (\Omega \times [0, T]) \to I\!\!R$$

est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable.

Remarque 3.15 *Il est clair qu'un processus X progressivement mesurable sur $\mathcal{F}_t$ est en particulier adapté à $\mathcal{F}_t$.*

Théorème 3.16 *Si X est $\mathcal{F}_t$ progressivement mesurable, si τ est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt, alors X_τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.*

Preuve: Il suffit de montrer que si $A \in \mathcal{B}_{I\!\!R}$, alors $X_\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}_\tau$ autrement dit, pour tout $t \geq 0$ fixé, $X_\tau^{-1}(A) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Or

$$\begin{aligned} X_\tau^{-1}(A) \cap \{\tau \leq t\} &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t \text{ et } X_\tau(\omega) \in A\} \\ &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t \text{ et } X_{\tau \wedge t}(\omega) \in A\} \\ &= \{\omega | \tau(\omega) \leq t\} \cap X_{\tau \wedge t}^{-1}(A). \end{aligned}$$

Si τ est un temps d'arrêt, alors $\tau \wedge t$ est un temps d'arrêt plus petit que t et puisque $\tau \wedge t$ est $\mathcal{F}_{\tau \wedge t}$ mesurable, il est $\mathcal{F}_t$ mesurable. Posons

$$g : (\Omega, \mathcal{F}_t) \longrightarrow (\Omega \times [0, t], \mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}) : \omega \longmapsto g(\omega) := (\omega, \tau \wedge t(\omega)).$$

Puisque les deux composantes de g, ω et $\tau \wedge t(\omega)$ sont mesurables respectivement de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{F}_t$ et de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{B}_{[0,t]}$, g est mesurable de $\mathcal{F}_t$ vers $\mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}$. Considérons X comme une fonction mesurable sur $\Omega \times [0,t]$:

$$X : (\Omega \times [0,t], \mathcal{F}_t \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]}) \to (I\!R, \mathcal{B}_{I\!R}) : (\omega, s) \longmapsto X(\omega, s).$$

alors $X_{\tau\wedge t}$ est la composée des fonctions mesurables X et g:

$$X_\tau \wedge t = X \circ g$$

et est donc mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ vers $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$. Ainsi, $\forall A \in \mathcal{B}_{I\!R} : X_{\tau\wedge t}^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t$. Puisque par ailleurs $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, on peut conclure que $X_\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}_\tau$. ■

Théorème 3.17 *Si X est un processus continu adapté à $\mathcal{F}_t$, alors il est progressivement mesurable.*

Preuve: Soit

$$X_t^n(\omega) := X_{\frac{k}{n}}(\omega) \text{ si } \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}.$$

On montre que X_t^n est progressivement mesurable.

Soit T fixé si $t \leq T$ alors

$$X_t^n(\omega) = \sum_{k=0}^{k\leq nT} \mathbf{1}_{\frac{k}{n}\leq t<\frac{k+1}{n}} X_{\frac{k}{n}}(\omega)$$

or $X_{\frac{k}{n}}$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\mathbf{1}_{\frac{k}{n}\leq t<\frac{k+1}{n}}$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable donc $X_{\frac{k}{n}} \mathbf{1}_{\frac{k}{n}\leq t<\frac{k+1}{n}}$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable, il s'ensuit que $\sum_{k=0}^{k\leq nT} \mathbf{1}_{\frac{k}{n}\leq t\leq\frac{k+1}{n}} X_{\frac{k}{n}}(\omega)$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable.

Par continuité de X on a: $\lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega) = X_t(\omega)$ et, comme X_t^n est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable, X l'est également. Autrement dit X est progressivement mesurable. ■

Exercice 3.18 *Si τ est un temps d'arrêt, si X est un processus continu adapté si $X_t^\tau(\omega) = X_{\tau\wedge t}(\omega)$. Montrez que $X_t^\tau(\omega)$ est progressivement mesurable.*

Exercice 3.19 *(facultatif) Si X est un processus continu, tel que $X_0 = 0$, et si $0 < a < b$ que peut on dire de $X_{\tau_{[a,b]}}(\omega)$ pour les ω tels que $\tau_{[a,b]}(\omega) < \infty$?*

Si X est un mouvement brownien, montez que $P(\tau_{[a,b]}(\omega) < \infty) = 1$.

Exercice 3.20 *(facultatif) Si X est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien, et $a > 0$, et $X_s^*(\omega) := \sup_{t\in[0,s]} X_t(\omega)$,*

a) montrez que X_1^* est $\mathcal{F}_1$-mesurable.

b) montrez que $\{\tau_{\{a\}} \leq s\} = \{X_s^* \geq a\}$.

c) montrez que X_s^* à la même loi que $\sqrt{s}X_1^*$ et que $\tau_{\{a\}}$ a la même loi que $a^2/(X_1^*)^2$.

d) montrez que $\tau_1 := \inf\{t|X_t = X_1^*\}$ et $\tau_2 := \sup\{t \leq 1|X_t = 0\}$ ne sont pas des temps d'arrêt.

3.2 Martingales: Définitions et propriétés:

Définition 3.21 *Une martingale sur une filtration $\mathcal{F}_t$ $t \in T$ (T discret ou continu) est un processus adapté tel que:*

1. $\forall t \in T$, $X_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$
2. $\forall t, s \in T$, $t \geq s$ $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *ps.*

Exemple 3.22 *Si $Y \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_\infty)$ on pose $X_t = E(Y|\mathcal{F}_t)$ alors X_t est une martingale.*

Preuve: En effet, si $s > t$, on a $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ donc:

$$E(X_s|\mathcal{F}_t) = E[E(Y|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t] = E(Y|\mathcal{F}_t) = X_t$$

■

Définition 3.23 *Une sous-martingale (respectivement sur-martingale) sur une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$(T continu ou discret) est un processus X adapté à $\mathcal{F}_t$ telque:*

1. $\forall t \in T$ $X_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$
2. $\forall t, s \in T$ $t > s$ $E[X_t|F_s] \geq X_s$ *(respect.* $E[X_s|F_t] \leq X_t$*).*

Exemple 3.24 *Si B_t est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien alors :*

1. *B_t est une martingale .*
2. *$X_t = {B_t}^2 - t$ est aussi une martingale.*
3. *Si $\alpha \in I\!R$ alors $M_t^\alpha = exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)$ est aussi une martingale.*

Preuve:

1. On sait que $B_t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$ on a:

$$E(B_s|\mathcal{F}_t) = E[B_t + (B_s - B_t)|\mathcal{F}_t] = B_t + E(B_s - B_t)$$

car $B_s - B_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ et comme $B_s - B_t$ suit une loi normale de moyenne nulle alors $E(B_s|\mathcal{F}_t)$=B_t. Donc B_t est une martingale.

2. On sait que $X_t = {B_t}^2 - t \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$

$$\begin{aligned} E(X_s|\mathcal{F}_t) &= E({B_s}^2|\mathcal{F}_t) - s \\ &= E[(B_t + (B_s - B_t))^2|\mathcal{F}_t] - s \\ &= E[B_t^2|\mathcal{F}_t] + E[(B_s - B_t)^2|\mathcal{F}_t] + 2E[B_t(B_s - B_t)|\mathcal{F}_t] - s \\ &= B_t^2 + E[(B_s - B_t)^2] + 2B_tE[B_s - B_t] - s \\ &= B_t^2 + s - t + 0 - s = B_t^2 - t = X_t. \end{aligned}$$

Donc X_t est une martingale.

3. Il est évident que $M_t^\alpha \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ et si $s > t$ on a:

$$
\begin{aligned}
E(M_s^\alpha|\mathcal{F}_t) &= E[\exp(\alpha B_t)|\mathcal{F}_t]\exp(\frac{-\alpha^2}{2}s) \\
&= E[\exp(\alpha[B_t + (B_s - B_t)])|\mathcal{F}_t]\exp(\frac{-\alpha^2}{2}s) \\
&= E[\exp(\alpha(B_s - B_t))|\mathcal{F}_t]\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= E[\exp(\alpha\sqrt{s-t}Z)]\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= \psi_Z(-\alpha\sqrt{s-t})\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= \exp(\frac{-(\alpha\sqrt{s-t})^2}{2})\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= \exp(\frac{\alpha^2(s-t)}{2})\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}s) \\
&= \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t) = M_t^\alpha
\end{aligned}
$$

oú par ψ on a noté la fonction caractéristique. Donc M_t^α est une martingale. ■

Exemple 3.25 *(le processus de Poisson)* Un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ *est un processus adapté, cadlag* $(N_t)_{t\geq 0}$ *tel que* $N_0 = 0$ *p.s. et pour tout* $0 \leq s \leq t$, $N_t - N_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *est suit la loi de Poisson d'espérance* $\lambda(t-s)$. Le processus de Poisson compensé *est donné par, pour tout* $t \geq 0$

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

Montrer que $\tilde{N}$ *est une martingale.*

Théorème 3.26 *1. Si X est une martingale et* ϕ *une fonction convexe continue telle que* $\forall t$, $\phi(X_t) \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ *alors* $\phi(X_t)$ *est une sous- martingale.*

2. Si X est une sous-martingale et si ϕ *est une fonction convexe continue croissante telle que* $\forall t$, $\phi(X_t) \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_t)$ *alors* $\phi(X_t)$ *est une sous-martingale.*

Preuve:

1. D'après l'inégalité de Jensen on a pour $s > t$ $E[\phi(X_s)|\mathcal{F}_t] \geq \phi[E(X_s|\mathcal{F}_t)] = \phi(X_t)$.

2. Si $s > t$ $E[\phi(X_s)|\mathcal{F}_t] \geq \phi[E(X_s|\mathcal{F}_t)] \geq \phi(X_t)$ car X est une sous martingale et ϕ est croissante. ■

Exemple 3.27 *Si X_t est une martingale alors $Y_t = |X_t|^p$ est une sous- martingale $\forall p \geq 1$*

Preuve: En effet, la fonction $x \mapsto |x|^p$ est une fonction convexe continue. ■

Nous allons ensuite considérer les martingales discrètes.

Théorème 3.28 *Si H est un processus borné adapté à $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et X une $\mathcal{F}_n$ martingale, alors le processus Y défini par récurrence: $Y_0 = 0$ et $Y_{n+1} = Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)$ est une martingale.*

Preuve: Puisque X_n est une martingale et H_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a:

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= Y_n + H_n[E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n] \\ &= Y_n \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E[Y_{n+k}|\mathcal{F}_n] &= E[E(Y_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k-1})|\mathcal{F}_n] \\ &= E[Y_{n+k-1}|\mathcal{F}_n] \\ &= \cdots \\ &= E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= Y_n \end{aligned}$$

■

Remarque 3.29 *Si nous notons $\Delta(X_n)$ l'accroissement $(X_{n+1} - X_n)$ du processus X, Y_n peut formellement s'écrire: $Y_n = Y_0 + \sum_{t=0}^{n-1} H_t\Delta(X_t)$. C'est une version en temps discrèt de l'intégrale $Y_t = Y_0 + \int_t H_t dB_t$ que nous introduirons dans le chapitre suivant.*

Théorème 3.30 *Si H est un processus borné adapté à $\mathcal{F}_n$ positif et X une $\mathcal{F}_n$ sous-martingale, alors le processus Y défini par récurrence $Y_0 = 0$ et $Y_{n+1} = Y_n + H_n(X_{n+1} - X_n)$ est une sous-martingale.*

Exercice 3.31 *Démontrer ce résultat en suivant la preuve du théorème précédent.*

Théorème 3.32 *(théorème d'arrêt): Si X_n est une $\mathcal{F}_n$-martingale, si $\tau \leq \sigma$ sont 2 temps d'arrêts bornés alors $E(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau)=X_\tau$.*

Preuve: Supposons que σest borné par $M > 0$: $|\sigma(\omega)| \leq M$. Il suffit de montrer que

$$E\left(X_\tau - X_\sigma\right) 1_B = 0$$

si $B \in \mathcal{F}_\tau$. Posons

$$H_n = \mathbf{1}_{\{\tau\leq n<\sigma\}}\mathbf{1}_B$$

alors H_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable car $B \cap \{\tau \leq n < \sigma\} = B \cap \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$.

Soit
$$Y_M = 0 + \sum_{n=0}^{n=M-1} H_n(X_{n+1} - X_n).$$

On va prouver que
$$Y_M = 1_B(X_\tau - X_\sigma).$$

Alors
$$Y_M = -H_0 X_0 + (H_0 - H_1)X_1 + (H_1 - H_2)X_2 + \cdots + H_{M-1}X_M.$$

Posons $H_n^\sigma = \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{n<\sigma\}}$ et $H_n^\tau = \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{n<\tau\}}$ de sorte que $H_n = H_n^\sigma - H_n^\tau$. Ainsi, on peut écrire:

$$\begin{aligned} Y_M &= (\mathbf{1}_B - H_0^\sigma)X_0 + (H_0^\sigma - H_1^\sigma)X_1 + \cdots + H_{M-1}^\sigma X_M \\ &\quad -(\mathbf{1}_B - H_0^\tau)X_0 - (H_0^\tau - H_1^\tau)X_1 - \cdots - H_{M-1}^\tau X_M. \end{aligned}$$

Or
$$(H_n^\sigma - H_{n+1}^\sigma) = \mathbf{1}_B(\mathbf{1}_{\{\sigma>n\}} - \mathbf{1}_{\{\sigma>n+1\}}) = \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{n+1\geq\sigma>n\}} = \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{\sigma=n+1\}}.$$

On montre aussi que $\mathbf{1}_B - H_0^\sigma = \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_{\{\sigma>0\}}) = \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{\sigma=0\}}$. Ainsi:

$$Y_M = (\sum_{n=0}^{n=M} X_n \mathbf{1}_{\{\sigma=n\}})\mathbf{1}_B - (\sum_{n=0}^{n=M} X_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}})\mathbf{1}_B = (X_\sigma - X_\tau)\mathbf{1}_B$$

et puisque Y_M est une martingale:

$$E(Y_M) = E[E(Y_M|\mathcal{F}_0)] = E(Y_0) = 0.$$

Donc $\forall B \in \mathcal{F}_\tau : E[\mathbf{1}_B(X_\sigma - X_\tau)] = 0$ et nous concluons: $E(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau) = X_\tau$. ■

Remarque 3.33 *On a le même théorème pour les sous-martingales.*

3.3 Inegalités de Doob et conséquences

Nous allons d'abord étudier le cas discrèt.

Théorème 3.34 *(Inégalité maximale)*

Si $\{X_n\}_{n=0,\ldots,N}$ est une $\mathcal{F}_n$ sous- martingale alors $\forall\ \lambda > 0$

$$\lambda \cdot P(\max(X_0, X_1, \ldots, X_N) \geq \lambda) \leq E[X_N \mathbf{1}_{\{\max(X_0,X_1,\ldots,X_N)\geq\lambda\}}]$$

Preuve: Posons $\tau_\lambda := \min\{n|X_n \geq \lambda\}$ avec $\min\emptyset := N$. Alors τ_λ est un temps d'arrêt (pourquoi?). Puisque X est une sous-martingale, il suit du théorème d'arrêt que $X_{\tau_\lambda} \leq E[X_N|F_{\tau_\lambda}]$. Donc

$$\begin{array}{rcl} E[X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}>\lambda\}}] & \leq & E[\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}E[X_N|F_{\tau_\lambda}]] \\ & = & E[X_N\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}] \end{array}$$

car $\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}$ est $\mathcal{F}_{\tau_\lambda}$ mesurable. Lorsque $\max\{X_n\} \geq \lambda$, on a par définition de τ_λ: $X_{\tau_\lambda} \geq \lambda$. Ainsi, $X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}} \geq \lambda\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}$ et donc

$$\lambda P(\max\{X_n\} > \lambda) \leq E[X_{\tau_\lambda}\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}] \leq E[X_N\mathbf{1}_{\{\max\{X_n\}\geq\lambda\}}]$$

■

Corollaire 3.35 *Si X_n est une martingale dans L^p pour $p \geq 1$ et $X^* := \max(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_N|)$, alors:*

$$\lambda^p P(X^* \geq \lambda) \leq E[|X_N|^p].$$

Preuve: Soit X_n une martingale alors $Y_n = |X_n|^p$ est une sous-martingale à laquelle nous pouvons appliquer le théorème précédent:

$$\lambda^p P(max(Y_1, \ldots, Y_N) \geq \lambda^p) \leq E[Y_N\mathbf{1}_{\{max(Y_1,\ldots,Y_N)\geq\lambda^p\}}] \leq E(Y_N).$$

Puisque $X^{*p} = max(Y_1, \ldots, Y_N)$ et $|X_N|^p = Y_N$, nous avons donc

$$\lambda^p P(X^* \geq \lambda) = \lambda^p P(X^{*p} \geq \lambda^p) \leq E[|X_N^p|].$$

■

Théorème 3.36 *(Inégalité de Doob): $\forall p > 1$, si $\{X_n\}_{n=1,\ldots,N}$ est une martingale dans L^p alors :*

$$E[|X_N|^p] \leq E[X^{*p}] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_N|^p]$$

avec $X^* := max(|X_1|, \ldots, |X_N|)$.

Preuve: On a $|X_N|^p \leq X^{*p}$ d'où $E[|X_N|^p] \leq E[X^{*p}]$. D'autre part d'après l'inégalité maximale on a: $E[|X_N|\mathbf{1}_{X^*>\lambda}] \geq \lambda E[\mathbf{1}_{X^*>\lambda}]$. En multipliant ceci par λ^{p-2} et en intégrant sur $[0, k]$, nous obtennons:

$$\int_0^k E[|X_N|\mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-2}]d\lambda \geq \int_0^k E[\mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-1}]d\lambda$$

Par le théorème de Fubini, on a:

$$\begin{array}{rcl} E[|X_N|\frac{(k\wedge X^*)^{p-1}}{p-1}] & = & E[|X_N|\int_0^k \mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-2}\, d\lambda] \\ & \geq & E[\int_0^k \mathbf{1}_{X^*>\lambda}\lambda^{p-1}d\lambda] \\ & = & E[\frac{(k\wedge X^*)^p}{p}] \end{array}$$

Enfin si q est le conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), on a avec l'inégalité de Hölder:

$$E[|X_N|(k\wedge X^*)^{p-1}] \leq (E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \cdot \left(E[(k\wedge X^*)^{(p-1)q}]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Puisque $(p-1)q=p$, nous avons donc

$$(E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \cdot (E[(k\wedge X^*)^p])^{\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{p-1}E[(k\wedge X^*)^p],$$

ce qui donne après simplification:

$$(E[|X_N|^p])^{\frac{1}{p}} \geq \frac{p}{p-1} \cdot (E[(k\wedge X^*)^p])^{\frac{1}{p}},$$

Comme $(k\wedge X^*)^p \nearrow (X^*)^p$ lorsque $k\to+\infty$ on obtient par le théorème de la convergence monotone:

$$E[(X^*)^p] = \lim_{k\to\infty} E[(k\wedge X^*)^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_N|^p]$$

■

Nous démonstrons ensuite les inégalités de Doob en temps continu. Soit une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Définition 3.37 *Nous noterons $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ l'ensembles des $\{\mathcal{F}_t\}$-martingales X à trajectoires continues telles que $\|X\|_{L^p}<\infty$, où*

$$\|X\|_{L^p} := \sup_{t>0}\|X_t\|_{L^p}.$$

Si $X\in\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, nous noterons $\|X\|_{M^p} := \|X^*_\infty\|_{L^p}$, où

$$X^*_t(\omega) := \sup\{|X_s(\omega)| : s\in[0,t]\}.$$

Exercice 3.38 *Montrez que, si $X\in\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, alors l'application $t\to\|X_t\|_{L^p}$ est croissante. En particulier $\|X\|_{L^p}=\lim_{t\to\infty}\|X_t\|_{L^p}$.*

Exercice 3.39 *Montrez que, si $X\in\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, alors X^*_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Exercice 3.40 *Montrez que $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ est un espace vectoriel réel et que $\|.\|_{L^p}$ est une seminorme sur $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$. Montrez que $\|X\|_{L^p}=0$ est equivalent à dire que X est une modification de 0: $X \overset{modif}{\equiv} 0$.*

Remarque 3.41 *(Rappel) Si X et Y sont des processus continus, alors $X \overset{modif}{\equiv} Y$ si et seulement si X et Y sont indistinguables.*

$(\mathcal{L}^p, \|.\|_{L^p})$ n'étant pas un espace normé, il nous a fallu considérer l'espace L^p des classes d'équivalence dans $\mathcal{L}^p$ pour la relation d'équivalence $= P - ps$. De la même façon, nous introduisons ici l'espace $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$ des classes d'équivalences dans $\mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ pour la relation $\overset{\text{modif}}{\equiv}$.

Exercice 3.42 *Montrez que $(M^p(\{\mathcal{F}_t\}), \|.\|_{L^p})$ est un espace vectoriel normé.*

Théorème 3.43 *(Inégalité de Doob en temps continu)): $\forall p > 1$, si $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$, alors*

$$\|X\|_{L^p} \leq \|X\|_{M^p} \leq \frac{p}{p-1}\|X\|_{L^p}.$$

En d'autres termes, $\|.\|_{L^p}$ et $\|.\|_{M^p}$ sont des normes équivalentes sur $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$.

Preuve: Soit $X \in \mathcal{M}^p(\{\mathcal{F}_t\})$ et soit $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles finis dont l'union est $\mathbb{Q}^+$. Soit $t_n := \max D_n$ et

$$X^*_{D_n}(\omega) := \max\{|X_t(\omega)| : t \in D_n\}.$$

Il est alors clair que $t_n \nearrow \infty$. Par ailleurs, puisque les trajectoires de X sont continues, $X^*_\infty = \sup\{|X_t| : t \in \mathbb{Q}^+\}$, et donc $X^*_{D_n} \nearrow X^*_\infty$. Le théorème 3.36 nous indique alors que

$$\|X_{t_n}\|_{L^p} \leq \|X^*_{D_n}\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|X_{t_n}\|_{L^p}.$$

Or, il suit de l'exercice 3.38 que $\|X\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|X_{t_n}\|_{L^p}$ et par convergence monotone: $\|X\|_{M^p} = \|X^*_\infty\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|X^*_{D_n}\|_{L^p}$. Le théorème est donc démontré. ■

Le corollaire suivant s'avère très important dans la construction à venir de l'intégrale d'Itô.

Corollaire 3.44 *Si $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration complète, alors pour tout $p > 1$, l'espace $(M^p(\{\mathcal{F}_t\}), \|.\|_{L^p})$ est un espace de Banach.*

Preuve: Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$ admet une limite X dans $M^p(\{\mathcal{F}_t\})$. Considérons une telle suite $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
1) Nous allons construire un processus X limite:

Par le théorème précédent, $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_{M^p}$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) : \forall m, n \geq N(\epsilon) : \|X^n - X^m\|^p_{M^p} \leq \epsilon$$

Fixons $n_1 := N(2^{-(p+1)})$, et par récurrence

$$n_{k+1} := \max(N(2^{-(p+1)(k+1)}), 1 + n_k).$$

La suite n_k est alors strictement croissante et, puisque $n_{k+1} > n_k \geq N(2^{-(p+1)(k)})$, la sous-suite $\{X^{n_k}\}_{k\in I\!N}$ vérifie

$$\forall k : \|X^{n_{k+1}} - X^{n_k}\|^p_{M^p} \leq 2^{-(p+1)(k)}.$$

Soit $A := \{\omega \in \Omega : \exists L : \forall k \geq L : \|X^{n_{k+1}}_\cdot(\omega) - X^{n_k}_\cdot(\omega)\|_\infty \leq 2^{-k}\}$ où, pour une fonction $f(.) : [0, \infty[\to I\!R$, $\|f(.)\|_\infty := \sup_{t\in[0,\infty[} |f(t)|$.

Remarquons que si $\omega \in A$, alors les trajectoires $X^{n_k}_\cdot(\omega)$ forment une suite de Cauchy dans l'espace $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$ des fonctions continues sur $[0, \infty[$. En effet, si $k' \geq k$,

$$\|X^{n_{k'}}_\cdot(\omega) - X^{n_k}_\cdot(\omega)\|_\infty \leq \sum_{j=k}^{k'-1} \|X^{n_{j+1}}_\cdot(\omega) - X^{n_j}_\cdot(\omega)\|_\infty \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

L'espace $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$ étant complet, la suite de trajectoires $X^{n_k}_\cdot(\omega)$ converge donc au sens de la norme $\|.\|_\infty$ vers une fonction continue $X_\cdot(\omega)$.

Convenons de définir $X_\cdot(\omega) := 0$ lorsque $\omega \notin A$. Le processus X ainsi construit a toutes ses trajectoires continues.

2) Montrons à présent que $P(A) = 1$:

En effet, si l'on pose $Y^k := X^{n_{k+1}} - X^{n_k}$,

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \forall L : \exists k \geq L : \|Y^k_\cdot(\omega)\|_\infty > 2^{-k}\} = \cap_L \cup_{k\geq L} A^k,$$

où $A^k := \{\omega \in \Omega : \|Y^k_\cdot(\omega)\|_\infty > 2^{-k}\}$. Ainsi, $\forall L$,

$$P(A^c) \leq P(\cup_{k\geq L} A^k) \leq \sum_{j=L}^{\infty} P(A^k).$$

Or $\|Y^k_\cdot(\omega)\|_\infty = Y^{k*}_\infty(\omega)$ où la notation Y^{k*} a été introduite à la définition 3.37. Il résulte de l'inégalité de Chebichev que $P(A^k)2^{-kp} \leq \|Y^{k*}_\infty\|^p_{L^p}$ et la définition de la sous suite X^{n_k} indique que $\|Y^{k*}_\infty\|^p_{L^p} = \|Y^k\|^p_{M^p} \leq 2^{-(p+1)k}$. Aussi $P(A^k) \leq 2^{-k}$ et donc

$$P(A^c) \leq \sum_{k=L}^{\infty} 2^{-k} \stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dès lors $P(A^c) = 0$.

3) Montrons que X est $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté: $P(A^c) = 0$ implique en effet $A^c \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0$ puisque $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration complète. Aussi le processus $\mathbf{1}_A(\omega)X^{n_k}_t(\omega)$ est-il $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté. Or nous avons montré que $\mathbf{1}_A(\omega)X^{n_k}_t(\omega)$ converge vers $X_t(\omega)$. La limite ponctuelle préservant la mesurabilité, X_t est donc bien $\mathcal{F}_t$-mesurable.

4) Montrons ensuite que X est une $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale: Puisque $\|X_t^n - X_t^m\|_{L^p} \leq \|X^n - X^m\|_{L^p}$, la suite des variables aléatoires X_t^n est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathcal{F}_t)$. Puisqu'il s'agit d'un espace complet, X_t^n est donc une suite convergente au sens L^p. Puisqu'une sous suite $X_t^{n_k}$ converge P-pp (sur A) vers X_t, nous avons montré que X_t^n converge vers X au sens L^p. Puisque l'espérance conditionnelle est un opérateur continu pour la norme L^p, nous avons si $s > t$:

$$E[X_s|\mathcal{F}_t] = E[\lim_{n\to\infty} X_s^n|\mathcal{F}_t] = \lim_{n\to\infty} E[X_s^n|\mathcal{F}_t] = \lim_{n\to\infty} X_t^n = X_t$$

5) Montrons finalement que X^n converge vers X au sens $\|.\|_{L^p}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe N tel que, si $m, n \geq N$, alors $\|X^n - X^m\|_{L^p} \leq \epsilon$. Il s'ensuit que, si $n \geq N$,

$$\|X_t - X_t^n\|_{L^p} = \lim_{m\to\infty} \|X_t^m - X_t^n\|_{L^p} \leq \lim_{m\to\infty} \|X^n - X^m\|_{L^p} \leq \epsilon.$$

Donc $\|X - X^n\|_{L^p} = \sup_{t\geq 0} \|X_t - X_t^n\|_{L^p} \leq \epsilon$. Ce qui précède étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, nous avons montré que $\lim_{n\to\infty} \|X - X^n\|_{L^p} = 0$. ■

Corollaire 3.45 *Si $X \in M^2(\{\mathcal{F}_t\})$, alors il existe une variable $X_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ telle que $X_t \xrightarrow{L^2} X_\infty$ et $X_t \xrightarrow{P\text{-}pp} X_\infty$ lorsque $t \to \infty$. En particulier, $\forall t : X_t = E[X_\infty|\mathcal{F}_t]$ et $\|X\|_{L^2} = \|X_\infty\|_{L^2}$.*

Preuve: On montre que, pour toute suite $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers ∞, la suite $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $L^2(\mathcal{F}_t)$ (remarquons que toutes ces suites ont alors une limite identique, sans quoi il existerait une suite sans limite!). L^2 étant complet, il suffit donc de montrer que $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Si $t_m \geq t_n$, X_{t_n} est la projection orthogonale de X_{t_m} sur $L^2(\mathcal{F}_{t_n})$, X étant une martingale. Nous avons dès lors l'identité de Pythagore:

$$\|X_{t_m} - X_{t_n}\|_{L^2}^2 = \|X_{t_m}\|_{L^2}^2 - \|X_{t_n}\|_{L^2}^2$$

La fonction $t \to \|X_t\|_{L^2}^2$ est croissante et converge vers $\|X\|_{L^2}^2$, aussi la suite $\{\|X_{t_n}\|_{L^2}^2\}$ est elle de Cauchy et il en est de même de $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$: $\|X_{t_m} - X_{t_n}\|_{L^2}^2 \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc il existe $X_\infty \in L^2$ qui est la limite de toutes les suites $\{X_{t_n}\}$. Il est clair que $X_t \to_{t\to\infty} X_\infty$ in L^2.

De la convergence L^2 de X_t vers la limite commune X_∞ de toutes les suites $\{X_{t_n}\}$, suit immédiatement que $\|X\|_{L^2} = \lim_{t\to\infty} \|X_t\|_{L^2} = \|X_\infty\|_{L^2}$ et, par continuité de l'opérateur $E[.|\mathcal{F}_t]$ par rapport à la norme L^2, il suit aussi que

$$E[X_\infty|\mathcal{F}_t] = \lim_{s\to\infty} E[X_s|\mathcal{F}_t] = X_t.$$

Il nous reste à démontrer la convergence P-pp de X_t vers X_∞. Considérons donc une suite $\{X_{t_n}\}$ convergeant dans L^2 vers X_∞. Quitte à en extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{X_{t_n}\}$ converge également P-pp. Appliquons à présent l'inégalité de Doob à la martingale $(Y_s^n)_{s\geq t_n}$, où $Y_s^n := X_s - X_{t_n}$:

$$\| \sup_{s\geq t_n} |Y_s^n| \|_{L^2} \leq 2\|Y^n\|_{L^2} = 2\|Y_\infty^n\|_{L^2} = 2\|X_\infty - X_{t_n}\|_{L^2}$$

Aussi, les variables $\sup_{s\geq t_n} |Y_s^n|$ tendent-elles vers 0 dans L^2, et par extraction de sous-suite, nous pouvons considérer qu'elles tendent vers 0 P-pp. Si $t \geq t_n$, nous avons:

$$|X_t - X_\infty| \leq |X_t - X_{t_n}| + |X_{t_n} - X_\infty| \leq \sup_{s\geq t_n} |Y_s^n| + |X_{t_n} - X_\infty|$$

Puisque les deux termes du membre de droite de cette inégalité tendent P-pp vers 0, nous avons comme annoncé la convergence P-pp de X_t vers X_∞. ■

Remarque 3.46 *On appelle la variable aléatoire X_∞ de l'énoncé précédent* le dernier élément de la martingale X.

3.4 Intégrabilité uniforme et théorèmes de convergence:

Définition 3.47 *Une famille $\mathcal{G} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est uniformément intégrable (on note U.I.) si*

$$\lim_{c\to\infty} \left(\sup_{X\in\mathcal{G}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] \right) = 0.$$

Nous donnerons quelques exemples de familles U.I.

Exercice 3.48 *Si $g \in \mathbf{L^1}$ montrer que la famille $\mathcal{G} := \{g\}$ est une famille U.I.*

Preuve: On a $|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}} \leq |g| \in \mathbf{L^1}$ et $\lim_{c\to\infty} |g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}} = 0$. Par le théorème de la convergence dominée on a donc:

$$\lim_{c\to\infty} E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] = 0.$$

$\mathcal{G}$ est donc une famille U.I. ■

Exercice 3.49 *Montrez que si $\mathcal{G}$ est U.I et si $g \in \mathbf{L^1}$ alors $\mathcal{G} \cup \{g\}$ est U.I. En particulier les familles finies de L^1 sont U.I.*

Preuve: On a:

$$\sup_{X\in\mathcal{G}\cup\{g\}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] \leq \sup_{X\in\mathcal{G}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] + E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}]$$

or $\{g\}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles uniformément intégrables donc les deux termes du membre de droite tendent vers 0 lorsque c tend vers ∞. Ainsi

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{G}\cup\{g\}} E[|X|\mathbf{1}_{\{|X|>c\}}] = 0$$

. ■

Exercice 3.50 *Montrez que si $\mathcal{G}$ est une partie bornée de $L^p(\mathcal{F})$ $(p > 1)$ alors $\mathcal{G}$ est U.I.*

Preuve: Soit $M < \infty$ tel que $\forall g \in \mathcal{G}$: $E[g^p] \leq M$. Par application de l'inégalité de Hölder, avec q tel que $1/p + 1/q = 1$, on a $\forall g \in \mathcal{G}$:

$$E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq (E[|g|^p])^{1/p}(E[\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}])^{1/q} \leq M^{1/p}(P(\{|g| > c\}))^{1/q}.$$

Par l'inégalité de Chebichev, on a également $P(\{|g| > c\})c^p \leq E[|g|^p] \leq M$. Aussi $E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq \frac{M^{1/p}M^{1/q}}{c^{p/q}} = \frac{M}{c^{p/q}}$.

On obtient

$$\sup_{g\in\mathcal{G}} E[|g|\mathbf{1}_{\{|g|>c\}}] \leq \frac{M}{c^{p/q}} \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Nous donnons une caractérisation de l'intégrabilité uniforme.

Théorème 3.51 *$\mathcal{G}$ est U.I si et seulement si $\mathcal{G}$ vérifie les deux propriétés suivantes:*

1. *$\mathcal{G}$ est bornée dans $\mathbf{L^1}$: $\exists M < \infty : \forall g \in \mathcal{G}, E[|g|] \leq M$.*
2. *$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0$ tel que, $\forall A \in \mathcal{F}$, si $P(A) < \delta$ alors $\forall g \in \mathcal{G}$ $E[|g|\mathbf{1}_A] \leq \epsilon$.*

Preuve: Supposons 1) et 2) vraies. Alors par Chebichev, $\forall f \in \mathcal{G} : M \geq cP(|f| > c)$. Soit $\epsilon > 0$ et considérons le δ correspondant de 2). Si $c > \frac{M}{\delta}$ alors $\forall f \in \mathcal{G} : P(|f| > c) < \frac{M}{c} < \delta$ donc d'après la propriété 2) on a: $E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \epsilon$. Ainsi $\sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \epsilon$. Nous avons donc montré que

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] = 0.$$

Inversement supposons $\mathcal{G}$ U.I alors $\exists c : \forall f \in \mathcal{G}$:

$$\sup_{f\in\mathcal{G}} E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq 1.$$

Or

$$E[|f|] = E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] + E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|\leq c\}}] \leq 1 + c.$$

Ainsi 1) est vraie, avec $M = 1 + c$.

Soit $\epsilon > 0$ alors $\exists c$ tel que $\forall f \in \mathcal{G} : E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] \leq \frac{\epsilon}{2}$. Posons $\delta := \frac{\epsilon}{2c}$ et soit $A \in \mathcal{F}$ telque $P(A) \leq \delta$. Alors:

$$E[|f|\mathbf{1}_A] \leq E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|>c\}}] + E[|f|\mathbf{1}_{\{|f|\leq c\}\cap A}] \leq \frac{\epsilon}{2} + c \cdot P(A) \leq \epsilon.$$

La propriété 2) est donc aussi vérifiée. ■

Théorème 3.52 *Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a de $\mathbf{L^1}(\mathcal{F})$ telle que $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-pp. Alors, la suite X_n converge vers X au sens $\mathbf{L^1}$,si et seulement si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soit U.I*

Preuve: Si $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ dans $\mathbf{L^1}$ alors $\{X_n\}$ est bornée dans $\mathbf{L^1}$ et de plus $X \in \mathbf{L^1}$ donc $\{X_n\} \cup \{X\}$ est borné dans $\mathbf{L^1}$.
Soit $\epsilon > 0$ alors $\exists N$ tel que $\forall n \geq N, E[|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{2}$.

La famille finie $\mathcal{G} = \{X_0, X_1, \ldots, X_N, X\}$ est U.I. Donc $\exists \delta > 0$ tel que

$$P(A) < \delta \Rightarrow E[|X_n|\mathbf{1}_A] < \frac{\epsilon}{2} \;\; si \;\; n = 0, \ldots, N \; et \;\; E[|X|\mathbf{1}_A] < \frac{\epsilon}{2}.$$

Montrons que pour tout n: $E[|X_n|\mathbf{1}_A] \leq \epsilon$. Cette relation est évidente si $n \leq N$. De même, si $n > N$, on a:

$$\begin{aligned} E[|X_n|\mathbf{1}_A] &\leq E[|X_n - X|\mathbf{1}_A] + E[|X|\mathbf{1}_A] \\ &\leq E[|X_n - X|] + E[|X|\mathbf{1}_A] \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

La famille $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est donc U.I.

Montrons à présent que, si la suite $\{X_n\}$ est U.I., alors elle converge dans $\mathbf{L^1}$: $\{X_n\}$ est une suite bornée dans $\mathbf{L^1}$: $\exists M$ tel que $E[|X_n|] \leq M$. Soit $g_m := inf_{n\geq m}|X_n|$. Alors g_m forme une suite croissante de v.a. et, puisque X_n converge vers X P-pp, on a:

$$\lim_{m\to\infty} g_m = \liminf |X_n| = |X|.$$

Par le théorème de la convergence monotone $E[g_m] \nearrow E[|X|]$ et comme $g_m \leq |X_m|$, il suit: $E[g_m] \leq E[|X_m|] \leq M$ donc $E[|X|] \leq M$ d'où $X \in \mathbf{L^1}$. Ainsi $\{X_n\} \cup \{X\}$ est U.I. et par 2) on a: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) < \delta \Rightarrow \forall n : E[|X_n|\mathbf{1}_A] \leq \frac{\epsilon}{3}$ et $E[|X|\mathbf{1}_A] \leq \frac{\epsilon}{3}$.
Soit $c := \frac{2M}{\delta}$. Alors la suite $\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|$ converge P-pp vers 0 et est bornée par $2c$. Donc par le théorème de la convergence dominée elle converge dans $\mathbf{L^1}$ vers 0 d'où $\exists N : \forall n \geq N$:

$$E[\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Si $n \geq N$, alors

$$E[|X_n - X|] \leq E[\mathbf{1}_{\{|X|<c\}\cap\{|X_n|<c\}}|X_n - X|] + E[|X_n|\mathbf{1}_A] + E[|X|\mathbf{1}_A],$$

où $A := \{|X_n| \geq c\} \cup \{|X| \geq c\}$. Puisque $P(A) \leq P(|X_n| \geq c) + P(|X| \geq c) \leq \frac{2M}{c} = \delta$, il suit que $E[|X_n - X|] \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Nous avons donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|] = 0.$$

■

Exemple 3.53 *Si $\{\mathcal{G}_s\}_{s\in S} \subset \mathcal{F}$ est une famille de σ -algèbres et si $X \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F})$, montrez que la famille $\{E[X|\mathcal{G}_s]\}_{s\in S}$ est U.I.*

Preuve: Soit $X_s := E[X|\mathcal{G}_s]$.

L'inégalité de Jensen nous indique que $|X_s| \leq E[|X||\mathcal{G}_s]$. Aussi, puisque $\{|X_s| > c\} \in \mathcal{G}_s$, il suit que $E[|X_s|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq E[|X|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}]$. Puisque $\{X\}$ est U.I., par la caractérisation donnée par Th. 3.51

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : P(A) < \delta \Rightarrow E[|X|\mathbf{1}_A] < \epsilon.$$

Posons

$$A = \{|X_s| > c\}.$$

Si $c > E[|X|]/\delta$, alors $\forall s \in S$:

$$P(A) = P(\{|X_s| > c\}) \leq E[|X_s|]/c \leq E[|X|]/c < \delta,$$

et donc $E[|X_s|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq E[|X|\mathbf{1}_{\{|X_s|>c\}}] \leq \epsilon$. La famille $\{X_s\}_{s\in S}$ est donc U.I. ■

Théorème 3.54 *(théorème d'arrêt): Si X est une martingale continue, si τ est un temps d'arrêt borné : $\exists M\ \forall \omega\ ,\ \tau(\omega) \leq M$, alors:*

$$X_\tau = E[X_M|\mathcal{F}_\tau] \tag{1}$$

En particulier: Si $\tau \leq \sigma$ sont deux temps d'arrêts, si σ est borné, alors

$$X_\tau = E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau].$$

Preuve: Par le théorème d'arrêt 3.32, la relation (1) est vraie si τ prend un nombre fini de valeurs.

Si τ est un temps d'arrêt général, posons $\tau_n(\omega) := k\frac{M}{n}$ lorsque $\frac{M(k-1)}{n} < \tau(\omega) \leq \frac{Mk}{n}$ pour $k \in I\!N$.

Montrons que τ_n est un également temps d'arrêt: Soit $t \geq 0$ et soit k^* le plus grand entier k tel que $\frac{Mk}{n} \leq t$. Alors

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\tau_n \leq \frac{Mk^*}{n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{Mk^*}{n}} \subset \mathcal{F}_t.$$

τ_n est donc bien un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt.

Puisque $\tau_n \searrow \tau$ lorsque $n \to \infty$, la continuité des trajectoires de X nous permet de conclure que $X_{\tau_n} \to X_\tau$ P-pp.

τ_n prend au plus $n+1$ valeurs donc $X_{\tau_n} = E[X_M|\mathcal{F}_{\tau_n}]$. La famille $\{X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ est alors U.I. comme il suit de l'exercice 3.53.

La convergence P-pp de X_{τ_n} et le caractère U.I. de la suite nous permet d'affirmer avec le théorème 3.52 que X_{τ_n} converge vers X_τ dans L^1.

Si $Z \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_\tau) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_{\tau_n})$ alors: $E[X_{\tau_n} Z] = E[X_M Z]$. Or, $X_{\tau_n} \to X_\tau$ dans $\mathbf{L^1}$ et $Z \in L^\infty$ et donc $E[X_\tau Z] = \lim_{n\to\infty} E[X_{\tau_n} Z] = E[X_M Z]$. X_τ étant $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et vérifiant l'égalité précédente $\forall Z \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}_\tau)$, nous concluons : $X_\tau = E[X_M|\mathcal{F}_\tau]$.

Prouvons la deuxième assertion: si $\tau \leq \sigma \leq M$, alors

$$E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau] = E[E[X_M|\mathcal{F}_\sigma]|\mathcal{F}_\tau] = E[X_M|\mathcal{F}_\tau] = X_\tau,$$

car $X_\sigma = E[X_M|\mathcal{F}_\sigma]$ et $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$. ∎

Le résultat suivante généralise la construction d'un dernier élément d'une martingale (Cor. 3.45).

Théorème 3.55 *Si X est une martingale continue uniformément intégrable (i.e. la famille $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est U.I.), alors $\exists X_\infty \in \mathbf{L^1}(\mathcal{F}_\infty)$ telle que X_t converge vers X_∞ P-pp et au sens de $\mathbf{L^1}$ lorsque $t \to \infty$.*

De plus, quel que soit le temps d'arrêt τ: $X_\tau = E[X_\infty|\mathcal{F}_\tau]$.

Remarque 3.56 *Le mouvement brownien $(B_t)_{t\in[0,T]}$ satisfait-il le résultat précédent? mais le mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$? mais la martingale $(B_t^2 - t, t \geq 0)$? Sont ces familles U.I.?*

Preuve: Ce théorème généralise le corolaire 3.45. Il ne sera pas démontré ici. ∎

Corollaire 3.57 *(Théorème d'arrêt général) Si X est une $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale continue uniformément intégrable, alors quels que soient les temps d'arrêt $\tau \leq \sigma$: $X_\tau = E[X_\sigma|\mathcal{F}_\tau]$.*

Preuve: Se démontre en remplaceant X_M par X_∞ dans la fin de la preuve du théorème 3.54. ∎

Remarque 3.58 *On ne peut pas éliminer l'hypothèse X_t U.I. dans le théorème précédent, comme l'indique l'exemple suivant: Soit B_t un M.B , $\sigma = \inf\{t|B_t \geq 1\}$. Puisque le mouvement brownien atteint tous les points de $\mathbb{R}$ une infinité de fois, on conclut que $\sigma < \infty$ P-pp et partant $B_\sigma = 1$ P-pp. Fixons $\tau := 0$ alors $0 = B_\tau \neq E[B_\sigma|\mathcal{F}_\tau] = 1$.*

Pour conclure cette section sur les martingales en temps continu, mentionnons encore sans démonstration le théorème suivant de régularisation des trajectoires:

Théorème 3.59 *Si $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration complète, continue à droite alors toute martingale X admet une modification X' dont les trajectoires sont des fonctions continues à droite et dont la limite à gauche existe en tout t.*

4 CHAPITRE 4: L'INTEGRALE DE d'ITÔ

4.1 L'Espace $\mathcal{H}_2^2$:

Soit B_t un mouvement brownien et ϕ_t un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$. Nous voulons définir un processus Y qui soit l'intégrale:

$$Y_t = \int_0^t \phi_s dB_s. \tag{2}$$

Le première idée qui nous vient est de travailler trajectoire par trajectoire: Fixons ω et tentons de définir $Y_t(\omega) := \int_0^t \phi_s(\omega) dB_s(\omega)$. Si f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, la théorie de l'intégrale de Riemann-Stieltjes définit $\int_0^t f(s)dg(s)$ comme la limite des sommes de Riemann $\Sigma f(s_i)(g(s_{i+1}) - g(s_i))$ sur les partitions $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$ de $[0, t]$ lorsque le diamètre $max_i|s_{i+1} - s_i|$ de ces partitions tend vers 0. Pour que cette limite existe, il faut imposer des conditions sur f et sur g.

Exercice 4.1 *Montrez que si g est continue et $f := \mathbf{1}_{[a,b[}$ alors les sommes de Riemann convergent vers $g(t \wedge b) - g(t \wedge a)$. Montrez aussi que, si g est continue, $\int_0^t f(s)dg(s)$ est une fonctionnelle linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{R}$ engendré par les fonctions $\mathbf{1}_{[a,b[}$, $a \leq b$.*

Si l'on veut intégrer des fonctions f plus générales que celles de l'exercice précédent, par exemple des fonctions continues, il faut alors restreindre la classe des g considérés: la théorie de Riemann-Stieltjes suppose que g est une fonction à variation bornée. La trajectoire $t \to B_t(\omega)$ étant génériquement à variation non bornée, cette théorie ne peut donc pas s'appliquer ici.

Pour définir l'intégrale (2), nous devrons limiter la classe des processus ϕ. Voici le premier espace sur lequel nous travaillerons:

Définition 4.2 *$\mathcal{H}_2^2$ est l'ensemble des processus ϕ $\mathcal{F}_t$- progressivement mesurables tels que:*

$$\|\phi\|_{H_2^2}^2 = E[\int_0^\infty \phi^2(s)ds] < \infty.$$

H_2^2 est le quotient de $\mathcal{H}_2^2$ par la relation d'équivalence $\equiv$, où $\phi \equiv \phi'$ si et seulement si $\|\phi - \phi'\|_{H_2^2}^2 = 0$.

Exercice 4.3 *Montrez que $\mathcal{H}_2^2$ est un espace vectoriel et que $\|.\|_{H_2^2}$ est une semi-norme sur cet espace. H_2^2 est donc un espace vectoriel normé.*

Remarque 4.4 *Pour $\alpha > 1$, on considère parfois les normes suivantes $\|\phi\|_{H_2^\alpha} = \left(E[(\int_0^\infty \phi_s^2 ds)^{\frac{\alpha}{2}}]\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et les espaces $\mathcal{H}_2^\alpha$ correspondants.*

Exercice 4.5 *Soit $t_1 < t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$. Posons $\phi_t(\omega) := \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$. Montrez que $\phi \in \mathcal{H}_2^2$ et calculez $\|\phi\|_{H_2^2}$.*

Preuve: Remarquons que ϕ est progressivement mesurable en effet: Soit T fixé si $T < t_1$ alors $\phi : \Omega \times [0, T] \to 0$ donc ϕ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable car c'est l'application constante.

Si $T \geq t_1$ alors $\phi(\omega, t) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, or $\psi(\omega)$ est $\mathcal{F}_{t_1}$ mesurable donc $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable donc $\phi(\omega, t) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable.

Ensuite $\|\phi\|^2{}_{\mathcal{H}_2^2}$=$E[\int_0^\infty \phi^2(s)ds] = E[\int_0^\infty \mathbf{1}^2_{[t_1,t_2[}(t)\psi^2(\omega)dt]$

$$= E[(t_1 - t_2)\psi^2(\omega)] = (t_2 - t_1)E(\psi^2(\omega)) < \infty.$$

Donc $\phi \in \mathcal{H}_2^2$. ∎

Définition 4.6 *On définit $\mathcal{E}sc$ comme l'espace vectoriel engendré par: $\{\psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[} : t_1 < t_2, \psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})\}$.*

Théorème 4.7 *$(H_2^2, \|.\|_{H_2^2})$ est un espace de Hilbert.*

Preuve: H_2^2 est un sous espace vectoriel de $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ avec $\mu = P \bigotimes \lambda$, P étant la mesure sur $\mathcal{F}_\infty$ et λ la mesure de Lebesgue sur $[0, \infty[$. En effet:

$$\begin{array}{rcl} \|\phi\|^2_{\mathbf{L^2}} & = & \int_{\Omega\times[0,\infty[} \phi^2(\omega, t)d\mu(\omega, t) \\ & = & \int_\Omega(\int_0^\infty \phi^2(\omega, t)dt)dP(\omega) \\ & = & E(\int_0^\infty \phi^2(\omega, t)dt). \end{array}$$

$L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ étant un espace de Hilbert, il nous suffit pour prouver la première assertion de démontrer que H_2^2 est fermé dans $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$:

Soit $\phi_n \to \phi$ dans $L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ avec $\phi_n \in H_2^2$. Montrons que $\phi \in H_2^2$. Pour T fixé on a:

$$\begin{array}{rcl} \|\phi_n - \phi\|^2_{L^2(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]})} & = & E[\int_0^T (\phi_{n,t}(\omega) - \phi_t(\omega))^2 dt] \\ & \leq & E[\int_0^\infty (\phi_{n,t} - \phi_t)^2 dt] \\ & = & \|\phi_n - \phi\|^2_{H_2^2} \to 0. \end{array}$$

La restriction de ϕ à $\Omega \times [0, T]$ est la limite dans $L^2(\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}\mu)$ des restrictions de ϕ_n à $\Omega \times [0, T]$. La restriction de ϕ à $[0, T]$ est $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{B}_{[0,T]}$- mesurable. Ceci étant vrai pour tout T, ϕ est progressivement mesurable et donc dans H_2^2. ∎

Théorème 4.8 *$\mathcal{E}sc$ est dense dans H_2^2.*

Preuve: 1) Si $f \in L^2([0, \infty[)$ et $n \in I\!N$, définissons $T_n(f)$ par $T_n(f)_t = \sum_{k=1}^\infty (n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t)$.

Montrons que $T_n(f) \in L^2$ et que $\|T_n(f)\|^2_{L^2} \leq \|f\|^2_{L^2}$.

$$\begin{array}{rcl} \|T_n(f)\|^2_{\mathbf{L^2}} & = & \int_0^\infty (\sum_{k=1}^\infty (n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t))^2 dt \\ & = & \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty (n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)^2 \mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t) dt \\ & = & \sum_{k=1}^\infty (n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds)^2 \frac{1}{n}. \end{array}$$

or d'après l'inégalité de Jensen $[E[f(U)]]^2 \leq E[f^2(U)]$ en prenant U une variable uniforme sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, on a:

$$\|T_n(f)\|^2_{L^2} \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f^2(s)ds = \int_0^\infty f^2(s)ds = \|f\|^2_{L^2} < \infty.$$

Montrons à présent que $T_n(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^2: l'espace $\mathcal{C}_K([0,\infty[)$ des fonctions continues à support compact est dense dans L^2, donc si $\phi \in L^2([0,\infty[)$ alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists f \in \mathcal{C}_K([0,\infty[)$: $\|\phi - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{3}$.

Or, la continuité uniforme de f implique que $T_n(f)$ converge uniformément vers f et donc $\|T_n(f) - f\|_{L^2} \to 0$. Ainsi, $\exists N : \forall n \geq N \ \|T_n(f) - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{3}$. Ainsi:

$$\begin{array}{rcl} \|T_n(\phi) - \phi\|_{L^2} & \leq & \|T_n(\phi - f)\| + \|T_n(f) - f\| + \|f - \phi\| \\ & \leq & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{array}$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, nous concluons que $T_n(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^2.

2)Si $\phi \in H_2^2$ est tel que $\phi_t = 0$, $\forall t \geq T$, définissons le processus ϕ^n par

$$\phi^n(\omega, t) = T_n(\phi(\omega, .))(t) = \sum_{k=1}^\infty (n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega, s)ds)\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(t).$$

Cette somme ne contient en fait qu'un nombre fini de termes non nuls. Or, si $s \leq \frac{k}{n}$, $\phi(\omega, s)$ est $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$ mesurable donc $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega, s)ds$ est $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$-mesurable. De plus

$$E[(n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega, s)ds)^2] \leq E[n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \phi(\omega, s)^2 ds)] < \infty.$$

Ainsi $\phi^n(\omega, t) \in \mathcal{E}sc$.

Montrons que $\phi^n \to \phi$ pour la norme de H_2^2: Soit $Y_n(\omega) := \int_0^\infty (\phi^n(\omega, t) - \phi(\omega, t))^2 dt$. Observons que

$$Y_n(\omega) = \|T_n(\phi(\omega, .)) - \phi(\omega, .)\|^2_{L^2([0,\infty[)}.$$

Aussi, $\forall \omega$, $Y_n(\omega) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. De plus

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{Y_n(\omega)} & = & \|T_n(\phi(\omega, .)) - \phi(\omega, .)\|_{L^2([0,\infty[)} \\ & \leq & \|T_n(\phi(\omega, .))\|_{L^2([0,\infty[)} + \|\phi(\omega, .)\|_{L^2([0,\infty[)} \\ & \leq & 2\|\phi(\omega, .)\|_{L^2([0,\infty[)} \end{array}$$

Ainsi $Y_n(\omega) \leq 4\int_0^\infty (\phi(\omega,t))^2 dt$. Le membre de droite de cette inégalité ayant une espérance finie, nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour conclure que $\|\phi^n - \phi\|_{H_2^2} = E[Y_n] \to 0$.

3) Si $\phi \in H_2^2$, nous allons montrer que $\mathbf{1}_{[0,T]}\phi$ converge vers ϕ dans H_2^2 lorque T tend vers ∞. Le théorème sera établi puisque, par le point 2, $\mathbf{1}_{[0,T]}\phi$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par un processus de $\mathcal{E}sc$.

Puisque $(\phi - \mathbf{1}_{[0,T]}\phi)^2 = \mathbf{1}_{]T,\infty[}\phi^2 \leq \phi^2$ et que $\mathbf{1}_{]T,\infty[}\phi^2 \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il suffit d'appliquer à nouveau le théorème de la convergence dominée de Lebesgue sur l'espace $L^1(\mathcal{F}_\infty \bigotimes \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \mu)$ pour conclure que $\|\phi - \mathbf{1}_{[0,T]}\phi\|_{H_2^2} \to 0$. ■

4.2 L'intégrale d'Itô sur H_2^2

Nous allons à présent définir l'intégrale (2) des processus ϕ de H_2^2. Nous pourrions définir la variable $Y_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ pour un temps t fixé, mais la définition que nous en donnerions serait alors une variable de $L^2(\mathcal{F}_t)$: Y_t serait alors défini à un ensemble de mesure nulle près et rien n'indiquerait que l'ensemble du processus Y ainsi construit ait une version régulière. Pour cette raison, nous allons définir le processus Y tout entier et nous le nous noterons $I(\phi)$.

Définition 4.9 *Si $\phi \in \mathcal{E}sc$, alors pour tout ω la trajectoire $\phi_.(\omega)$ est dans l'espace $\mathcal{R}$ de l'exercice 4.1. Nous pouvons donc définir $I(\phi)$ trajectoire par trajectoire:*

$$I(\phi)_t(\omega) := \int_0^t \phi_s(\omega) dB_s(\omega),$$

l'intégrale étant prise au sens de l'exercice 4.1. En particulier, si $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, où $t_1 \leq t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$, on a

$$I(\phi)_t = \psi \cdot (B_{t_2 \wedge t} - B_{t_1 \wedge t}).$$

Remarque 4.10 *Notons que, si $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, le processus $I(\phi)$ ainsi construit est $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté et continu. L'intégrale de l'exercice 4.1 étant linéaire sur $\mathcal{R}$, l'application I sera également linéaire et I applique donc linéairement $\mathcal{E}sc$ dans l'espace des processus continus $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptés.*

Exercice 4.11 *Si $\phi_t(\omega) = \psi(\omega)\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}(t)$, où $t_1 \leq t_2$ et $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{t_1})$, montrez que $I(\phi)$ est une martingale et calculez $\|I(\phi)\|_{L^2}$.*

Preuve: Soit $s > t$.

1) Supposons d'abord que $t \in [t_1, t_2]$: alors $\psi \in L^2(\mathcal{F}_t)$, et $t_1 \wedge s = t_1 = t_1 \wedge t \leq t$. Donc

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[\psi \cdot (B_{t_2\wedge s} - B_{t_1\wedge s})|\mathcal{F}_t] = \psi \cdot (E[B_{t_2\wedge s}|\mathcal{F}_t] - B_{t_1\wedge t}).$$

Puisque B est une martingale et $t_2 \wedge s \geq t = t_2 \wedge t$, nous avons

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = \psi \cdot (B_{t_2\wedge t} - B_{t_1\wedge t}) = I(\phi)_t.$$

2) Si $t < t_1$ alors, soit $s \leq t_1$, et partant

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[0|\mathcal{F}_t] = 0 = I(\phi)_t,$$

soit $s > t_1$, et donc, il suit du cas 1) que:

$$E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = E[E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_{t_1}]|\mathcal{F}_t] = E[I(\phi)_{t_1}|\mathcal{F}_t] = E[0|\mathcal{F}_t] = 0 = I(\phi)_t.$$

3) Si $t > t_2$, alors $I(\phi)_t = I(\phi)_{t_2} = I(\phi)_s$, et puisque $I(\phi)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, nous avons également $E[I(\phi)_s|\mathcal{F}_t] = I(\phi)_t$.

Enfin,

$$\begin{aligned} \|I(\phi)\|_{L^2}^2 &= \lim_{t\to\infty} \|I(\phi)_t\|_{L^2}^2 \\ &= \|I(\phi)_{t_2}\|_{L^2}^2 \\ &= E[\psi^2(B_{t_2} - B_{t_1})^2] \\ &= E[\psi^2](t_2 - t_1). \end{aligned}$$

■

En comparant au résultat obtenu à l'exercice 4.5, nous voyons que

$$\|I(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

■

Cette propriété se généralise:

Théorème 4.12 *I est une application linéaire isométrique de $(\mathcal{E}sc, \|.\|_{H_2^2})$ vers $(M^2, \|.\|_{L^2})$.*

Preuve: Nous savons d'une part que I est linéaire. D'autre part si ϕ est de la forme $\psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$, il découle de l'exercice précédent que $I(\phi) \in M^2$. Par linéarité, cette propriété s'étend à tout $\phi \in \mathcal{E}sc$.

Remarquons que si $\phi \in \mathcal{E}sc$, alors $\phi = \sum_0^n \psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[}$ avec $t_1^k \leq t_2^k$, $\psi_k \in L^2(\mathcal{F}_{t_1^k})$ et $[t_1^k, t_2^k[\cap[t_1^{k'}, t_2^{k'}[= \emptyset$ si $k \neq k'$. Nous calculons alors:

$$\begin{aligned}
I(\phi)\|_{L^2}^2 &= E[I(\phi)_\infty^2] \\
&= E[(\sum_0^n I(\psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[})_\infty)^2] \\
&= E[(\sum_0^n \psi_k (B_{t_2^k} - B_{t_1^k}))^2] \\
&= E[\sum_0^n \psi_k^2 (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})^2] \\
&\quad +2E[\sum_{k<j} \psi_k \psi_j (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})(B_{t_2^j} - B_{t_1^j})] \\
&= \sum_0^n E[\psi_k^2](t_2^k - t_1^k)
\end{aligned}$$

car, les intervalles $[t_1^k, t_2^k[$ et $[t_1^j, t_2^j[$ sont disjoints si $k < j$, donc $E[\psi_k \psi_j (B_{t_2^k} - B_{t_1^k})(B_{t_2^j} - B_{t_1^j})] = 0$. Par ailleurs:

$$\begin{aligned}
\phi\|_{H_2^2}^2 &= E[\int_0^\infty (\sum_0^n \psi_k \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[})^2 dt] \\
&= E[\int_0^\infty (\sum_0^n \psi_k^2 \mathbf{1}_{[t_1^k, t_2^k[}) dt] \\
&= E[\sum_k \psi_k^2(\omega)(t_2^k - t_1^k)] \\
&= \sum_k E(\psi_k^2)(t_2^k - t_1^k) \\
&= \|I(\phi)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Nous concluons donc que $\|I(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}$: I est bien une isométrie. ■

Corollaire 4.13 *Si $\{\phi_n\} \subset \mathcal{E}sc$ converge vers $\phi \in H_2^2$ au sens de $\|.\|_{H_2^2}$, alors la suite $\{I(\phi_n)\}$ converge dans M^2.*

Si $\{\phi_n'\} \subset \mathcal{E}sc$ converge également ϕ, alors

$$\lim_{n\to\infty} I(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} I(\phi_n').$$

Preuve: En effet, si $\{\phi_n\}$ converge, il s'agit d'une suite de Cauchy dans H_2^2 donc, I étant linéaire et isométrique:

$$\|I(\phi_n) - I(\phi_m)\|_{L^2} = \|I(\phi_n - \phi_m)\|_{L^2} = \|\phi_n - \phi_m\|_{H_2^2} \to 0.$$

Ainsi $\{I(\phi_n)\}$ est une suite de Cauchy dans M^2 et, M^2 étant complet, la limite $\lim_{n\to\infty} I(\phi_n)$ existe. Si $\{\phi'_n\}$ est une autre suite convergent vers ϕ, nous pouvons en créer une troisième $\{\phi''_n\}$ qui prend alternativement ses éléments dans les suites $\{\phi_n\}$ et $\{\phi'_n\}$. Puisque $\{\phi''_n\}$ converge vers ϕ, la suite $\{I(\phi''_n)\}$ est convergente et toutes les sous-suites de $\{I(\phi''_n)\}$,– $\{I(\phi_n)\}$ et $\{I(\phi'_n)\}$ en particulier–, convergent donc vers une limite commune. ■

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'intégrale d'Itô:

Définition 4.14 *(Intégrale d'Itô sur H^2_2) Si $\phi \in H^2_2$, il existe une suite $\{\phi_n\} \subset \mathcal{E}sc$ qui converge vers ϕ. Nous définissons $\bar{I}(\phi) := \lim_{n\to\infty} I(\phi_n)$. Par le corollaire précédent, cette limite ne dépend pas de la suite $\{\phi_n\}$ choisie. $\bar{I}(\phi)$ est l'intégrale d'Itô du processus ϕ.*

Exercice 4.15 *Montrez que $\bar{I}$ est linéaire et isométrique et que si $\phi \in \mathcal{E}sc$: $\bar{I}(\phi) = I(\phi)$.*

Preuve: Soient ϕ et $\phi' \in H^2_2$, soient $\{\phi_n\}$ et $\{\phi'_n\} \subset \mathcal{E}sc$ telles que $\phi_n \to \phi$ et $\phi'_n \to \phi'$. Alors $\forall \alpha, \beta \in I\!R : (\alpha\phi_n + \beta\phi'_n) \to (\alpha\phi + \beta\phi')$ et donc

$$\begin{aligned}\bar{I}(\alpha\phi + \beta\phi') &= L^2 - \lim I(\alpha\phi_n + \beta{\phi'}_n) \\ &= \alpha \lim I(\phi_n) + \beta \lim I({\phi'}_n) \\ &= \alpha\bar{I}(\phi) + \beta\bar{I}(\phi')\end{aligned}$$

d'où $\bar{I}$ est linéaire. Montrons que $\bar{I}$ est isométrique:

$$\|\bar{I}(\phi)\|_{L^2} = \lim \|I(\phi_n)\|_{L^2} = \lim \|\phi_n\|_{H^2_2} = \|\phi\|_{H^2_2}.$$

Enfin si $\phi \in \mathcal{E}sc$, la suite constante $\phi_n := \phi$ est une suite dans $\mathcal{E}sc$ qui converge vers ϕ. Ainsi $\bar{I}(\phi) = \lim I(\phi_n) = I(\phi)$. ■

Définition 4.16 *Nous noterons à présent $\bar{I}(\phi) = \int_0^{\cdot} \phi_t dB_t$, $\bar{I}(\phi)_s = \int_0^s \phi_t dB_t$ et $\int_a^b \phi_t dB_t = \bar{I}(\phi)_b - \bar{I}(\phi)_a$.*

Remarque 4.17 *Remarquons que $\bar{I}(\phi)$ a été défini globalement. Rien n'indique par exemple que $\bar{I}(\phi)_s$ ne dépend pas du comportement du processus ϕ après le temps s, propriété qui aurait été évidente dans le cadre d'une définition trajectoire par trajectoire de l'intégrale d'Itô.*

L'exercice suivant indique qu'il en est bien ainsi:

Exercice 4.18 *Si T est fixé, montrez que*

$$\forall \phi \in H^2_2 : \bar{I}(\phi)_T = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,T[}\phi)_\infty.$$

Avec les notations intégrales, cela revient à dire:

$$\int_0^T \phi_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,T[}(s)\phi_s dB_s$$

ou encore $\int_T^\infty \mathbf{1}_{[0,T[}(s)\phi_s dB_s = 0$.

Preuve: Définissons les applications $J : H_2^2 \to L^2(\mathcal{F}_T)$ et $K : H_2^2 \to L^2(\mathcal{F}_\infty)$ comme suit: $J(\phi) := \bar{I}(\phi)_T$ et $K(\phi) := \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,T[}\phi)_\infty$.

J et K sont clairement linéaires puique $\bar{I}$ l'est. Montrons que ces applications sont également continues. En effet:

$$\|J(\phi)\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi)_T\|_{L^2} \leq \|\bar{I}(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

De même

$$\|K(\phi)\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})_\infty\|_{L^2} = \|\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})\|_{L^2} = \|\phi\mathbf{1}_{[0,T[}\|_{H_2^2},$$

d'où

$$\|K(\phi)\|_{L^2} = \sqrt{E(\int_0^T {\phi^2}_s ds)} \leq \sqrt{E(\int_0^\infty {\phi^2}_s ds)} = \|\phi\|_{H_2^2}.$$

Posons à présent $\mathcal{F} := \{\phi \in H_2^2 | J(\phi) = K(\phi)\}$. Par continuité et linéarité de J et K, $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel fermé de H_2^2.

Remarquons que, si ϕ est de la forme $\phi = \psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$, alors:

$$J(\phi) = \bar{I}(\phi)_T = \psi(B_{T\wedge t_2} - B_{T\wedge t_1})$$

et, puisque $[t_1, t_2[\cap [0, T[= [T \wedge t_1, T \wedge t_2[$, nous avons $\phi\mathbf{1}_{[0,T[} = \psi\mathbf{1}_{[T\wedge t_1, T\wedge t_2[}$. Ainsi

$$K(\phi) = \bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,T[})_\infty = \psi(B_{T\wedge t_2} - B_{T\wedge t_1}) = J(\phi).$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ contient tous les ϕ de la forme $\phi = \psi\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}$. $\mathcal{F}$ contient donc $\mathcal{E}sc$ qui est l'espace vectoriel engendré par ces ϕ. $\mathcal{F}$ étant fermé, et $\mathcal{E}sc$ étant dense dans H_2^2, nous avons établi que $H_2^2 \subset \mathcal{F}$: ce que nous voulions montrer. ■

Exercice 4.19 *Montrez que si $\phi \in H_2^2$, si $A \in \mathcal{F}_t$ alors:*

1. $\psi_s(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[t,\infty[}(s)\phi_s(\omega) \in H_2^2$.
2. $\int_0^\cdot \psi_s dB_s = \mathbf{1}_A \int_0^\cdot \mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi_s dB_s$.

Nous montrons en fait ici que si $Z \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ alors

$$\int_t^\infty Z\phi_s dB_s = Z \cdot \int_t^\infty \phi_s dB_s$$

Preuve:
1) Montrons que ψ est progressivement mesurable. Soit T fixé:

Si $T < t$ alors la resrtiction de ψ à $\Omega \times [0, T]$ est identiquement nulle donc $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$-mesurable.

Si $T \geq t$ alors $\mathbf{1}_A$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable donc $\mathcal{F}_T$-mesurable et $\mathbf{1}_{[t,\infty[}$ est $\mathcal{B}_{[0,T]}$ mesurable d'où $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{[t,\infty[}$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,T]}$-mesurable et, puisque $\phi \in H_2^2$, $\psi(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[t,\infty[}(s)\phi_s(\omega)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,T[}$-mesurable.

Calculons à présent $\|\psi\|_{H_2^2}$:

$$\|\psi\|_{H_2^2}^2 = E[\int_0^\infty \psi_s^2 ds] = E[\mathbf{1}_A \int_t^\infty \phi_s^2 ds] \leq E[\int_0^\infty \phi_s^2 ds] = \|\phi\|_{H_2^2}^2 < \infty.$$

Ainsi: $\psi \in H_2^2$.

2) Pour montrer la deuxième assertion, posons

$$J(\phi) := \bar{I}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi) \text{ et } K(\phi) := \mathbf{1}_A \cdot \bar{I}(\mathbf{1}_{[t,\infty[}\phi).$$

Il est facile de voir que si ϕ est de la forme $\mathbf{1}_{[t_1,t_2[}\psi$, alors $J(\phi) = K(\phi)$. On montre aisément que J et K sont des applications linéaires continues de H_2^2 dans M^2. Nous pouvons donc appliquer la preuve de l'exercice précédent. ■

Exercice 4.20 *Si τ est un temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs: $\tau(\Omega) = \{t_1, \ldots, t_n\}$ où $t_1 < \ldots < t_n$, si $\phi \in H_2^2$, montrez que $\bar{I}(\phi)_\tau = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)_\infty$. En d'autres termes:*

$$\int_0^\tau \phi_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau[}(s)\phi_s dB_s.$$

Montrez ensuite que cette relation est vérifiée pour tout temps d'arrêt τ.

Preuve: Considérons un temps d'arrêt τ discret. Alors, puisque $\{\tau = t_i\}$ est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, nous obtenons avec les deux exercices précédents:

$$\begin{aligned}
\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)_\infty &= \bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\mathbf{1}_{[\tau,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \bar{I}(\phi)_\infty - \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}(\bar{I}(\phi)_\infty - \bar{I}(\mathbf{1}_{[t_i,\infty[}\phi)_\infty) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,t_i[}\phi)_\infty \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\bar{I}(\phi)_{t_i} \\
&= \bar{I}(\phi)_\tau.
\end{aligned}$$

Si τ est un temps d'arrêt général, il existe une suite $\{\tau_n\}$ de temps d'arrêt discrets telle que $\tau_n \searrow \tau$ (voir la démonstration du théorème d'arrêt , Ch. 3). Par continuité des trajectoires de $\bar{I}(\phi)$, nous avons:

$$\bar{I}(\phi)_\tau = \lim_{n\to\infty} \bar{I}(\phi)_{\tau_n} = \lim_{n\to\infty} \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi)_\infty$$

Pour terminer la démonstration, il nous suffit donc de montrer que les processus $\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi$ converge dans H_2^2 vers $\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi$. Mais ceci suit le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à la mesure $P \otimes \lambda$ sur $\Omega \times [0, \infty[$: d'une part $\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi$ converge ponctuellement vers $\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi$ et d'autre part, $\forall n : |\mathbf{1}_{[0,\tau_n[}\phi| \leq |\phi|$. ■

Exercice 4.21 *Si τ est un temps d'arrêt, et X un processus, nous rappelons que la notation X^τ désigne le processus $t \to X_t^\tau := X_{\tau \wedge t}$. Améliorez les démonstrations antérieures pour prouver que*

$$\bar{I}(\phi)^\tau = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi).$$

Remarque 4.22 *Il suit de l'exercice précédent que si $\sigma \leq \tau$ sont deux temps d'arrêt, alors les processus $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\sigma[}\phi)$ et $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)$ concident jusqu'au temps σ: $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\sigma[}\phi) = \bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau[}\phi)^\sigma$. Nous mettons à profits cette remarque dans la suite pour étendre la définition de l'intégrale d'Itô $\bar{I}$ à une classe plus vaste de processus.*

Définition 4.23 *(Martingale locale) Un processus X est une $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale locale continue s'il est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ et s'il existe une suite croissante τ_n de temps d'arrêt telle que $\tau_n \nearrow \infty$ P-pp et pour tout n: $X^{\tau_n} \in \mathcal{M}^2$. Nous noterons $\mathcal{M}^{loc}$ l'ensemble des martingales locales continues et M^{loc} le quotient de $\mathcal{M}^{loc}$ par la relation d'équivalence $\overset{modif}{\equiv}$.*

Exercice 4.24 *Montrez que toute martingale continue est une martingale locale.*

Remarque 4.25 *Contrairement à ce que pourrait laisser croire la terminologie, une martingale locale n'est en général pas une martingale. L'exercice suivant illustre ce phénomène.*

Exercice 4.26 *Soit V une variable aléatoire finie positive telle que $E[V] = \infty$. Soit par ailleurs B un mouvement Brownien indépendant de V. Posons $\mathcal{F}_t := \sigma(V, B_s, s \in [0, t])$ et $X_t := V \cdot B_t$.*

1) Montrez que X_t n'est pas dans L^1 si $t > 0$. X ne peut donc pas être une martingale.

2) Montrez que B est un $\{\mathcal{F}_t\}$-mouvement brownien.

3) Soit $\tau_n := \mathbf{1}_{\{V \leq n\}} n$. Montrez que τ_n est un $\{\mathcal{F}_t\}$-temps d'arrêt et que $\tau_n \nearrow \infty$.

4) Montrez que $X_s^{\tau_n} = \mathbf{1}_{V \leq n}(V \wedge n) \cdot B_{s \wedge n}$. Concluez que $X^{\tau_n} \in M^2$.

Exercice 4.27 *Montrez que si $X \in M^{loc}$, si τ est un temps d'arrêt tel que X^τ soit un processus borné, alors X^τ est une martingale.*

Preuve: *Voila une idée pour le cas $X \in M^2$. Montrer d'abord que X adapté est une martingale si et seulement si pout tout temps d'arrêt borné T, on a*

$$E(X_T) = E(X_0).$$

(une direction est claire, pour l'autre utiliser le temps d'arrêt particulier $T = t1_A s + 1_{A^c} t$ si $A \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$

Utiliser ensuite cela pour conclure que $X_S^T = X_O^T$ pour tout S temps d'arrêt borné.

En général on ne peut pas remplacer borné par U.I. dans l'énoncé précédent.

Définition 4.28 *(L'espace H_2^{loc}) H_2^{loc} désigne l'ensemble des processus a progressivement mesurables tels que pour tout $T \in [0, \infty[$:*

$$\int_0^T a_t^2\, dt < \infty \ P\text{-}P.P.$$

Pour un tel processus, nous noterons τ_n^a le temps d'arrêt

$$\tau_n^a := inf\{t| \int_0^t a_s^2 ds \geq n\}.$$

Le processus $\mathbf{1}_{[0,\tau_n^a[}a$ est alors dans H_2^2. De plus, si $a \in M^{loc}$, τ_n^a forme une suite croissante de temps d'arrêt qui tend P-pp vers ∞.

Remarque 4.29 *Nous voulons à présent définir $J(\phi) := \int_0^{\cdot} \phi_s dB_s$ pour un processus ϕ dans H_2^{loc}. Il est assez naturel d'exiger que $\forall n$: $J(\phi)_{\tau_n^\phi}$ concide avec $\int_0^{\tau_n^\phi} \phi_s dB_s$ interpreté comme l'intégrale $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}\phi)_\infty$ définie précédement. Nous exigerons en fait que les processus $J(\phi)$ et $\bar{I}(\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}\phi)$ concident jusqu'au temps τ_n^ϕ. Le théorème suivant indique qu'un tel $J(\phi)$ existe.*

Théorème 4.30 *Si $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration complète, alors $\forall \phi \in H_2^{loc}$, il existe un processus $J(\phi)$ unique dans M^{loc} tel que $\forall n : J(\phi)^{\tau_n^\phi} = \bar{I}(\phi \mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$.*

Preuve: $\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$ est un élément de M^2 soit une classe d'équivalence pour la relation $\overset{\text{modif}}{\equiv}$. Choisissons un représentant Y_n de cette classe. Si $n < m$, l'identité $\bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[}) = \bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,\tau_m^\phi[})^{\tau_n^\phi}$ de la remarque 4.22 se traduit en terme de Y_n et Y_m par $Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Y_m^{\tau_n^\phi}$. L'exercice 1.40, Ch. 3 nous apprend que Y_n et Y_m sont indistinguables. Ainsi $P(A_{n,m}) = 1$, où $A_{n,m} := \{\omega | \forall t \geq 0 : Y_{n,t}(\omega) = Y_{m,t}^{\tau_n^\phi}(\omega)\}$. Soit $A := \cap_{n<m} A_{n,m}$. Nous avons également $P(A) = 1$.

Soit $B := \{\omega : \lim_{n\to\infty} \tau_n^\phi(\omega) = \infty\}$. Nous avons alors $P(B) = 1$, et donc $P(A') = 1$, où $A' := A \cap B$. Si ω appartient à A', définissons $Y_t(\omega)$ comme suit: il existe n tel que $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$. Posons $Y_t(\omega) := Y_{n,t}(\omega)$. Remarquons que cette définition ne dépend pas du n choisi tel que $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$. En effet, si $t \leq \tau_m^\phi(\omega)$, et par exemple $n < m$, alors $Y_{n,t}(\omega) = Y_{m,t}^{\tau_n^\phi}(\omega) = Y_{m,t\wedge\tau_n^\phi}(\omega) = Y_{m,t}(\omega)$.

Le processus Y est donc bien défini sur A'. Définissons alors $Y_t(\omega) := 0$ si $\omega \notin A'$. Le processus Y obtenu est donc continu, et si $\omega \in A'$ nous avons $Y_{n,t}(\omega) = Y_t(\omega)$ si $t \leq \tau_n^\phi(\omega)$ et si $t > \tau_n^\phi(\omega)$, $Y_{n,t}(\omega) = Y_{n,\tau_n^\phi(\omega)}(\omega) = Y_{\tau_n^\phi(\omega)}(\omega)$. Nous venons de montrer que $Y_t^{\tau_n^\phi} = Y_{n,t}\mathbf{1}_{A'}$.

Aussi $\forall\omega$: $Y_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A'} Y_{n,t}(\omega)$. Puisque la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ est complète et qur $P(A') = 1$, $\mathbf{1}_{A'}Y_{n,t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et en passant à la limité, Y_t l'est aussi: Y est adapté à $\{\mathcal{F}_t\}$. De plus, la relation $Y_t^{\tau_n^\phi} = Y_{n,t}\mathbf{1}_{A'}$ implique que $Y_{n,t} = Y_t^{\tau_n^\phi}$ P-ps. Ainsi $Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Y^{\tau_n^\phi}$. Puisque $Y_n \in \mathcal{M}^2$, cette relation indique que $Y \in \mathcal{M}^{loc}$. Nous définissons enfin $J(\phi)$ comme la classe d'équivalence sur $\mathcal{M}^{loc}$ pour $\overset{\text{modif}}{\equiv}$ qui contient Y. Nous avons alors $\forall n : J(\phi)^{\tau_n^\phi} = \bar{I}(\phi\mathbf{1}_{[0,\tau_n^\phi[})$.

Il nous reste à montrer l'unicité de $J(\phi)$: soit $Z \in \mathcal{M}^{loc}$ tel que $\forall n : Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Z^{\tau_n^\phi}$, alors $\forall n : Y^{\tau_n^\phi} \overset{\text{modif}}{\equiv} Y_n \overset{\text{modif}}{\equiv} Z^{\tau_n^\phi}$. Puisque $\tau_n^\phi \nearrow \infty$, cela implique clairement que $Y \overset{\text{modif}}{\equiv} Z$. ■

Remarque 4.31 *Montrez que l'application $J : H_2^{loc} \to M^{loc} : \phi \to J(\phi)$ est linéaire.*
Montrez également que si $\phi \in H_2^2$, alors $J(\phi) = \bar{I}(\phi)$.

Définition 4.32 *$J(\phi)$ est l'intégrale de Itô du processus $\phi \in H_2^{loc}$. Nous adopterons les notations intégrales: $J(\phi)_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ et $J(\phi) = \int_0^\cdot \phi_s dB_s$.*

Exercice 4.33 *Nous avons défini l'application $J : H_2^{loc} \to M^{loc}$ comme l'intégrale par rapport à un mouvement brownien donné B quelconque. Si B^1 et B^2 sont deux mouvements browniens indépendants, nous savons que $B^3 := \frac{1}{\sqrt{2}}(B^1 + B^2)$ est encore un mouvement brownien. A chacun de ces mouvements browniens correspond donc une application $J : H_2^{loc} \to M^{loc}$ différente que nous noterons respectivement J_1, J_2 et J_3. Montrez que $J_3(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1(\phi) + J_2(\phi))$. En notation intégrale, cela revient à montrer que*

$$\int_0^\cdot \phi_t dB_t^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\int_0^\cdot \phi_t dB_t^1 + \int_0^\cdot \phi_t dB_t^2).$$

4.3 Les semi-martingales et leurs crochets:

Définition 4.34 *On définit $\mathcal{H}_1^{loc}$ comme l'ensemble des processus progressivement mesurables ϕ pour tout $T < \infty$ tels que*

$$\int_0^T |\phi_s| ds < \infty \ P\text{-}ps.$$

H_1^{loc} est le quotient de $\mathcal{H}_1^{loc}$ par la relation d'égalité $P \otimes \lambda$-pp, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, \infty[$.

Définition 4.35 *Un processus X adapté à $\mathcal{F}_t$ est une semi-martingale si $\exists X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, $a \in H_2^{loc}$ et $b \in H_1^{loc}$ tels que:*

$$X = X_0 + \int_0^\cdot a_s dB_s + \int_0^\cdot b_s \, ds. \tag{3}$$

Plus généralement, si $B^1, \cdots, B^n$ sont des $\{\mathcal{F}_t\}$-mouvements browniens indépendants, si $X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$, $a^1, \cdots, a^n \in H_2^{loc}$ et $b \in H_1^{loc}$, alors nous considérerons également que le *processus X suivant est une semi-martingale*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\cdot} a_s^i dB_s^i + \int_0^{\cdot} b_s ds \tag{4}$$

Remarque 4.36 *On définit habituellement une semi martingale comme la somme $M + A$ d'une martingale locale M et d'un processus A adapté à 1-variation finie sur tout intervalle borné. Notre définition est plus restrictive puisqu'elle impose l'existence d'une représentation intégrale des processus M et A.*

Théorème 4.37 *Si le processus X est une semi-martingale, alors la décomposition (3) est unique.*

Preuve: Par linéarité des intégrales, montrer l'unicité de la représentation (3), revient à montrer que, si $\alpha \in H_2^{loc}$ et $\beta \in H_1^{loc}$ vérifient

$$\int_0^{\cdot} \alpha_s dB_s = \int_0^{\cdot} \beta_s ds,$$

alors $\alpha = \beta = 0$.

Posons $M := \int_0^{\cdot} \alpha_s dB_s$, et définissons:

$$\tau_n = inf\{t : |M_t| \geq n \;\; ou \int_0^t \beta_s|ds \geq n\}.$$

Montrons d'abord que le processus que M^{τ_n} est identiquement nulle: soit $t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = t$. Alors, puisque par l'exercice 4.27, M^{τ_n} est une martingale, nous avons:

$$\begin{aligned}
E[(M_t^{\tau_n})^2] &= \sum_i E[(M_{t_{i+1}}^{\tau_n})^2 - (M_{t_i}^{\tau_n})^2] \\
&= \sum_i E[(M_{t_{i+1}}^{\tau_n} - M_{t_i}^{\tau_n})^2] \\
&\leq E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \sum_i |M_{t_{i+1}}^{\tau_n} - M_{t_i}^{\tau_n}|] \\
&= E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \sum_i |\int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta_s \mathbf{1}_{s \leq \tau_n} ds|] \\
&\leq E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \cdot \int_0^t |\beta_s| ds] \\
&\leq n \cdot E[\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}|].
\end{aligned}$$

Puisque M^{τ_n} est continue, ses trajectoires sont uniformément continues sur $[0, t]$ et donc $\max_j |M_{t_{j+1}}^{\tau_n} - M_{t_j}^{\tau_n}| \to 0$ P-pp lorsque $\max_j |t_{j+1} - t_j| \to 0$. Puisque $|M_{t_{j+1}}^{\tau_n}| \leq$

n, par définition de τ_n, il suit du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que $E[\max_j |M^{\tau_n}_{t_{j+1}} - M^{\tau_n}_{t_j}|] \to 0$

Ainsi, $\forall t$ nous avons obtenu

$$E[(M^{\tau_n}_t)^2] = 0$$

et donc M^{τ_n} est donc identiquement nulle. Puisque $\tau_n \nearrow \infty$ P-pp, $0 = M^{\tau_n}_t \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} M_t$. P-ps.

Ceci implique que M est identiquement nul, et donc α et β sont nuls. ■

Le lemme qui suit esr en fait une conséquence de la preuve ci-dessus. Il est utile de la retenir.

Proposition 4.38 *Si M est une martingales local continu à variation bornée, alors $M_t \equiv 0$ pour tout t.*

Le résultat suivant généralise le théorème sur la convergence de la variation quadratique du mouvement brownien (Ch. 2). Soit $\Delta = \{t_1, \ldots, t_n\}$ avec $0 = t_0 < t_2 < ... < t_n = T$, une partition de l'intervalle $[0, T]$. Si X est un processus, nous définissons

$$T^\Delta_T(X) := \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

Nous allons traiter d'abord le cas de l'espace H^2_2.

Théorème 4.39 *Si $a \in H^2_2$ et*

$$X = \int_0^\cdot a_s dB_s,$$

alors pour tout $T > 0$ on a

$$T^\Delta_T(X) \to \int_0^T a^2_s ds$$

en L^1 lorsque $|\Delta| \to 0$

Preuve: Observons d'abord que si le processus a est dans $\mathcal{E}sc$, le résultat est une conséquence de la propriété de variation quadratique du mouvement brownien. En effet, pour tout intervalle de type $]a, b]$ ou u prend la valeur constante c, on a une contribution du type

$$c^2 \sum_{a \le t_{j-1} \le t_j \le b} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$$

qui converge vers $c^2(b - a)$.

Considérons maintenant $a \in H_2^2$. Par le théorème de densité de $\mathcal{E}sc$ dans H_2^2, il existe une suite a^k de $\mathcal{E}sc$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} E\int_0^T \left|a_t - a_t^k\right|^2 dt = 0.$$

On peut supposer que le processus a^k est constant sur $[t_j, t_{j+1})$, sinon il suffit d'inclure les points de la partition associés à a^k dans les t_j.

On aura, en posant $X_t^k = \int_0^t a_s^k dB_s$

$$\begin{aligned}
E\left(\left|T^\Delta(X) - \int_0^t a_s^2 ds\right|\right) \quad &\leq \quad E(|T^\Delta(X) - T^\Delta(X^k)|) \\
&\quad +E\left(\left|T^\Delta(X^k) - \int_0^t (a_s^k)^2 ds\right|\right) \\
&\quad +E\left(\left|\int_0^t (a_s^k)^2 ds - \int_0^t (a_s)^2 ds\right|\right).
\end{aligned}$$

On peut borner le premier terme en utilisant l'inégalité de Schwartz et l'isométrie de l'intégrale stochastique

$$\begin{aligned}
E(|T^\Delta(X) - T^\Delta(X^k)|) \quad &= \quad E\left[\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_s + a_s^k) dB_s\right)\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_s - a_s^k) dB_s\right)\right] \\
&\leq \quad \left(E(T^\Delta(X + X^k)\right)^{\frac{1}{2}} \left(E(T^\Delta(X - X^k)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \quad \left[E\left(\int_0^t (a_s + a_s^k)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} E\left(\int_0^t (a_s - a_s^k)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

Observons que la borne obtenue ne dépend pas de n et converge quand $k \to \infty$. Donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$E\left(\left|T^\Delta(X) - \int_0^t a_s^2 ds\right|\right) \leq \varepsilon + E\left(\left|T^\Delta(X^k) - \int_0^t (a_s^k)^2 ds\right|\right).$$

Il suffit maintenant de prendre la limite lorsque la norme de la division tend vers 0. ■

Nous présentons également un cas plus général avec une preuve un peu différente.

Théorème 4.40 *Si $a \in H_2^{loc}$ et $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$, alors $T^\Delta(X) \to \int_0^T a_s^2 ds$ en probabilité lorsque $|\Delta| \to 0$*

Preuve: Soit $a \in H_2^{loc}$ et $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$. Posons

$$\tau_n := \inf\{t : |X_t| \geq n \text{ ou } \int_0^t a_s^2 ds \geq n\},$$

$a_n := \mathbf{1}_{[0,\tau_n[}a$ et $X_n := \int_0^\cdot a_{n,s}dB_s$. Il suit de la définition de $\int_0^\cdot a_s dB_s$ que $X_n = X^{\tau_n}$, et nous avons aussi $\int_0^T a_{n,s}^2 ds = \int_0^{T\wedge\tau_n} a_s^2 ds$, de sorte que sur $\{\tau_n \geq T\}$, pour tout Δ, $T^\Delta(X_n) = T^\Delta(X)$ et $\int_0^T a_{n,s}^2 ds = \int_0^T a_s^2 ds$. Il nous suffit donc d'établir le résultat pour les processus $a \in H_2^2$ tels que $|X|$ et $\int_0^\infty a_s^2 ds$ soient bornés: le résultat sera vrai pour a_n et donc, $\forall \delta > 0$, $P(|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta)$ est borné par

$$P(\tau_n < T) + P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta\}).$$

$P(\tau_n < T)$ est aussi petit que l'on désire en prenant n suffisemment grand et $P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds| > \delta\})$ est égal à

$$P(\{\tau_n \geq T\} \cap \{|T^\Delta(X_n) - \int_0^T a_{n,s}^2 ds| > \delta\}).$$

Ce dernier terme est aussi petit que l'on désire en prenant $|\Delta|$ suffisemment petit.

Supposons donc que $a \in H_2^2$ est tel que $|X|$ et $\int_0^\infty a_s^2 ds$ soient bornés par M. Notons $\Delta X_i := X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ et calculons $E[(\Delta X_i)^2|\mathcal{F}_{t_i}]$: Si $A \in \mathcal{F}_{t_i}$, il suit de l'exercice 4.19 que

$$\mathbf{1}_A \Delta X_i = \mathbf{1}_A \int_0^\infty \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s) a_s dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s) a_s dB_s.$$

Aussi:

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{1}_A(\Delta X_i)^2] &= E[(\mathbf{1}_A\Delta X_i)^2] = I(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}a)\|_{L^2}^2 \\
&= \|\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}a\|_{H_2^2}^2 = E[\mathbf{1}_A \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds] \\
&= E[\mathbf{1}_A E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds|\mathcal{F}_{t_i}]]
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_{t_i}$, nous avons montré que

$$E[(\Delta X_i)^2|\mathcal{F}_{t_i}] = E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds|\mathcal{F}_{t_i}].$$

Ainsi, si l'on pose $V_0 := 0$ et $V_{i+1} := V_i + (\Delta X_i)^2 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s^2 ds$, V est une $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_{i=0,\ldots,n}$-martingale et $V_n = T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds$. Dès lors:

$$\begin{aligned}
E[(T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds)^2] &= E[V_n^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E[(V_{i+1} - V_i)^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E[((\Delta X_i)^2 - E[(\Delta X_i)^2|\mathcal{F}_{t_i}])^2] \leq \sum_{i=0}^{n-1} E[(\Delta X_i)^4], \quad (5)
\end{aligned}$$

car, en posant $S := (\Delta X_i)^2$, on a:

$$E[S^2] = E[(S - E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2] + E[(E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2] \geq E[(S - E[S|\mathcal{F}_{t_i}])^2].$$

Remarquons ensuite que

$$E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^4] \leq E[\Delta X_*^2 \cdot T^\Delta(X)] \leq \sqrt{E[\Delta X_*^4]} \cdot \sqrt{E[(T^\Delta(X))^2]},$$

où $\Delta X_* := \max_i(\Delta X_i)$. Puisque X est un processus continu, ΔX_* tend P-pp vers 0 lorsque $|\Delta| \to 0$, et par ailleurs ΔX_* est borné par $2M$, puisque X est borné par M. Partant $\sqrt{E[\Delta X_*^4]}$ tend vers 0.

Nous allons montrer maitenant que $E[(T^\Delta(X))^2]$ est borné. Nous aurons ainsi démontré la convergence L^2 de $T^\Delta(X)$ vers $\int_0^T a_s^2 ds$, et donc la convergence en probabilité. En utilisant l'inégalité (5), le fait que X est une martingale bornée par M et que $\int_0^\infty a_s^2 ds \leq M$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|T^\Delta(X)\|_{L^2} &\leq \|T^\Delta(X) - \int_0^T a_s^2 ds\|_{L^2} + \|\int_0^T a_s^2 ds\|_{L^2} \\
&\leq \sqrt{E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^4]} + M \\
&\leq \sqrt{(2M)^2 E[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^2]} + M \\
&= \sqrt{(2M)^2 E[X_T^2]} + M \\
&= 2M^2 + M.
\end{aligned}$$

■

Définition 4.41 *Un processus A continu tel que pour tout T: $T^\Delta(X)$ converge en probabilité vers A_T lorsque le diamètre $|\Delta|$ de la partition de $[0,T]$ tend vers 0 s'appelle crochet de X et se note, $\langle X, X\rangle := A$.*

Remarque 4.42 *Le théorème précédent nous indique que si $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$ où $a \in H_2^{loc}$, alors $\langle X, X\rangle_t = \int_0^t a_s^2 ds$.*

Définition 4.43 *(Crochet croisé) Si X et Y sont deux processus, on note*

$$T^\Delta(X, Y) := \sum_{i=1}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \cdot (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

Un processus A limite en probabilité des $T^\Delta(X, Y)$ s'appelle crochet croisé de X et Y et se note $\langle X, Y\rangle$.

L'exercice qui suit donnera le crochet d'une semimartingale ainsi que le crochet croisé d'une martingale est d'un processus à variation bornée (absolument continu)

Exercice 4.44 *1) Montrez que si* $Y = \int_0^\cdot b_s ds$ *où* $b \in H_1^{loc}$*, alors* $\langle Y, Y \rangle = 0$.

2) Si $X = \int_0^\cdot a_s dB_s$ *où* $a \in H_2^{loc}$*, montrez que* $T^\Delta(X, Y) \to 0$ *en probabilité. (i.e.* $\langle X, Y \rangle = 0$*).*

3) Si $X = X_0 + \int_0^\cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot b_t dt$ *est une semi-martingale, montrez que* $\langle X, X \rangle_t = \int_0^t a_s^2 ds$.

4) Montrez que $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\langle X+Y, X+Y \rangle + \langle X-Y, X-Y \rangle)$ *et calculez le crochet croisé* $\langle X, Y \rangle$ *de deux semi-martingales* $X = X_0 + \int_0^\cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot b_t dt$ *et* $Y = Y_0 + \int_0^\cdot a'_t dB_t + \int_0^\cdot b'_t dt$.

5) Supposons que B_1 *et* B_2 *soient deux* $\{\mathcal{F}_t\}$*-mouvements browniens indépendants. Calculez* $\langle B_1 + B_2, B_1 + B_2 \rangle$, $\langle B_1 - B_2, B_1 - B_2 \rangle$ *et finalement montrez que* $\langle B_1, B_2 \rangle = 0$.

Exercice 4.45 *L'objet de cet exercice est de montrer que si* B^1 *et* B^2 *sont des mouvements browniens indépendents, si* $a^1, a^2 \in H_2^{loc}$ *et* $X^i := \int_0^\cdot a_t^i dB_t^i$*, alors* $\langle X^1, X^2 \rangle = 0$.

1) Montrez que pour démontrer cette affirmation, il suffit de la prouver pour des processus a^i *tels que* X^i *et* $\int_0^\cdot (a_s^i)^2 ds$ *soient bornés par une constante* M*. Nous supposerons donc que ces hypothèses sont vérifiées dans la suite de l'exercice.*

2) Soit $S > T$ *et* $A \in \mathcal{F}_T$*, et considérons l'application*

$$F : H_2^2 \times H_2^2 \to I\!R, (u, v) \to F(u, v) := E[\mathbf{1}_A \int_T^S u_t dB_t^1 \cdot \int_T^S v_t dB_t^2].$$

Montrer que F *est bilinéaire et continue:*

$$|F(u, v)| \leq \|u\|_{H_2^2} \cdot \|v\|_{H_2^2}.$$

3) Montrez que si $u = \phi \mathbf{1}_{[t^1, t^2[}$, $v = \psi \mathbf{1}_{[s^1, s^2[}$*, avec* $t^1 < t^2$, $\phi \in L^2(\mathcal{F}_{t^1})$, $s_1 < s_2$ *et* $\psi \in L^2(\mathcal{F}_{s^1})$*, alors* $F(u, v) = 0$.

Concluez que $\forall u, v \in H_2^2 : F(u, v) = 0$.

4) Montrez que le processus $Z_t = X_t^1 \cdot X_t^2$ *est une martingale.*

5) Soit Δ *une partition de* $[0, T]$*. Nous reprenons les notations de l'exercice précédent et du théorème 4.40. Montrez que*

$$2(\Delta Z_i)^2 \leq (\Delta X_i^1)^4 + (\Delta X_i^2)^4$$

6) Montrez que $E[(T^\Delta(X^1, X^2))^2] = E[\sum_{i=1}^{n-1} (\Delta Z_i)^2]$*. En utilisant la fin de la preuve du théorème 4.40, montrez que* $T^\Delta(X^1, X^2) \to 0$ *dans* L^2 *lorsque* $|\Delta|$ *tend vers 0.*

7) En utilisant les résultats de cet exercice et du précédent, calculez le crochet $\langle X, X \rangle$ *de la semi-martingale générale définie à la définition 4.35 formule (4).*

5 Formule de changement de variable (formule d'Itô)

L'intégrale stochastique par rapport a une semimartingale sera définie de la manière suivante.

Définition 5.1 *Si v_t est progressivement mesurable, on convient alors d'écrire*

$$\int_0^\cdot v_t dX_t := \int_0^\cdot v_t \cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot v_t \cdot b_t dt.$$

Voici une première étape vers l'obtention de la formule d'Itô.

Exercice 5.2 *Si $X = X_0 + \int_0^\cdot a_t dB_t + \int_0^\cdot b_t dt$ est une semi-martingale alors pour tout t:*

$$X_t^2 \overset{P\text{-}pp}{=} X_0^2 + \int_0^t 2X_s\, dX_s + \int_0^t d\langle X, X\rangle_s$$

En particulier, les processus se situant de part et d'autre de l'égalité sont indistinguables.

Preuve: Comme pour la démonstration précédente, par arrêt à des temps τ_n appropriés, il suffit de démontrer le corollaire pour des processus tels que X, $\int_0^\infty a_s^2 ds$ et $\int_0^\infty |b_s| ds$ soient bornés.

Fixons T et remarquons que si Δ est une partition de $[0, T]$, alors:

$$\begin{aligned}
X_T^2 &= X_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2) = X_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1}((X_{t_i} + \Delta X_i)^2 - X_{t_i}^2) \\
&= X_0^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\Delta X_i + \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_i)^2 \\
&= X_0^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} a_s dB_s + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} b_s ds + T^\Delta(X)
\end{aligned}$$

Utilisant le fait que X est borné et continu, il est aisé de remarquer que le processus

$$\phi_s := \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\mathbf{1}_{[t_i t_{i+1}[}(s) a_s$$

converge vers $X_s a_s$ dans H_2^2 lorsque $|\Delta| \to 0$. La première somme convergera donc dans L^2 vers $2\int_0^T X_s a_s dB_s$ et donc aussi en probabilité. Par un raisonnement analogue la deuxième somme convergera vers $2\int_0^T X_s b_s ds$ en probabilité. Enfin $T^\Delta(X)$ converge en probabilité vers $\langle X, X\rangle$ par définition du crochet de X. La première assertion est donc démontrée.

Les processus d'une part et de l'autre part de l'égalité sont continus. Nous venons de démontrer qu'ils sont des modifications l'un de l'autre. Ils sont donc indistinguables, comme il ressort de l'exercice 1.40, Ch. 3. ■

Exercice 5.3 *Si X et Y sont deux semi-martingales, montrez que*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t d\langle X, Y\rangle_s.$$

Preuve: On sait que $X_tY_t = \frac{1}{4}[(X_t + Y_t)^2 - (X_t - Y_t)^2]$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent aux martingales $X + Y$ et $X - Y$. ■

Le dernier exercice montre que le produit de deux semi-martingales est encore une semi-martingale. Le théorème suivant montre qu'enfait une fonction régulière d'une semi-martingale en est encore une:

Théorème 5.4 *(Formule d'Itô) Si X est une semimartingale de la forme (3) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)a_s dB_s + \int_0^t f'(X_s)b_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)a_s^2 ds \qquad (6)$$

ou, autrement dit

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s.$$

Preuve: Nous allons donner les idées de la démonstration dans le cas particulier $b = 0$.

Par un argument de localisation, on peut supposer que f, f', f'' sont bornées. En effet, pour tout $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \inf\{t \geq 0; |X_0| + |\int_0^t a_s dB_s| + |\int_0^t a_s^2 ds| \geq n\} \wedge n.$$

Il est clair que T_n est un temps d'arrêt tel que $T_n \nearrow \infty$. Considérons la semimartingale $X_{t\wedge T_n}$. Alors

$$|X_{t\wedge T_n}| \leq n$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $t \geq 0$. Il suffit de prouver (6) pour $X_{t\wedge T_n}$ à la place de X_t (car après on prend la limite quand $n \to \infty$). De cette façon, tout se réduit à prouver (6) pour X tel que

$$|\int_0^t a_s dB_s| + |X_t| \leq c$$

et dans ce cas il y a que les valeurs de f, f', f'' sur le compact $[0, t] \times B(\bar{0}, c)$ qui interviennent. Donc f, f', f'' peuvent être supposées continues à support compact, donc bornées.

D'une autre part, en approximant a par une suite de processus bornés de $\mathcal{E}sc$ telle que

$$P\left(\int_0^t (a_s - a_s^n)^2 ds > \varepsilon\right) \to_{n\to\infty} 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prouver (6) pour un processus a escalier borné.

Considérons $t_j = \frac{tj}{n}$. On peut supposer par un argument standard que le processus a est constant sur $[t_j, t_{j+1})$, sinon il suffit d'inclure les points de la partition associés à a dans les t_j.

La formule de Taylor d'ordre 2 nous donne

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} \left(f(X_{t_j}) - f(X_{t_{j-1}}) \right) \\ &= f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} f'(X_{t_{j-1}}) \Delta X_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} f''(\bar{X}_j)(\Delta X_j)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

où $\Delta X_j = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ et $\bar{X}_j$ est un point situé entre $X_{t_{j-1}}$ et X_{t_j}.

La première somme à droite de (7) converge dans L^2 vers $\int_0^t f'(X_s) a_s dB_s$. En effet

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{j=1}^{n} f'(X_{t_{j-1}}) \Delta X_j - \int_0^t f'(X_s) a_s dB_s \right]^2 \\ = \;& E \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f'(X_{t_{j-1}}) - f'(X_s))^2 a_s^2 ds \right) \\ \leq \;& K^2 t E \left(\sup_{|s-r| \leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \right) \end{aligned}$$

en assumant que a est majoré par la constante K. Cela converge vers zero car $f(X_t)$ est continu est borné.

La deuxième somme à droite de (7) converge dans L^2 vers

$$\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) a_s^2 ds$$

car

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{n} f''(\bar{X}_j)(\Delta X_j)^2 - \int_0^t f''(X_s) a_s^2 ds \right| \\ \leq \;& \left| \sum_{j=1}^{n} (f''(\bar{X}_j) - f''(X_{t_{j-1}}))(\Delta X_j)^2 \right|^2 + \left| f''(X_{t_{j-1}}) \left((\Delta X_j)^2 - \int_{t_{j-1}}^{t_j} a_s^2 ds \right) \right| \\ & + \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(f''(X_{t_{j-1}}) - f''(X_s) \right) a_s^2 ds \right| \\ := \;& a_1 + a_2 + a_3. \end{aligned}$$

Les termes a_1 et a_3 se traitent par les majorations

$$a_1 \leq \sup_{|r-s|\leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \sum_{j=1}^{n} (\Delta X_j)^2$$

et

$$a_3 \leq \sup_{|r-s|\leq t/n} (f'(X_r) - f'(X_s))^2 \int_0^t a_s^2 ds$$

donc ils convergent vers zero.

Voyons le terme a_2. Notons ϕ_j la valeur du processus escalier a sur $[t_{j-1}, t_j[$. Comme $\Delta X_j = \phi_j \Delta B_j$ et en posant

$$d_j := \phi_j f''(X_{t_{j-1}})$$

on obtient en utilisant l'indépendance des acroissements du brown ien et en notant $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$

$$\begin{aligned}
E(a_2^2) &\leq E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} E\left(d_j^2 \left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 E\left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 E\left((\Delta B_j)^4 - 2(\Delta B_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} E d_j^2 (\Delta t_j)^2 \leq \frac{2t}{n} \sum_{j=1}^{n} E d_j^2 (\Delta t_j) \to_{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.5 *Parfois on utilise la relation différentielle*

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X, X\rangle_t$$

Exercice 5.6 *Comparer la formule d'Itô pour $f(x) = x^2$ avec celle donne par l'exercice 5.2.*

Théorème 5.7 *(Formule d'Itô pour des fonctions qui dépendent de temps) Soit $f = f(t,x)$ une fonction de classe $C^{1,2}$ et soit $Y_t = f(t, X_t)$ si X est une semimartingale de la forme (3). Alors*

$$\begin{aligned} f(t, Y_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)a_s dB_s \\ & \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)b_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)a_s^2 ds. \end{aligned}$$

On présente la version multidimensionnelle de la formule d'Itô ainsi que le schéma de la preuve.

Théorème 5.8 *(Formule d'Itô multi-dimensionnelle) Si $f : I\!R^d \to I\!R$ est $\mathcal{C}^2$, si*

$$X^j = X_0^j + \sum_k \int_0^{\cdot} a_s^{k,j} dB_s^k + \int_0^{\cdot} b_s^j ds$$

sont des semi-martingales et si $X := (X^1, \cdots, X^d)$, alors:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,j'} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{j'}}(X_s) d\langle X^j, X^{j'}\rangle_s. \end{aligned} \tag{8}$$

Preuve: Par la technique d'arrêt des démonstrations précédentes, il suffit de démontrer le résultat pour les semi-martingales X à valeurs dans un ensemble compact K de $I\!R^d$. Soit $\mathcal{V}$ la classe des fonctions $f : K \to I\!R$ vérifiant le théorème.

Les fonctions constantes ainsi que les fonctons

$$g^j : x = (x^1, \cdots, x^d) \to g^j(x) := x^j$$

sont dans $\mathcal{V}$.

Par linéarité en f de la formule (8), si f et g sont dans $\mathcal{V}$ et $\alpha, \beta \in I\!R$ alors clairement $\alpha f + \beta g \in \mathcal{V}$.

Montrons que si f et g sont dans $\mathcal{V}$ alors $h := f \cdot g$ l'est également. Soit $F_t := f(X_t)$, $G_t := g(X_t)$, $H_t := g(X_t)$, Par d'exercice 5.3, nous avons:

$$dH_t = F_t dG_t + G_t dF_t + d\langle F, G\rangle_t$$

Puisque f et g sont dans $\mathcal{V}$, on trouve:

$$\begin{aligned} dF_t &= \textstyle\sum_j \partial_j f(X_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j,j'} \partial_{j,j'} f(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \\ dG_t &= \textstyle\sum_j \partial_j g(X_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j,j'} \partial_{j,j'} g(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \end{aligned}$$

Puisque les termes en $d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t$ sont à 1-variation bornée, ils n'interviennent pas dans le calcul de $d\langle F, G\rangle_t$. On trouve alors:

$$d\langle F, G\rangle_t = \sum_{j,j'} \partial_j f(X_t) \cdot \partial_{j'} g(X_t) \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t.$$

Aussi

$$\begin{array}{rcl} dH_t & = & \sum_j (G_t \partial_j f(X_t) + F_t \partial_j g(X_t)) \cdot dX_t^j \\ & & + \frac{1}{2} \sum_{j,j'} L_t^{j,j'} \cdot d\langle X^j, X^{j'}\rangle_t \end{array}$$

où $L_t^{j,j'} = (G_t \partial_{j,j'} f(X_t) + F_t \partial_{j,j'} g(X_t) + 2\partial_j f(X_t) \cdot \partial_{j'} g(X_t))$. Puisque $\partial_j h(X_t) = G_t \partial_j f(X_t) + F_t \partial_j g(X_t)$ et $\partial_{j,j'} h(X_t) = L_t^{j,j'}$, on en conclut donc que dH_t vérifie bien la formule (8) et partant $h \in \mathcal{V}$.

De ce qui précède, on conclut que $\mathcal{V}$ contient tous les polynômes. Soit $\epsilon > 0$. Toute fonction $f \in \mathcal{C}_2$ peut être approximée sur K par un polynôme g tel que $\|f - g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$, $\forall j$: $\|\partial_j f - \partial_j g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$ et $\forall j, j'$: $\|\partial_{j,j'} f - \partial_{j,j'} g\|_{\infty,K} \leq \epsilon$. Puisque la formule (8) est vérifiée par g, elle sera vérifiée par f par passage à la limite, et le théorème est donc démontré. ■

5.1 Applications de la formule d'Itô

Les exercices qui suivent constituent quelques applications immédiates de la formule d'Itô.

Exercice 5.9 *Montrer que, si B est le mouvement brownien, alors*

$$B_t^n = n \int_0^t B_s^{n-1} dB_s + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t B_s^{n-2} ds.$$

Exercice 5.10 *En utilisant la formule d'Itô, montrez que, si B est un mouvement brownien, alors $M_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$ est une martingale locale.*

Preuve: Soit $f(x) := \exp(x)$ et $X_t := \alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t$. Puisque $X_t = \int_0^t \alpha dB_s + \int_0^t (-\alpha^2/2) ds$, on a $\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \alpha^2 ds = \alpha^2 t$. La formule d'Itô nous donne donc, avec $f(x) = f'(x) = f''(x)$:

$$\begin{array}{rcl} M_t & = & f(M_t) \\ & = & f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X\rangle_s \\ & = & f(0) + \int_0^t M_s \alpha dB_s - \int_0^t M_s \frac{\alpha^2}{2} ds + \frac{1}{2} \int_0^t M_s \alpha^2 ds \\ & = & 1 + \int_0^t M_s \alpha dB_s \end{array}$$

Puisque les trajectoires de B et donc de M sont continues, la variable $M_T^* := \sup\{M_s : 0 \leq s \leq T\}$ est, pour tout $T < \infty$, une variable P-pp finie. Puisque $\int_0^T M_s^2 \alpha^2 ds \leq$

$M_T^{*2} \cdot \alpha^2 \cdot T$, le processus $M_t\alpha$ appartient à H_2^{loc}. Son intégrale $\int_0^\cdot M_s \alpha dB_s$ est donc une martingale locale et il en est alors de même pour M. ■

Définition 5.11 *Si X et Y sont deux semimartingales, on définit l'intégrale de Stratonovich de X par rapport à Y par*

$$\int_0^t X_s d \circ Y_s = \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle_t.$$

Exercice 5.12 *En déduire de l'exercice 5.3 que*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s d \circ Y_s + \int_0^t Y_s d \circ X_s$$

Exercice 5.13 *Montrer que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(X_{t_{i+1}} + X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

converge en probabilité vers $\int_0^t X_s d \circ Y_s$ si $0 = t_0 < \ldots t_n = t$ est une partition de $[0, t]$.

Exercice 5.14 *Soit B^1, B^2, B^3 trois mouvements browniens indépéndants. Soit $f(x_1, x_2, x_3) := (\sum_{i=1}^3 (1 + x_i)^2)^{-1/2}$ et $Z_t := f(B_t^1, B_t^2, B_t^3)$.*

1) Montrez que $\sum_{i=1}^3 \partial_{i,i} f(x_1, , x_2, x_3) = 0$, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \neq (-1, -1, -1)$.

2) Soit $\tau_n := \inf\{t : Z_t \geq n\}$. En utilisant la formule d'Itô, montrez que Z^{τ_n} est une martingale positive bornée par n.

3) Montrez que $E[Z_{\tau_n}] = 1/\sqrt{3}$. Déduire de cela que

$$P(\tau_n < \infty) \leq 1/(n\sqrt{3})$$

et que $\tau_n \nearrow \infty$ P-ps. Z est donc une martingale locale.

4) Soit $\sigma_m := \inf\{t : Z_t \leq 1/m\}$. En utilisant le corollaire 2.15, montrez que $\sigma_m < \infty$ P-ps. Montrez ensuite que $\sigma_m \nearrow \infty$ P-ps.

Montrez que $Z_{\tau_n \wedge \sigma_m} \in \{1/m, n\}$ P-ps. et que $Z_{\tau_n \wedge \sigma_m} \xrightarrow{P\text{-}pp} Z_{\tau_n}$ lorsque $m \to \infty$. Déduizez-en que $Z_{\tau_n} = n \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n < \infty\}}$ P-ps.

5) Montrez que $Z_{\tau_n} \xrightarrow{P\text{-}pp} 0$ lorsque n tend vers l'infini.

6) En utilisant la densité normale, montrez qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\forall t$ $E[Z_t^2] \leq C$.

7) Si Z était une martingale, nous aurions $Z \in \mathcal{M}^2$. Montrez qu'en vertu du corollaire 4.22, Z ne peut donc être une martingale.

Z est donc une martingale locale bornée en norme L^2 (donc U.I.) qui n'est pas une martingale.