Statistiques et Probabilités, L2 MASS, Partiel session 2

27/06/2014, Durée : deux heures

Le barème est indicatif. Documents, téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Variables à densité *(5 points)*

Soient a et b les réels positifs, la fonction

$$f(x) = a\sqrt{b - |x|}.$$

1. Montrer que a et b doivent vérifier la condition $ab^{3/2} = \frac{3}{4}$ pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité.

2. Supposons que $f(x)$ est une densité de probabilité avec $b = 1$. Calculer la fonction de répartition, l'espérance et la variance.

Exercice 2. Chaîne de Markov *(7,5 points)*

On considère la chaîne de Markov définie sur un espace E de matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est l'ensemble des états récurrents ? Calculer la mesure invariante.

2. On suppose que l'on observe la trajectoire $(X_1, \ldots, X_{10})$, où X_1 suit la loi uniforme sur E.

a) Calculer la probabilité que les X_i soient tous égaux.

b) Calculer la probabilité que les X_i soient tous égaux sauf un.

c) Calculer la probabilité que deux X_i soient égaux au premier élément de E et les huit autres au second.

Exercice 3. Variables discrètes *(7,5 points)*

On considère une suite $(Y_1, \ldots, Y_n)$ i.i.d. telles que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_i = -1)$, où $p \in [0, 1]$ est un paramètre réel.

1. Calculer $\mathbb{E}(Y_i)$, ainsi que $\mathrm{Var}\,(Y_i)$.

2. Montrer que la vraisemblance d'une réalisation $(y_1, \ldots, y_n)$ de $(Y_1, \ldots, Y_n)$ en fonction de p est :

$$L_p(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{\frac{y_i+1}{2}} (1-p)^{-\frac{y_i-1}{2}}.$$

3. Calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{p}$ de p.

4. Quelle est l'espérance de $\hat{p}$? Sa variance ?

5. Montrer que $\hat{p}$ converge vers p en probabilité.

6. En faisant une approximation gaussienne, donner un intervalle de confiance à 95% pour p. On rappelle que pour une variable aléatoire X suivant la loi gaussienne de moyenne 0 et de variance 1 on a

$$\mathbb{P}(X \leq -2.32) = 0.01; \mathbb{P}(X \leq -1.96) = 0.025; \mathbb{P}(X \leq -1.64) = 0.05; \mathbb{P}(X \leq -1.28) = 0.10.$$