Solutions CC1

1. Couple de variables aléatoires

1) La loi du couple et les lois marginales :

Y\X	0	1	2	marg. Y
0	1/6	1/6	1/6	1/2
1	1/6	0	1/12	1/4
2	1/6	1/12	0	1/4
marg. X	1/2	1/4	1/4	

X et Y ne sont pas indépendantes.
2) Les espérances : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
Les variances : $\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = \frac{5}{4} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{11}{16}$.

3)

XY	0	2
$\mathbb{P}$	5/6	1/6

$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \frac{1}{3} - (\frac{3}{4})^2 = -\frac{11}{48}$.

4)

$Z = X + Y$	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	1/6	1/3	1/3	1/6

5)

$G = 5 \times (X + Y)$	0	5	10	15
$\mathbb{P}$	1/6	1/3	1/3	1/6

$\mathbb{E}(G) = 5 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{3} + 15 \times \frac{1}{6} = \frac{15}{2}$, $\mathbb{E}(G) = 5^2 \times \frac{1}{3} + 10^2 \times \frac{1}{3} + 15^2 \times \frac{1}{6} = \frac{475}{6}$, $\mathrm{Var}\,(G) = \frac{475}{6} - (\frac{15}{2})^2 = \frac{275}{12}$.

2. Chaîne de Markov

1) Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2) Notons X_0 le temps du jour de départ. La loi de probabilités du temps pour le surlendemain est $M^2 X_0$. Puisque $X_0 = e_1 = (1, 0, 0)^T$, $M^2 X_0$ est la première colonne de M^2 qui est $(1/4, 1/3, 5/12)^T$. Le temps le plus probable est donc la neige.

3) Notons $X_1, X_2, \ldots, X_7$ les temps des jours de la semaine. D'après l'énoncé, on a $X_1 = e_2$. La probabilité qu'il pleuve jusqu'au mercredi et il fasse beau jeudi est

$$\mathbb{P}(X_1 = e_2, X_2 = e_2, X_3 = e_2, X_4 = e_1) = p_{12} p_{22} p_{22} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

La probabilité qu'il pleuve mercredi sachant qu'il fasse beau jeudi est

$$\mathbb{P}(X_3 = e_2 | X_4 = e_1) = \frac{\mathbb{P}(X_3 = e_2, X_4 = e_1)}{\mathbb{P}(X_4 = e_1)} = \frac{\mathbb{P}(X_4 = e_1 | X_3 = e_2)\mathbb{P}(X_3 = e_2)}{\mathbb{P}(X_4 = e_1)} =$$

$$= \frac{p_{12 \times M^2_{(2,2)}}}{M^3_{(1,2)}} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{19}{48}}{\frac{13}{64}} = \frac{19}{39}.$$

4) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

5) $\mu = (1/3, 2/3)^T$