Solutions, CC1, 11/2017

Exercice. Variables aléatoires discrètes

AM

1. $Y \sim \mathcal{B}in(5, 4/7)$
2. $C_5^3 (4/7)^3 (3/7)^2$
3. $1 - (1/4)^5$
4. récurrents : $e_1,\ e_2,\ e_3$.
5. $4/7 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 3/5 \cdot 1/3$
6. $(2/9, 1/2, 5/18)^T$
7. e_2

BM

1. $Y \sim \mathcal{B}in(4, 1/2)$
2. $C_4^3 (1/2)^4$
3. $1 - (1/3)^4$
4. récurrents : $e_1,\ e_2,\ e_3$.
5. $1/2 \cdot 2/3 \cdot 2/5 \cdot 1/3 \cdot 1/2$
6. $(3/10, 1/2, 1/5)^T$
7. e_2

AJ

1. $Y \sim \mathcal{B}in(6, 2/3)$
2. $C_6^4 (2/3)^4 (1/3)^2$
3. $1 - (1/4)^6$
4. récurrents : $e_1,\ e_3$, transitoire : e_2
5. $1/6 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 2/3 \cdot 2/5$
6. $(10/19, 0, 9/19)^T$
7. e_1

BJ

1. $Y \sim \mathcal{B}in(5, 1/2)$
2. $C_5^3 (1/2)^5$
3. $1 - (1/3)^5$
4. récurrents : $e_1,\ e_2,\ e_3$.
5. $1/3 \cdot 2/5 \cdot 1/2 \cdot 2/3 \cdot 1/2$
6. $(6/19, 3/19, 10/19)^T$
7. e_3

Exercice. Couple d'entiers

1. $\underline{\text{AM}}$: $a = 1/(e+1)$
$\underline{\text{BM}}$: $a = e - 1$
$\underline{\text{AJ}}$: $a = e + 1$
$\underline{\text{BJ}}$: $a = e$
2. $P(X = i) = (\frac{1}{e+1})^{i-1}\frac{e}{e+1}$
$P(Y = j) = \frac{1}{j!}e^{-1}$
3. $X \sim \mathcal{G}(\frac{e}{e+1})$, $Y \sim \mathcal{P}(1)$.
4. Oui
5. $\underline{\text{AM}}$ et $\underline{\text{AJ}}$: $E(S) = \frac{e+1}{e} + 1$
$\underline{\text{BM}}$ et $\underline{\text{BJ}}$: $E(S) = \frac{e+1}{e} - 1$
$Var(S) = \frac{1}{e+1}/(\frac{e}{e+1})^2 + 1 = \frac{e^2+e+1}{e^2}$

Exercice. Chaîne de Markov

1. On remarque que $\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n, \ldots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1}|X_n)$ la suite vérifie bien la propriété de Markov. Il s'agit bien d'une chaîne de Markov.
2. $\underline{\text{AM}}$: $\{0, 1, 2\}$, récurrents : 0, 1, transitoires : 2.
$\underline{\text{BM}}$: $\{-1, 0, 1\}$, récurrents : 0, 1, transitoires : -1.
$\underline{\text{AJ}}$: $\{0, 1, 2\}$, récurrents : 1, 2, transitoires : 0.
$\underline{\text{BJ}}$: $\{1, 2, 3\}$, récurrents : 1, 2, transitoires : 3.
3. $\underline{\text{AM}}$:

$$M = \begin{pmatrix} 3/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\text{BM}}$:

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\text{AJ}}$:

$$M = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & 4/5 & 4/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\text{BJ}}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$