Correction CC1 2018

Exercice. Couple de variables aléatoires

Sujet A

1. La loi marginale de X :

X	0	0.5	1
$\mathbb{P}_X$	0.3	0.4	0.3

La loi marginale de Y :

Y	0	0.5	1
$\mathbb{P}_Y$	0.3	0.4	0.3

2. La loi conditionnelle :

X	0	0.5	1
$\mathbb{P}(X\|Y=0.5)$	1/4	1/2	1/4

3. $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \times 0.4 + 1 \times 0.3 = 0.5$.
$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{4} \times 0.4 + 1 \times 0.3 = 0.4$, $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = 0.4 - 0.5^2 = 0.15$.
$\mathbb{E}(X|Y = 0.5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0.5$.

4.

XY	0	1/4	1/2	1
$\mathbb{P}_{XY}$	0.5	0.2	0.2	0.1

$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{4} \times 0.2 + \frac{1}{2} \times 0.2 + 1 \times 0.1 = 0.25$, $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0.25 - 0.5^2 = 0$.
La matrice de covariance est $\begin{pmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix}$.

X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0.1$, mais $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = 0.3 \times 0.3 = 0.09$.

Sujet B

1. La loi marginale de X :

X	0	1	2
$\mathbb{P}_X$	0.3	0.4	0.3

La loi marginale de Y :

Y	0	1	2
$\mathbb{P}_Y$	0.3	0.4	0.3

2. La loi conditionnelle :

Y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y\|X=0)$	1/3	1/3	1/3

3. $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1$.
$\mathbb{E}(Y^2) = 1 \times 0.4 + 4 \times 0.3 = 1.6$, $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = 1.6 - 1^2 = 0.6$.
$\mathbb{E}(Y|X = 0) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$.

4.

XY	0	1	2	4
$\mathbb{P}_{XY}$	0.5	0.2	0.2	0.1

$\mathbb{E}(XY) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 1$, $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 1 - 1^2 = 0$.
La matrice de covariance est $\begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$.

X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0.1$, mais $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = 0.3 \times 0.3 = 0.09$.

Exercice. Chaîne de Markov

Sujet A

1. Comme X_{n+1} ne dépend que de X_n et e_n, on a $\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n, \ldots, X_1) = \mathbb{P}(X_{n+1}|X_n)$, donc c'est une chaîne de Markov.

2. Les états possibles sont $-1, 0, 1$. Ils sont tous récurrents.

3. Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 3/4 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\mu = (1/16, 3/4, 3/16)^T$.

Sujet B

1. Comme X_{n+1} ne dépend que de X_n et e_n, on a $\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n, \ldots, X_1) = \mathbb{P}(X_{n+1}|X_n)$, donc c'est une chaîne de Markov.

2. Les états possibles sont $-1, 0, 1$. Ils sont tous récurrents.

3. Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\mu = (4/9, 1/3, 2/9)^T$.

Exercice. Couple d'entiers

Sujet A

1. On a

$$\sum_{k \in N^*} \sum_{n \in N} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \sum_{k=1}^{9} \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha^n (1-\alpha)^{k-n} k!}{n!(k-n)!C} = \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{k} C_k^n \alpha^n (1-\alpha)^{k-n} = \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{C} = \frac{9}{C} = 1$$

donc $C = 9$.

2. D'après la loi jointe on a $X \in \{1, \ldots, 9\}$. On a

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n \in N} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha^n (1-\alpha)^{k-n} k!}{n!(k-n)!C} = \frac{1}{C} = \frac{1}{9}.$$

La loi de X est donc uniforme de paramètre 9.

3. $\mathbb{P}(Y=9)=\sum_{k\in N^*}\mathbb{P}(X=k,Y=9)=\mathbb{P}(X=9,Y=9)=\frac{\alpha^9}{C}=\frac{\alpha^9}{9}$.

4. X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple $\mathbb{P}(X=1,Y=9)=0$, mais $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=9)=\frac{1}{9}\times\frac{\alpha^9}{9}\neq 0$.

Sujet B

1. On a

$$\sum_{k\in N^*}\sum_{n\in N}\mathbb{P}(X=k,Y=n)=\sum_{k=1}^{8}\sum_{n=0}^{k}\frac{(1-\alpha)^n\alpha^{k-n}k!}{n!(k-n)!C}=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{C}\sum_{n=0}^{k}C_k^n(1-\alpha)^n\alpha^{k-n}=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{C}=\frac{8}{C}=1$$

donc $C=8$.

2. D'après la loi jointe on a $X\in\{1,\ldots,8\}$. On a

$$\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n\in N}\mathbb{P}(X=k,Y=n)=\sum_{n=0}^{k}\frac{(1-\alpha)^n\alpha^{k-n}k!}{n!(k-n)!C}=\frac{1}{C}=\frac{1}{8}.$$

La loi de X est donc uniforme de paramètre 8.

3. $\mathbb{P}(Y=8)=\sum_{k\in N^*}\mathbb{P}(X=k,Y=8)=\mathbb{P}(X=8,Y=8)=\frac{(1-\alpha)^8}{C}=\frac{(1-\alpha)^8}{8}$.

4. X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple $\mathbb{P}(X=1,Y=8)=0$, mais $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=8)=\frac{1}{8}\times\frac{(1-\alpha)^8}{8}\neq 0$.