Solutions CC2 B

1. Table de la loi normale

Dans cet exercice, on note $Y = \frac{X-85}{3}$ qui suit la loi normale centrée réduite, c'est à dire que $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\operatorname{Var}(Y) = 1$. Tous les probabilités et quantiles de la v.a. Y peuvent être trouvés dans la table.

1) $\mathbb{P}(X < 89,5) = \mathbb{P}(\frac{X-85}{3} < \frac{89,5-85}{3}) = \mathbb{P}(Y < 1,5) = 0,9332$.

2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(79 \leq X < 86,5) &= \mathbb{P}(\frac{79-85}{3} \leq \frac{X-85}{3} < \frac{86,5-85}{3}) \\
&= \mathbb{P}(-2 \leq Y < 0,5) = \mathbb{P}(Y < 0,5) - \mathbb{P}(Y < -2) \\
&= \mathbb{P}(Y < 0,5) - (1 - \mathbb{P}(Y < 2)) = 0,6915 - (1 - 0,9772) \\
&= 0,6687.
\end{aligned}$$

3) D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(\frac{X-85}{3} > \frac{x-85}{3}) = \mathbb{P}(Y > \frac{x-85}{3}) = 0,5596$. Dans la table, on peut trouver $\mathbb{P}(Y < 0,15) = 0,5596$. On en déduit que $\mathbb{P}(Y > -0,15) = 0,5596$. Ainsi on a $\frac{x-85}{3} = -0,15$ qui donne $x = 84,55$.

2. Variables à densité

1) La densité doit être positive, on a donc $C \geq 0$ et $K \geq 0$. La densité doit vérifier la condition $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} C(-x)^{-7/2}dx + \int_{-1}^{1} Kdx + \int_{1}^{\infty} Cx^{-7/2}dx \\
&= 2\int_{1}^{\infty} Cx^{-7/2}dx + \int_{-1}^{1} Kdx = \frac{4C}{5} + 2K = 1.
\end{aligned}$$

2) La définition de la fonction de répartition est $F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$. Puisque $g(x)$ est définie par morceaux, on doit calculer $F(x)$ par morceaux aussi.
Pour $x < -1$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} C(-t)^{-7/2}dt = \frac{2C}{5}(-x)^{-5/2}$.
Pour $|x| \leq 1$, on a $F(x) = F(-1) + \int_{-1}^{x} Kdt = \frac{2C}{5} + K(x+1)$.
Pour $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) + \int_1^x Ct^{-7/2}dt \\ &= \frac{2C}{5} + 2K + \int_1^x Ct^{-7/2}dt = \frac{4C}{5} + 2K - \frac{2C}{5}x^{-5/2} \\ &= 1 - \frac{2C}{5}x^{-5/2}. \end{aligned}$$

3) Comme la fonction de densité est symétrique par rapport à 0, on a $\mathbb{E}(X) = 0$.

4) Puisque $\mathbb{E}(X) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \text{Var}\,(X) &= \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1} x^2 C(-x)^{-7/2}dx + \int_{-1}^{1} x^2 K dx + \int_1^{\infty} x^2 C x^{-7/2}dx \\ &= 2\int_1^{\infty} Cx^{-3/2}dx + \int_{-1}^{1} x^2 K dx = 4C + \frac{2K}{3}. \end{aligned}$$

5) On calcule d'abord les statistiques suivantes,

$$\mathbb{E}(Y_i) = 2\mathbb{E}(X_i) + a = 2m + a, \quad \text{Var}\,(Y_i) = 4\text{Var}\,(X_i) = 4\sigma^2,$$

$$\mathbb{E}(\bar{Y}) = \mathbb{E}(Y_i) = 2m + a, \quad \text{Var}\,(\bar{Y}) = \frac{1}{100}\text{Var}\,(Y_i) = \frac{4}{100}\sigma^2.$$

D'après le théorème central limite, on a la loi approximative de $\bar{Y}$ la loi normale d'espérance $2m + a$ et de variance $\frac{4}{100}\sigma^2$ pour n suffisamment grand. On trouve dans la table de loi normale centrée réduite la relation suivante,

$$\mathbb{P}(|\frac{\bar{Y} - 2m - a}{2\sigma/10}| < 2,17) = 0,97.$$

On obtient l'intervalle de confiance

$$IC_{96\%} = \left[\bar{Y} - 2m - 2,17\frac{\sigma}{5}, \bar{Y} - 2m + 2,17\frac{\sigma}{5}\right] = \left[5,2 - 2,17\frac{\sigma}{5}, 5,2 + 2,17\frac{\sigma}{5}\right].$$

3. Loi uniforme

1) La densité est constante car c'est la loi uniforme, pour qu'elle s'intègre à 1 on aura :

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(x,y).$$

2) Comme le disque est symétrique par rapport à $(0,0)$, on aura $\mathbb{E}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) Comme si $X = 1$, Y vaudra forcément 0, les deux variables ne peuvent pas être indépendantes.