Solutions, Partiel

28/04/2014

Exercice 1

1. La vraisemblance de la réalisation est $L(\theta) = (\frac{1}{2\pi\theta(1-\theta)})^{n/2} \exp(-\frac{1}{2\theta(1-\theta)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2)$. Pour déterminer le maximum de vraisemblance, on passe de la vraisemblance à la fonction de log-vraisemblance $H(\theta) = \log L(\theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\theta(1-\theta)) - \frac{1}{2\theta(1-\theta)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2$ et on cherche à maximiser la fonction $H(\theta)$. On a

$$H'(\theta) = -\frac{n}{2} \frac{1-2\theta}{\theta(1-\theta)} + \frac{1}{2} \frac{(1-2\theta)\sum(x_i-\theta)^2}{(\theta(1-\theta))^2} + \frac{\sum(x_i-\theta)}{\theta(1-\theta)}.$$

En simplifiant l'équation $H'(\theta) = 0$, nous avons $-2n\theta^3 + c_1\theta^2 + c_2\theta + c_3 = 0$ où c_1, c_2 et c_3 sont réels. Puisque le coefficient du terme θ^3 est $-2n$ qui est non nul, la détermination du maximum de vraisemblance se ramène à la solution d'une équation du 3ème degré.

2. T_n et U_n sont sans biais parce que $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(X_i) = \theta$ et $\mathbb{E}(U_n) = \mathbb{E}(X_i^2) = \mathrm{Var}\,(X_i) + (\mathbb{E}(X_i))^2 = \theta - \theta^2 + \theta^2 = \theta$. De plus on a $\mathbb{E}(X_i^2) = \theta < \infty$ et $\mathbb{E}(X_i^4) = \theta^4 + 6\theta^2\theta(1-\theta) + 3\theta^2(1-\theta)^2 = -2\theta^4 + 3\theta^2 < \infty$. D'après la loi des grands nombres, on a $T_n = \frac{1}{n}\sum X_i \xrightarrow{Pr.} \theta$ et $U_n = \frac{1}{n}\sum X_i^2 \xrightarrow{Pr.} \theta$.

3. $RQM(T_n) = \mathrm{Var}\,(T_n) = \frac{\mathrm{Var}\,(X_i)}{n} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$.

$RQM(U_n) = \mathrm{Var}\,(U_n) = \frac{\mathrm{Var}\,(X_i^2)}{n} = \frac{\mathbb{E}(X_i^4)-(\mathbb{E}(X_i^2))^2}{n} = \frac{-2\theta^4+3\theta^2-\theta^2}{n} = \frac{-2\theta^4+2\theta^2}{n}$.

Supposons que $RQM(T_n) > RQM(U_n)$, on a alors $2\theta^2 + 2\theta - 1 < 0$ qui donne $\theta \in]\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}[$. En considérant que $\theta \in]0,1[$, on obtient les résultats suivants

$$RQM(T_n) > RQM(U_n) \quad \text{si} \quad \theta \in]0, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}[, \quad RQM(T_n) < RQM(U_n) \quad \text{si} \quad \theta \in]\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1[.$$

4. D'après les calculs précédents, on a $U_n \sim \mathcal{N}(\theta, \frac{2\theta^2(1-\theta^2)}{n})$. La variable $\frac{U_n-\theta}{\sqrt{\frac{2\theta^2(1-\theta^2)}{n}}}$ suit la loi gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. On a donc $\mathbb{P}(\frac{|U_n-\theta|}{\sqrt{\frac{2\theta^2(1-\theta^2)}{n}}} \leq 1.64) = 0.9$.

L'intervalle de confiance à 90% pour θ est $[U_n - 1.64\sqrt{\frac{2\theta^2(1-\theta^2)}{n}}, U_n + 1.64\sqrt{\frac{2\theta^2(1-\theta^2)}{n}}] = [0.5 - 1.64\sqrt{\frac{2\times 0.5^2\times 0.75}{100}}, 0.5 + 1.64\sqrt{\frac{2\times 0.5^2\times 0.75}{100}}]$.

5. Pour T_n, la région de rejet est $W =]-\infty, \theta_0 - 1.96\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}[\cup]\theta_0 + 1.96\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}, \infty[$.

Pour U_n, la région de rejet est $W =]-\infty, \theta_0 - 1.96\sqrt{\frac{2\theta_0^2(1-\theta_0^2)}{n}}[\cup]\theta_0 + 1.96\sqrt{\frac{2\theta_0^2(1-\theta_0^2)}{n}}, \infty[$.

Exercice 2

1. On remarque que $\mathbb{P}(X_{n+1}|X_n, \ldots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1}|X_n)$ la suite vérifie bien la propriété de Markov. Il s'agit bien d'une chaîne de Markov.

2. Les états possibles sont 0, 1 et 2. On remarque que si $X_n = 0$ alors X_n peut mener aux états 0 et 1, si $X_n = 1$ alors X_n peut mener aux états 0 et 1 et si $X_n = 2$ alors X_n peut mener aux états 1 et 2. On en déduit que les points 0 et 1 sont récurrents mais pas l'état 2.

3. En notant les états 0, 1 et 2 par E_1, E_2 et E_3, avec les conventions de notation du cours, la matrice de transition de la chaîne de Markov sera

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. Le support de X est $\Omega_X = \{0, 1\}$ et donc la loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k-1}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k - \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{6})^k = 1 - 1/5 = 4/5$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6^k} = 1/5$. Le support de Y est $\Omega_Y = \mathbb{N}^*$ et donc la loi de Y est donnée par $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 0, Y = k) + \mathbb{P}(X = 1, Y = k) = \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. X et Y ne sont pas indépendantes.

2. On a $\mathbb{E}(X) = 1/5$, $\mathbb{E}(X^2) = 1/5$ et $\mathrm{Var}(X) = 4/25$.

3. $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/6$.

4. Le support de Z est $\Omega_Z = \mathbb{N}^*$. Il y a une seule possibilité pour que $Z = 1$, c'est $X = 0$ et $Y = 1$. Donc $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 1/3$. Pour $z \geq 2$, on a $\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(X = 0, Y = z) + \mathbb{P}(X = 1, Y = z - 1) = \frac{3^z-1}{6^z} + \frac{1}{6^{z-1}} = \frac{3^z+5}{6^z}$.

5. Le support de W est $\Omega_W = \mathbb{N}$. Il y a une seule possibilité pour que $W = 0$, c'est $X = 1$ et $Y = 1$. Donc $\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/6$. Pour $w \geq 1$, on a $\mathbb{P}(W = w) = \mathbb{P}(X = 0, Y = w) + \mathbb{P}(X = 1, Y = w + 1) = \frac{3^w-1}{6^w} + \frac{1}{6^{w+1}} = \frac{6\times 3^w-5}{6^{w+1}}$.