Solutions, Rattrapage

27/06/2014

Exercice 1 (6 points)

1 1. $\int_{-b}^{b} f(x)dx = \int_{-b}^{b} a\sqrt{b-|x|}dx = 2\int_0^b a\sqrt{b-x}dx = \frac{4}{3}ab^{3/2} = 1.$

2 2. $F(x) = \int_{-b}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}\sqrt{1+t}dt = \frac{1}{2}(1+x)^{3/2}, & si \quad -1 \le x \le 0, \\ \int_{-1}^{0} \frac{3}{4}\sqrt{1+t}dt + \int_0^x \frac{3}{4}\sqrt{1-t}dt = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^{3/2}, & si \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$

1 $\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}x\sqrt{1-|x|}dx = 0.$

2 $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 0 = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}x^2\sqrt{1-|x|}dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{0} x^2\sqrt{1+x}dx = \frac{3}{2}(\int_{-1}^{0}(1+x)^2(1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/2} - 2x(1+x)^{1/2}dx) = \frac{3}{2}(\frac{2}{7} - \frac{2}{3} + \frac{8}{15}) = \frac{8}{35}.$

Exercice 2 (9 points)

1 1. Comme tous les coefficients de la matrice de transition sont positifs, tous les points de l'ensemble E sont récurrents. La mesure invariante $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ vérifie :

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_1 = \mu_2 \text{ et } \mu_1 + \mu_2 = 1$$

donc $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$.

2. On suppose que l'on observe la trajectoire $(X_1, \cdots, X_{10})$, où X_1 suit la loi uniforme sur E.

1 (a) Les X_i sont tous égaux si ils sont tous égaux au premier et cette evènement aura pour probabilité :

$$P(X_1 = X_2 = \cdots = X_{10}) = 0.9^9 = 0.39$$

3 (b) Si le X_i sont tous égaux sauf 1 cet évènement est la réunion des ~~deux~~ trois évènements :

$A =$ tous égaux mais différents de X_1
$B =$ tous égaux mais différents de X_{10}
$C =$ tous égaux mais différents d'un $X_i, i \neq 1, 10$

avec

$$P(A) = P(B) = 0.1 * 0.9^8$$
$$P(C) = 8 \times 0.1^2 \times 0.9^7$$

et $P(A) + P(B) + P(C) = 0.124$

4 (c) La aussi plusieurs cas possibles :

$A = X_1$ et X_2 sont égaux au premier élément
$A' = X_9$ et X_{10} sont égaux au premier élément
$B = X_1$ est égal au premier élément, mais pas X_2
$B' = X_{10}$ est égal au premier élément, mais pas X_9
$C = X_1$ et X_{10} sont égaux au deuxième élément et les deux X_i égaux au premier sont consécutifs
$D = X_1$ et X_{10} sont égaux au deuxième élément et les deux X_i égaux au premier ne sont pas consécutifs

avec

$$P(A) = P(A') = 0.5 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.9^7 = 0.022$$
$$P(B) = P(B') = 0.5 \times 0.1 \times 8 \times 0.1^2 \times 0.9^6 = 0.002$$
$$P(C) = 0.5 \times 7 \times 0.1^2 \times 0.9^7 = 0.016$$
$$P(D) = 0.5 \times 21 \times 4 \times 0.1^4 \times 0.9^5 = 0.002$$

donc $2P(A) + 2P(B) + P(C) + P(D) = 0.066.$

Exercice 3 (10 points)

1+1 1. On aura $E(Y_i) = 2p - 1$, et $V(Y_i) = 2 - 2p$.

1 2. Comme $\frac{y_i+1}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } y_i = 1 \\ 0 \text{ si } y_i = -1 \end{cases}$, $-\frac{y_i-1}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } y_i = -1 \\ 0 \text{ si } y_i = 1 \end{cases}$ et que les Y_i sont idépendants, on aura :

$$L_p(y_1, \cdots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{\frac{y_i+1}{2}} (1-p)^{-\frac{y_i-1}{2}}$$

2 3. La log vraisemblance vaudra :

$$l_\theta(x_1, \cdots, x_n) = \log(p) \times \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i+1}{2} + \log(1-p) \times \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i-1}{2} \right)$$

On cherche :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l_\theta(x_1, \cdots, x_n) = 0 \Leftrightarrow (1-p) \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i+1}{2} + p \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i-1}{2} = 0$$

soit

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i+1}{2}}{n}$$

En vérifiant que

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l_{\hat{p}}(x_1, \cdots, x_n) = -\frac{n}{\hat{p}} - \frac{n}{(1-\hat{p})} < 0$$

1+1 4. L'espérance de $\hat{p}$ sera $E(\hat{p}) = p$ et $V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

1 5. Comme $E(\hat{p}) = p$ et $V(\hat{p}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par une application immédiate de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on aura $\hat{p} \xrightarrow{P} p$.

2 6. En faisant une approximation gaussienne, et comme $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, on aura l'IC à 95% :

$$IC_{95\%} = \left[\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}} ; \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}} \right]$$

⚠ 5. On donne aussi un point à la justification suivante.

"Les $\frac{Y_i+1}{2}$ sont indépendantes, $E\left(\frac{Y_i+1}{2}\right) = \frac{2p-1+1}{2} = p$ et $Var\left(\frac{Y_i+1}{2}\right) = \frac{Var(Y_i)}{4} = \frac{1-p}{2} < \infty$. D'après la loi des grands nombres, on a $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum \frac{Y_i+1}{2} \xrightarrow{P} p$."

⚠ 6. On donne aussi deux points à la solution suivante.

"$IC_{95\%} = \left[\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$"