Solutions TD 1

1. Génotype

$X_i \sim Bin\,(5, 1/4), \quad i = 1, 2, 3, 4.$

$\mathbb{P}(X_2 = 0, X_3 = 0) = \mathbb{P}(X_2 + X_3 = 0) = (1/2)^5$, puisque X_2 et X_3 ne sont pas indépendantes et $X_2 + X_3 \sim Bin\,(5, 1/2)$.

2. Couple

X : nombre de garçons d'une famille ayant n enfants au total

$X \sim Bin\,(n, 1/2)$

On déduit de $\mathbb{P}(1 \leq X \leq n-1) = 1 - (1/2)^n - (1/2)^n \geq 90\%$, le nombre minimum d'enfants est $\lceil \log_2 20 \rceil = 5$.

3. Une urne

1) La loi du couple et les lois marginales :

Y\X	1	2	3	marg. Y
1	0	1/6	1/6	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	1/6	1/6	0	1/3
marg. X	1/3	1/3	1/3	

Loi conditionnelle, par exemple :

$X\|_{Y=1}$	1	2	3
$\mathbb{P}$	0	1/2	1/2

Les espérances : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 2$, $\mathbb{E}(X|Y = 1) = 5/2$, $\mathbb{E}(X|Y = 2) = 2$, $\mathbb{E}(X|Y = 3) = 3/2$.

2) $M = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

3) La loi du couple et les lois marginales :

Y\X	1	2	3	marg. Y
1	1/6	1/6	1/6	1/2
2	1/6	0	1/12	1/4
3	1/6	1/12	0	1/4
marg. X	1/2	1/4	1/4	

X et Y ne sont pas indépendantes.

4) Les espérances : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

Les variances : $\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$, $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = \frac{15}{4} - (\frac{7}{4})^2 = \frac{11}{16}$.

5)

XY	1	2	3	6
$\mathbb{P}$	1/6	1/3	1/3	1/6

$\mathbb{E}(XY) = \frac{17}{6}$, $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \frac{17}{6} - (\frac{7}{4})^2 = -\frac{11}{48}$.

6)

$Z = X + Y$	2	3	4	5
$\mathbb{P}$	1/6	1/3	1/3	1/6

7)

$G = 5 \times (X + Y)$	10	15	20	25
$\mathbb{P}$	1/6	1/3	1/3	1/6

$\mathbb{E}(G) = \frac{35}{2}$, $\mathrm{Var}\,(G) = \frac{275}{12}$.

4. Examen

1) C_{10}^3/C_{40}^3
2) $C_{10}^2 C_{30}^1/C_{40}^3$
3) C_{30}^3/C_{40}^3
4) $1 - C_{30}^3/C_{40}^3$

5. Couple d'entiers naturels non nuls

1) $b = 1 - 1/a$, $0 < b < 1 < a$.
2) $\mathbb{P}(X = i) = a^{-i}(a-1)$, $\mathbb{P}(Y = j) = b^{j-1}(1-b)$, X et Y sont indépendantes.
3) $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{b}{a-b}$.
4) $\mathbb{P}(Z = z) = \begin{cases} a^{-z}\frac{b}{a-b}, & \text{si } z \geq 0, \\ b^{-z}\frac{b}{a-b}, & \text{si } z < 0. \end{cases}$

6. Couple de variables aléatoires discrètes

1) La loi du couple et les lois marginales :

S\N	0	1	2	marg. S
0	1/3	$p/3$	$p^2/3$	$(1+p+p^2)/3$
1	0	$(1-p)/3$	$2p(1-p)/3$	$(1+p-2p^2)/3$
2	0	0	$(1-p)^2/3$	$(1-p)^2/3$
marg. N	1/3	1/3	1/3	

2)

$S\|_{N=1}$	0	1	2
$\mathbb{P}$	p	1-p	0

C'est la loi Bernoulli (1-p) ou Binomiale (1, 1-p).

$S\|_{N=2}$	0	1	2
$\mathbb{P}$	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$

C'est la loi Binomiale (2, 1-p).

3) $\mathbb{E}(S|N=0) = 0$, $\mathbb{E}(S|N=1) = 1-p$, $\mathbb{E}(S|N=2) = 2(1-p)$.

$\mathbb{E}(S) = 1 - p$.

4) $\mathbb{E}(S|N = i) = i(1 - p)$, car $S|_{N=i} \sim Binomiale(i, 1 - p)$.
$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(S|N = i)\mathbb{P}(N = i) = (1-p)\sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(N = i) = (1-p)\mathbb{E}(N) = (1-p)(n+1)/2$.

5) $\mathbb{E}(S) = (1 - p)\mathbb{E}(N) = \lambda(1 - p)$.

7. Couple d'entiers

1) $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$, $X \sim Poisson(\lambda)$.
2) $\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \lambda^n e^{-\lambda\alpha}\alpha^n/n!$, $Y \sim Poisson(\lambda\alpha)$. X et Y ne sont pas indépendantes.
3) $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k+n, Y = k) = \lambda^n e^{-\lambda(1-\alpha)}(1-\alpha)^n/n!$, $Z \sim Poisson(\lambda(1-\alpha))$.
4) $\mathbb{P}(Y = m|Z = n) = \mathbb{P}(Y = m, X = m + n)/\mathbb{P}(Z = n) = \lambda^m e^{-\lambda\alpha}\alpha^m/m!$, $Y|_{Z=n} \sim Poisson(\lambda\alpha)$. Y et Z sont indépendantes.
5) X : le nombre d'enfants d'une famille
Y : le nombre de garçons d'une famille
Z : le nombre de filles d'une famille
a. Avec la modélisation précédente, on a $Y|_{X=n} \sim Bin(n, 1/2)$.
b. $\mathbb{P}(Y = b, X = a) = \mathbb{P}(Y = b|X = a)\mathbb{P}(X = a) = \frac{2.2^a e^{-2.2}(1/2)^b(1/2)^{a-b}}{b!(a-b)!}\mathbb{1}_{0\leq b\leq a}(a, b)$.
c. Z=X-Y