

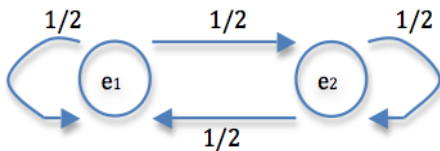
Solutions TD 2

1. Bernoulli

1) espace d'état : $E = \{0, 1\}$

matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

2) $\mu = (1/2, 1/2)^T$

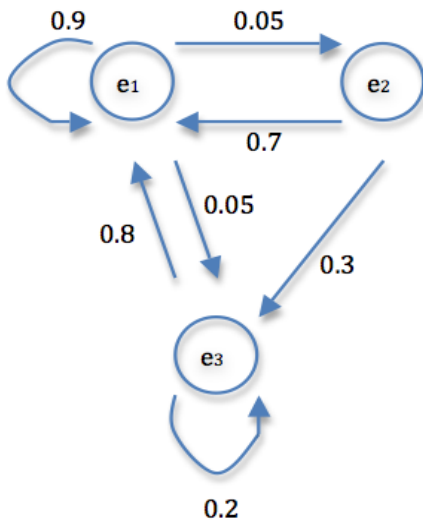


2. Le Hamster

1) $M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$

2) Ils sont tous récurrents.

3) $\mu = (160/181, 8/181, 13/181)^T$



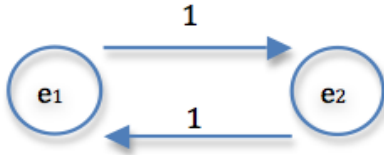
3. Chaîne périodique

1) $X_1 = MX_0 = (1, 0)^T$, $X_2 = MX_1 = (0, 1)^T$, $X_3 = (1, 0)^T$, $X_4 = (0, 1)^T$, $X_5 = (1, 0)^T$.

2) Ils sont tous récurrents.

3) $\mu = (1/2, 1/2)^T$

4) Non.



4. Une souris

1) $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, oui.

2) $\mu = (1/3, 2/9, 4/9)^T$.

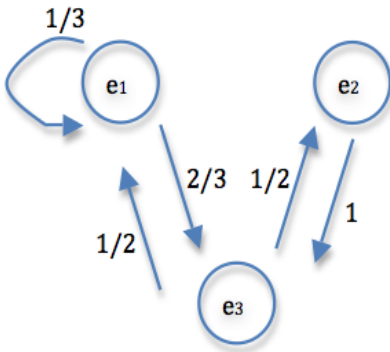
3) Méthode 1 : On peut trouver dans le graphique deux chemins de longueur 2 qui va de e_1 à e_1 .

Méthode 2 : $M^2 = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 2/9 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$, $M^2_{(1,1)} = 4/9 > 0$.

Méthode 3 : Notons $X_0 = (1, 0, 0)^T$. On a $X_2 = M^2 X_0 = (4/9, 1/3, 2/9)^T$ qui implique $\mathbb{P}(X_2 = e_1) = 4/9 > 0$.

$\mathbb{P}(X_3 = e_3 | X_1 = e_3) = M^2_{(3,3)} = 5/6$.

4) e_3 .



5. Chaîne de Markov

1) $\mathbb{P}(X_0 = e_2, X_1 = e_2, X_2 = e_1, X_3 = e_1) = p_{11}p_{12}p_{22} = 0.9 \times 0.2 \times 0.8 = 0.144$

$X_2 = M^2 X_0 = (0.34, 0.66)^T$

$\mathbb{P}(X_2 = e_1, X_3 = e_1) = p_{11} \mathbb{P}(X_2 = e_1) = 0.9 \times 0.34 = 0.306$

$X_3 = M^3 X_0 = (0.438, 0.562)^T$

$\mathbb{P}(X_3 = e_1) = 0.438$

2) $\mathbb{P}(X_2 = e_1 | X_3 = e_1) = \mathbb{P}(X_2 = e_1, X_3 = e_1) / \mathbb{P}(X_3 = e_1) = 0.306 / 0.438 \approx 0.699$.

3) $\mu = (2/3, 1/3)^T$

6. Acides aminés

$$1) M = \begin{pmatrix} 8/12 & 1/16 & 2/15 & 0 \\ 2/12 & 10/16 & 1/15 & 3/10 \\ 1/12 & 3/16 & 11/15 & 1/10 \\ 1/12 & 2/16 & 1/15 & 6/10 \end{pmatrix}$$

2) Méthode 1 : solution de l'équation $M\mu = \mu$. Méthode 2 : simulation par l'ordinateur $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n \mu_0 = \mu$.

7. Trajectoire d'une chaîne de Markov

1) Comme tous les coefficients de la matrice de transition sont positifs, tous les points de l'ensemble E sont récurrents. La mesure invariante $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ vérifie

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{et} \quad \mu_1 + \mu_2 = 1$$

donc $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$.

2.a) L'évènement que les X_i sont tous égaux est l'ensemble des deux évènements élémentaires $\{(e_1, e_1, e_1, e_1, e_1), (e_2, e_2, e_2, e_2, e_2)\}$. Cet évènement a pour probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_5) &= \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_5 = e_1) + \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_5 = e_2) \\ &= 0,5 \times 0,7^4 + 0,5 \times 0,7^4 \\ &= 0,7^4 = 0,24. \end{aligned}$$

2.b) Si les X_i sont tous égaux sauf un cet évènement est la réunion des trois évènements

$$\begin{aligned} A &= \{\text{tous égaux mais différents de } X_1\} \\ B &= \{\text{tous égaux mais différents de } X_5\} \\ C &= \{\text{tous égaux mais différents d'un } X_i, i \neq 1, 5\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B) = 0,3 \times 0,7^3 \\ \mathbb{P}(C) &= 0,3^2 \times 0,7^2 \times 3 \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 0,3 \times 0,7^3 \times 2 + 0,3^2 \times 0,7^2 \times 3 = 0,338.$$

2.c) La aussi plusieurs cas possibles :

$$\begin{aligned} A &= \{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ A' &= \{X_4 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ B &= \{X_1 \text{ est égal au } e_1, \text{ mais pas } X_2 \text{ ni } X_5\} \\ B' &= \{X_5 \text{ est égal au } e_1, \text{ mais pas } X_4 \text{ ni } X_1\} \\ C &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ C' &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_2 \text{ et les deux } X_i \text{ égaux au } e_1 \text{ sont consécutifs}\} \\ D &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_2 \text{ et les deux } X_i \text{ égaux au } e_1 \text{ ne sont pas consécutifs}\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A') = 0,5 \times 0,3 \times 0,7^3 \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B') = 0,5 \times 0,3^3 \times 0,7 \times 2 \\ \mathbb{P}(C) &= 0,5 \times 0,3^2 \times 0,7^2 \\ \mathbb{P}(C') &= 0,5 \times 0,3^2 \times 0,7^2 \times 2 \\ \mathbb{P}(D) &= 0,5 \times 0,3^4\end{aligned}$$

donc

$$2\mathbb{P}(A)+2\mathbb{P}(B)+3\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D) = 0,3 \times 0,7^3 + 0,3^3 \times 0,7 \times 2 + 0,3^2 \times 0,7^2 \times 1,5 + 0,5 \times 0,3^4 = 0,211.$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	1	1	2	2	2
2	2	2	2	1	1
3	1	2	1	2	2
4	1	2	2	1	2
5	2	2	1	2	1
6	2	1	2	2	1
7	1	2	2	2	1
8	2	1	1	2	2
9	2	2	1	1	2
10	2	1	2	1	2