Solutions TD 3

1. Table de la loi normale

Dans cet exercice, on note $Y = \frac{X-8}{4}$ qui suit la loi normale centrée réduite, c'est à dire que $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(Y) = 1$. Tous les probabilités et quantiles de la v.a. Y peuvent être trouvés dans la table.

1) $\mathbb{P}(X < 18) = \mathbb{P}(\frac{X-8}{4} < \frac{18-8}{4}) = \mathbb{P}(Y < 2,5) = 0,9938$.

2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-4 \leq X < 9,2) &= \mathbb{P}(\frac{-4-8}{4} \leq \frac{X-8}{4} < \frac{9,2-8}{4}) \\
&= \mathbb{P}(-3 \leq Y < 0,3) = \mathbb{P}(Y < 0,3) - \mathbb{P}(Y < -3) \\
&= \mathbb{P}(Y < 0,3) - (1 - \mathbb{P}(Y < 3)) = 0,6179 - (1 - 0,9987) \\
&= 0,6166.
\end{aligned}$$

3) D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(\frac{X-8}{4} > \frac{x-8}{4}) = \mathbb{P}(Y > \frac{x-8}{4}) = 0,5596$. Dans la table, on peut trouver $\mathbb{P}(Y < 0,15) = 0,5596$. On en déduit que $\mathbb{P}(Y > -0,15) = 0,5596$. Ainsi on a $\frac{x-8}{4} = -0,15$ qui donne $x = 7,4$.
4) La réponse n'est pas unique. Tout $x \leq 0$ vérifie la condition.

2. Variables à densité

1) $\iint f(x,y)dxdy = 4/a = 1$, $a = 4$.
2) $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{(0,1]}(x)$, $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbb{1}_{(0,1]}(y)$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1/3$,
$M = \begin{pmatrix} 4/45 & 0 \\ 0 & 4/45 \end{pmatrix}$, $\rho = 0$.
3) Oui, $f_{X|Y=y} = f_X(x)$.

3. Loi normale

1) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2})$, $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})$,
$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$,
$f_{X|Y=y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}) + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})$,
$f_{Y|X=x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}) + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2})$.
2) $Z \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho)$.
3) $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = 0$.

4. Loi uniforme

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \le z \le 1, \\ 2-z, & 1 < z \le 2. \end{cases}$$

5. Variables exponentielles

1) $f_Z(z) = \alpha^2 z \exp(-\alpha z)$, si $\alpha = \beta$,
$\mathbb{P}(Z \le z) = 1 - \frac{\beta}{\beta-\alpha}\exp(-\alpha z) + \frac{\alpha}{\beta-\alpha}\exp(-\beta z)$, si $\alpha \neq \beta$,
$f_Z(z) = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(\exp(-\alpha z) - \exp(-\beta z))$, si $\alpha \neq \beta$.
2) $f_U(u) = \frac{\alpha}{2}\exp(-\alpha|u|)$.

6. Intervalles de confiance

1) $I_1 = [\overline{X} - 1,64/6, \overline{X} + 1,64/6]$.
2) $I_2 = [\overline{X} - 2,32/6, \overline{X} + 2,32/6]$.
3) $I_1 = [14.92, 15.46]$,
$I_2 = [14.80, 15.58]$.
4) Augmenter n.

7. Proportion

1) Puisque $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathrm{Var}\,(X_i)$ sont finis, on peut appliquer la loi des grands nombres aux X_i, ainsi $\overline{X} - p \xrightarrow{p.s.} 0$.
2) a. $IC = [\overline{X} - \frac{1.96\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{10\sqrt{2}}, \overline{X} + \frac{1.96\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{10\sqrt{2}}] = [0.57, 0.71]$.
b. $p(1-p) \le 1/4$, $IC = [\overline{X} - \frac{1.96\times 1/2}{10\sqrt{2}}, \overline{X} + \frac{1.96\times 1/2}{10\sqrt{2}}] = [0.64 - 0.069, 0.64 + 0.069]$.

8. Plus difficile

1) $C = \lambda^2/2$.
2) $f_X(x) = 2Cx\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x\ge 0\}}(x)$,

$$f_Y(y) = \begin{cases} C/\lambda \exp(-\lambda y), & y \ge 0, \\ C/\lambda \exp(\lambda y), & y < 0. \end{cases}$$