Exercices sur les vecteurs gaussiens et le Théorème de Cochran

Exercice 1

Dans cet exercice X, Y et Z sont trois variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Quelle est la loi de $X^2 + Y^2$?
2. Quelle est la loi de $\sqrt{2}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}$?
3. Quelle est la loi de $2\frac{Z^2}{X^2+Y^2}$?
4. Quelle est la loi de $\frac{X-Y}{\sqrt{\frac{(X+Y)^2}{2}+Z^2}}$?

Exercice 2

Dans cet exercice $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ désigne un vecteur gaussien de moyenne $(0,0,0,0)^T$ et de matrice de variance-covariance identité.

1. Quelle est la loi de $(X_1 - X_2)^2/2 + (X_1 + X_2)^2/2$?
2. Quelle est la loi de $\frac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$?
3. Quel est le projeté orthogonal $P_E(X)$ de X sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,1,0,0)^T$ et $(0,0,1,1)^T$?
4. Quelle est la loi de $\|P_E(X)\|^2$? Quelle est la loi de $\frac{\|P_E(X)\|^2}{\|X-P_E(X)\|^2}$?

Exercice 3

On considère dans cet exercice un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes dans lequel X_i suit une loi $\mathcal{N}(\frac{\mu}{p_i}, \sigma^2)$ avec μ et σ des paramètres inconnus et $(p_1, \ldots, p_n)$ des nombres réels positifs supposés connus. On cherche à construire des estimateurs de μ et σ^2.

1. On note $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i X_i$. Montrer que M est un estimateur sans biais de μ et calculer la variance de cet estimateur. Quelle est la loi de M ?
2. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par le vecteur $e = (\frac{1}{p_1}, \cdots, \frac{1}{p_n})'$. Calculer $P_E(X)$ et $P_{E}\perp(X)$.
3. On note ν le vecteur $\nu = (\frac{\mu}{p_1}, \cdots, \frac{\mu}{p_n})'$. Calculer $P_{E}\perp(\nu)$.
4. Déduire des questions précédentes et du théorème de Cochran un estimateur sans biais de σ^2 ainsi qu'une méthode permettant de construire un intervalle de confiance à 95% pour σ^2. On pourra utiliser que l'espérance d'une loi du χ^2_n est n. Comment s'écrit l'estimateur lorsque $p_1 = \ldots = p_n = 1$?