1) $M = \begin{pmatrix} 8/12 & 1/16 & 2/15 & 0 \\ 2/12 & 10/16 & 1/15 & 3/10 \\ 1/12 & 3/16 & 11/15 & 1/10 \\ 1/12 & 2/16 & 1/15 & 6/10 \end{pmatrix}$

2) Méthode 1 : solution de l'équation $M\mu = \mu$. Méthode 2 : simulation par l'ordinateur $\lim_{n\to\infty} M^n\mu_0 = \mu$.

7. Trajectoire d'une chaîne de Markov

1) Comme tous les coefficients de la matrice de transition sont positifs, tous les points de l'ensemble E sont récurrents. La mesure invariante $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ vérifie

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{et} \quad \mu_1 + \mu_2 = 1$$

donc $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$.

2.a) L'évènement que les X_i sont tous égaux est l'ensemble des deux évènements élémentaires $\{(e_1, e_1, e_1, e_1, e_1), (e_2, e_2, e_2, e_2, e_2)\}$. Cet évènement a pour probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_5) &= \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_5 = e_1) + \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_5 = e_2) \\ &= 0,5 \times 0,7^4 + 0,5 \times 0,7^4 \\ &= 0,7^4 = 0,24. \end{aligned}$$

2.b) Si les X_i sont tous égaux sauf un cet évènement est la réunion des trois évènements

$$\begin{aligned} A &= \{\text{tous égaux mais différents de } X_1\} \\ B &= \{\text{tous égaux mais différents de } X_5\} \\ C &= \{\text{tous égaux mais différents d'un } X_i, i \neq 1, 5\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B) = 0,3 \times 0,7^3 \\ \mathbb{P}(C) &= 0,3^2 \times 0,7^2 \times 3 \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 0,3 \times 0,7^3 \times 2 + 0,3^2 \times 0,7^2 \times 3 = 0,338.$$

2.c) La aussi plusieurs cas possibles :

$$\begin{aligned} A &= \{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ A' &= \{X_4 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ B &= \{X_1 \text{ est égal au } e_1, \text{mais pas } X_2 \text{ ni } X_5\} \\ B' &= \{X_5 \text{ est égal au } e_1, \text{mais pas } X_4 \text{ ni } X_1\} \\ C &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_1\} \\ C' &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_2 \text{ et les deux } X_i \text{ égaux au } e_1 \text{ sont consécutifs}\} \\ D &= \{X_1 \text{ et } X_5 \text{ sont égaux au } e_2 \text{ et les deux } X_i \text{ égaux au } e_1 \text{ ne sont pas consécutifs}\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A') = 0,5 \times 0,3 \times 0,7^3 \\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B') = 0,5 \times 0,3^3 \times 0,7 \times 2 \\
\mathbb{P}(C) &= 0,5 \times 0,3^2 \times 0,7^2 \\
\mathbb{P}(C') &= 0,5 \times 0,3^2 \times 0,7^2 \times 2 \\
\mathbb{P}(D) &= 0,5 \times 0,3^4
\end{aligned}$$

donc

$$2\mathbb{P}(A)+2\mathbb{P}(B)+3\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D) = 0,3\times 0,7^3+0,3^3\times 0,7\times 2+0,3^2\times 0,7^2\times 1,5+0,5\times 0,3^4 = 0,211.$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	1	1	2	2	2
2	2	2	2	1	1
3	1	2	1	2	2
4	1	2	2	1	2
5	2	2	1	2	1
6	2	1	2	2	1
7	1	2	2	2	1
8	2	1	1	2	2
9	2	2	1	1	2
10	2	1	2	1	2