CONTRÔLE OPTIMAL ET OSCILLATIONS

Denis PENNEQUIN[1]

October 10, 2011

[1]CERMSEM, Université Paris 1, 106-112 Bd de l'Hôpital, 75647 Paris cedex 13, France.

Table des Matières

1 Quelques rappels sur les fonctions presque-périodiques 12

1.1 Définitions et premières propriétés des fonctions presque-périodiques et quasi-périodiques . . . 13

1.1.1 Espace vectoriel des fonctions presque-périodiques . . . 13

1.1.2 Analyse de Fourier des fonctions presque-périodiques . . . 14

1.1.3 Dérivation et intégration des fonctions presque-périodiques 16

1.1.4 Fonctions quasi-périodiques . . . 17

1.2 Fonctions presque-périodiques et quasi-périodiques à paramètres . 18

1.2.1 Généralités sur les fonctions presque-périodiques à paramètres 18

1.2.2 Fonctions presque-périodique avec un ensemble de paramètres compact . . . 19

1.2.3 Fonctions presque-périodiques avec un ensemble de paramètres dénombrable à l'infini . . . 21

1.2.4 Extension au cadre quasi-périodique . . . 24

1.3 Espaces de Besicovitch et de Blot . . . 26

1.3.1 Espaces de Besicovitch . . . 26

1.3.2 Espaces de Blot . . . 27

2 Fonctions sur le tore et fonctions multiplement périodiques 29

2.1 Préliminaires . . . 29

2.1.1 Notions intrinsèques . . . 30

2.1.2 Lecture dans une base . . . 30

2.1.3 Effet d'un changement de base . . . 31

2.1.4 Changement de base et intégrales . . . 31

2.1.5 Changement de base et dérivation . . . 33

2.2 Fonctions définies sur le tore et fonctions définies sur Q^m . . . 34

2.2.1 Fonctions définies sur le tore . . . 34

2.2.2 Les théorèmes de prolongement . . . 35

2.2.3 Quelques autres propriétés des espaces de fonctions définies sur le tore . . . 38

2.3 Construction d'espaces du type de Sobolev . . . 40

2.3.1 Construction et premières propriétés de l'espace $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ . . . 40

2.3.2 Convolution et théorèmes de densité . . . 42

2.3.3 L'espace $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ 47
2.4 Analyse de Fourier et comparaison des différentes notions de dérivation 53
2.5 Lien avec les distributions périodiques et les distributions sur le tore 55
2.5.1 Premier préliminaire : rappels sur les distributions à valeurs vectorielles 55
2.5.2 Second préliminaire : la périodification 55
2.5.3 Distributions périodiques et distributions sur le tore 57
2.5.4 Lien avec les notions déjà introduites 58
2.6 Espaces de Sobolev sur IntQ^m 60
2.7 Espaces d'ordre supérieur 62
2.8 Sur l'absolue continuité des fonctions de $H^p_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ 62
2.9 Théorie des traces 65
2.9.1 Description de la frontière de Q^m 65
2.9.2 Intégration sur la frontière du cube 67
2.9.3 Opérateurs des traces 68
2.9.4 Le théorème des traces 70

3 Opérateur de Perceval, fonctions multiplement périodiques et fonctions quasi-périodiques 74
3.1 L'assimilation de $QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ 74
3.1.1 Une première démonstration 75
3.1.2 Une seconde démonstration 76
3.2 Autres théorèmes d'isomorphisme 85
3.2.1 Extension du résultat précédent aux fonctions dérivables . 85
3.2.2 Extensions aux espaces de Lebesgue et de Sobolev 86
3.3 Le cas des fonctions quasi-périodiques à paramètres 88
3.3.1 Le cas P compact 88
3.3.2 Le cas P dénombrable à l'infini 89

4 Equations quasi-périodiques et équations de Percival 91
4.1 Le principe 91
4.2 Notion de solution variationnelle faible 93
4.2.1 Solution $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelle faible 93
4.2.2 Solution $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelle faible 94
4.3 Théorème d'existence de solutions variationnelles faibles 95
4.3.1 Préliminaires 95
4.3.2 Existence de solutions $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelles faibles . 97
4.3.3 Existence de solutions $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelles faibles 104
4.4 Régularisation des solutions faibles 108

5 Théorèmes relatifs aux solutions presque-périodiques de systèmes dynamiques discrets 111
5.1 Espaces de suites p.p. 111
5.1.1 Suites p.p. : définition arithmétique 111
5.1.2 Suites p.p. au sens de Mauclaire 116
5.2 Comparaison avec d'autres notions de p.p. 120
5.2.1 Notion de Bochner 120
5.2.2 Notion de Zaslavski 121
5.3 Fonctions et suites p.p. à paramètres et opérateurs de Nemytskii . 121
5.3.1 Fonctions et suites p.p. uniformément en le paramètre . . 122
5.3.2 Fonctions et suites p.p. en moyenne à paramètres 126
5.4 Théorèmes de structure et d'existence pour des équations d'Euler discrètes 133
5.4.1 Principes variationnels 134
5.4.2 Résultats de structure dans $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ 135
5.4.3 Bornitude et presque-périodicité : extension du critère d'Amerio 136
5.4.4 Résultats dans $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ 141

6 Liens entre les problèmes de contrôle périodiques et presque-périodiques. Un principe de Pontryagin dans un cadre lagrangien 147
6.1 Présentation des problèmes 148
6.1.1 Problèmes périodiques 148
6.1.2 Problèmes presque-périodiques et quasi-périodiques 149
6.1.3 Le problème statique 150
6.2 Lien entre Problèmes de Contrôle Périodique et Problèmes de Contrôle Presque-périodique 150
6.3 Conditions nécessaires du premier ordre et existence 154
6.3.1 Le cas $K = B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ 154
6.3.2 Cas où K est convexe quelconque 156
6.4 Un résultat d'existence 157

7 Oscillations en économie 159
7.1 Pourquoi s'intéresser aux ocillations et aux phénomènes presque-périodiques ou quasi-périodiques en économie ? 159
7.2 Oscillations dans le modèle de Tobin 162
7.2.1 Les conditions nécessaires du premier ordre 163
7.2.2 Evolution quand uniquement p_0 varie 164
7.2.3 Evolution quand uniquement θ varie 168
7.2.4 Résumé 169

Remerciements

Alors étudiant en première année à l'E.N.S.A.E. (Ecole de l'I.N.S.E.E.), j'ai suivi le cours de *Calcul différentiel et Optimisation* de M. le Professeur Blot. La qualité de ce cours, tant au niveau oral que dans le polycopié distribué, m'a profondément marqué de même que la totalité des élèves de première année en 1993-1994. J'ai naturellement souhaité faire mon stage de première année sous sa responsabilité. J'ai alors pu découvrir qu'en plus d'un enseignant remarquable, M. le Professeur Blot était doué de qualités humaines exceptionnelles. Ses judicieux conseils, ses soutiens aux moments difficiles, sa très grande disponibilité ont toujours été présents, que ce soit lors de mes trois années de thèse que lors de travaux antérieurs sur d'autres thèmes (stages, groupe de travail pour l'E.N.S.A.E.). J'ai pu tout au long de ces années admirer tant l'enseignant que le chercheur et il restera pour moi un exemple sur ces deux points.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait A. Haraux et M. Quincampoix en acceptant de rapporter cette thèse. Je les remercie tous deux pour leur lecture particulièrement attentive et leurs nombreuses suggestions de prolongement.

J.-B. Baillon a non seulement accepté de faire partie de mon jury, mais il m'a de plus fait bénéficier de ses très nombreuses remarques sur la manière de présenter ce travail. Je lui suis très reconnaissant pour ces deux points.

L'intérêt qu'a porté G. Haddad à ce travail m'a profondément touché. Je le remercie d'avoir accepté de lire ce mémoire et de faire partie du jury.

Merci aussi à B. Cornet et C. le Van d'avoir accepté de consacrer de leur temps à la lecture de ce rapport et de faire partie du jury.

Je remercie MM. Cornet (une seconde fois !) et Trognon de m'avoir accueilli dans leurs laboratoires respectifs et permis de faire une thèse dans les meilleures conditions. Je remercie tous les membres du CERMSEM et du GRECSTA, mais de peur d'en oublier, je préfère ne pas en citer. Je salue cependant M. Bonnisseau car, à l'ENSAE, j'ai pu bénéficier outre d'un cours qui m'en a appris vraiment beaucoup, de l'aiguillage sur M. Blot.

J'adresse également un remerciement à ceux qui m'ont intéressé aux mathématiques et qui m'ont appris solidement les mathématiques de lycée et de premier cycle. Je pense particulièrement à Mme A. Raoult, M. Y. Blanchard et M. P. Lambert.

Je remercie aussi mes proches pour leur soutient constant ; et en premier lieu, mes parents, mon frère, Hervé et Martine, Marie-Pierre, Guillaume et Danielle, Pascal et Germana, Frédéric, Damien, Véronique et Eric.

Introduction

Le but de cette thèse est de contribuer à l'étude du Contrôle Optimal des phénomènes oscillants. Il s'agit d'un domaine encore peu exploré, seuls les problèmes de Contrôle Optimal Périodique ayant déjà été largement étudiés. On se limitera dans ce travail à des problèmes presque-périodiques (superposition de phénomènes périodiques) qui sont à la fois une extension naturelle des phénomènes périodiques pour lesquels on a très peu de résultats, sans être l'extension la plus générale possible pour laquelle d'une part on n'obtiendrait pas nécessairement autant de résultats et d'autre part certaines extensions pourraient manquer d'interprêtation du point de vue des applications. C'est pourquoi il nous est apparu opportun dans ce travail de se limiter aux phénomènes presque-périodiques. En retour d'ailleurs, l'étude des problèmes de Contrôle presque-périodique peut apporter des résultats supplémentaires sur les problèmes de Contrôle Périodique, notamment sur l'aspect structurel : c'est dans cet esprit qu'a été rédigée la première partie du chapitre 6.

Les problèmes de Contrôle presque-périodiques apparaissent naturellement sous deux aspects. En premier, il y a le Contrôle en moyenne qui existe déjà pour les phénomènes périodiques en Chimie et Physique, quand on cherche à optimiser un processus de production, préoccupation non lointaine de celle des économistes ! Si contrôler périodiquement une production est parfois meilleur qu'un contrôle statique, il se peut qu'un contrôle presque-périodique améliore encore la production moyenne... Nous donnerons des cas où cette affirmation est vraie, d'autres où elle est fausse. Il y a aussi en économie les problèmes de maximisation d'un critère du type :

$$J(x,u) := \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

sous contrainte d'une équation d'évolution, où δ est un réel strictement positif représentant un facteur de préférence pour le présent ou un taux. De plus dans certains problèmes, lorsque δ tend vers 0, le couple (x, u) paramétré par δ tend vers une solution du système hamiltonien obtenu en remplaçant δ par 0. Ce système est aussi celui d'optimalité pour le problème en moyenne. Quel est le comportement de l'agent économique : raisonne t-il à la Ramsey ou en moyenne (sachant que la seconde condition est moins restrictive pour la définition du critère) ? Même si nous n'apportons pas de réponse à cette question, la signaler permet de voir que les deux problèmes sont en fait bien liés. Le chapitre 7 présente plusieurs aspects de l'apparition d'oscillations en économie. Les théories des cycles semblent présenter les cycles économiques comme apparaissant en raison de sommes de termes représentant des tendances multipliés par des termes oscillants qui sont en fait périodiques ou quasi-périodiques. On présente une version modifiée du modèle de Tobin dans lequel on autorise certaines variables exogènes à osciller. On voit alors que les exogènes évoluent comme le produit de leur tendance usuelle par des termes oscillants. Quand on veut effectuer des calculs sur l'effet moyen des oscillations sur les endogènes, l'hypothèse de supposer l'oscillation presque-périodique du prix apparaît comme un bon arbitrage entre une hypothèse trop particulière (par exemple évolution périodique) qui n'aurait aucune raison économique et une hypothèse trop générale (par exemple évolution dans certains espaces de Marcinkiewicz) dont l'interprêtation économique semble ardue. Le fait qu'autour d'une tendance peuvent se superposer des oscillations peut amener dès le début à supposer l'existence d'oscillations permettant de prendre en compte une évolution autour d'un terme de tendance. Le choix de supposer cette oscillation presque-périodique, outre le problème d'interprêtabilité déjà mentionné se justifient par des résultats élémentaires sur les systèmes linéaires ou par les travaux de Maurice Allais ; ces points sont expliqués dans le début du chapitre 7.

Avant ce chapitre 7 tourné vers les motivations économiques, le chapitre 6 s'est attaché à étudier des problèmes de Contrôle avec une équation d'évolution linéaire. Si ce cadre pourrait sembler restrictif, d'une part il est un cadre naturel pour les aspects structurels des problèmes concaves autonomes (pour lesquels on obtient en gros que les problèmes statiques, périodiques et presque-périodiques sont équivalents), d'autre part on obtiendra un théorème de condition nécessaire généralisant celui de Da Prato-Ichikawa où les auteurs supposaient de plus que l'intégrande du critère était quadratique. Bien entendu, ces chapitres 6 et 7 feront l'objet de prolongements ultérieurs et sont loin d'avoir fait le tour de ces questions ! Ecrire les conditions nécessaires d'un problème de Contrôle Optimal aboutit naturellement à un système dynamique. C'est pourquoi le chapitre 5 s'est attaché à donner des résultats d'existence et de structure pour de tels systèmes, ainsi qu'un principe variationnel, extension discrète de celui de Joël Blot. Auparavant, ce chapitre aura présenté diverses notions de suites p.p. présentes dans la littérature et les aura comparées. Le chapitre 4 a eu pour objet de traiter au contraire le cas continu. Il utilise pleinement le formalisme de Percival qui a été largement présenté dans les chapitres 2 et 3. Dans ce chapitre 4, on présente de nouvelles notions de solutions faibles, dites solutions variationnelles faibles, et l'on donne un lien entre ces solutions et les solutions faibles usuelles. On démontre un théorème d'existence, puis on étudie le problème de la régularisation des solutions faibles. Auparavant, les chapitres 2 et 3 ont complètement présenté les espaces issus du formalisme de Percival et adaptés à ceux-ci les résultats habituels. Si certains résultats s'étendent, ce n'est pas le cas de tous ; par exemple, on ne dispose pas du théorème de Rellich-Kondrachov dans nos espaces. Les outils de ces chapitres relèvent de domaines variés : Analyse Fonctionnelle non linéaire, Analyse Harmonique (y compris sur les groupes), Systèmes Dynamiques, E.D.P., distributions, etc... Enfin le chapitre 1, quant à lui, aura pour but essentiel de fixer les notations et permettre une lecture relativement autonome de ce travail. Par conséquent, il est composé très essentiellement de rappels. A notre connaissance, seuls les théorèmes d'isomorphismes entre espaces de fonctions presque-périodiques à paramètre et certains espaces de fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace fonctionnels sont nouveaux. Ils montrent en particulier que la condition connue pour être suffisante assurant que les opérateurs de Nemytskii se comportent bien vis-à-vis des espaces de fonctions presque-périodiques est aussi nécessaire.

Ce travail est composé d'articles en cours, de deux articles acceptés et d'un article soumis. Plus précisément, une partie des chapitres 2 à 4 est soumise, le chapitre 5 est composé de deux articles à paraître, l'un dans le Journal of Difference Equations and Applications (co-écrit avec J. Blot), l'autre dans Discrete and Continuous Dynamical Systems. Les chapitres 6 et 7 devraient chacun bientôt être finalisés en des articles qui seront soumis, quant au reste des chapitres 2 à 4, ceci représentra un travail de plus long terme.

Notations

Certaines notations sont valables uniquement à l'intérieur d'une section ou d'une sous-section : nous ne les définissons pas ici. On trouvera ici les notations utilisées dans plusieurs parties qui soit sont des notations mathématiques pas toujours bien fixées par les conventions, soit des notations définies dans cette thèse (auquel cas on renvoie au paragraphe ou à la page correspondante).

Notations générales.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Dans toute la thèse, sauf mention expresse du contraire, on fixe un entier $m \geq 2$ et un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^m$ dont les composantes sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$ et sont strictement positives.
- Q^m est le cube de dimension m : $Q^m := [-\pi, \pi]^m$
- $\mathbb{T}^m$ désigne le tore de dimension m, c'est-à-dire :
$$\mathbb{T}^m := \mathbb{R}^m / (2\pi\mathbb{Z})^m .$$
- $\mathbb{N}_k := \{1, ..., k\}$.
- Le corps des scalaires sera toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Dans le chapitre 5, $\mathbb{L}$ désigne une partie non vide de $\mathbb{Z}$ satisfaisant :
$$(t \in \mathbb{L}) \Rightarrow (t + 1 \in \mathbb{L}).$$
- L'espace d'arrivée sera en général un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{E}$, dont la norme est notée $|.|_{\mathbb{E}}$, son dual $\mathbb{E}'$ et le produit de dualité $\cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}}$. Lorsqu'une structure hilbertienne sera exigée [1], on supposera que $\mathbb{E}$ un espace de Hilbert identifié (sauf mention expresse du contraire) à son dual. On le notera alors $\mathbb{H}$, sa norme $|.|_{\mathbb{H}}$ et son produit scalaire (ou hermitien) $\cdot_{\mathbb{H}}$. Si aucune ambiguité n'est possible, les indices pourront être omis.
- Pour x, y dans $\mathbb{K}^k$, on note $x \cdot y$ et $|x|$ respectivement le produit scalaire (ou hermitien) usuel de x et y et la norme associée de x, *i.e.* :
$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{k} \overline{x_i} y_i \quad \text{et} \quad |x| = \sqrt{x \cdot x}$$
En cas d'ambiguité sur k, on pourra noter $\cdot_k$ et $|.|_k$

[1] en pratique, la structure banachique suffit pour les fonctions $C^k(\mathbb{T}^m)$ ou Bohr-presque-périodiques, et la structure hilbertienne est (quasiment) nécessaire pour les espaces de Lebesgue ou Sobolev sur le tore, et pour les espaces de Besicovitch et de Blot. Toutefois, dans le second cas, lorsque la structure de Banach suffit de manière évidente, et nous énoncerons alors les définitions et résultats avec un Banach comme espace d'arrivée.

- $(k \geq 2)$ Pour $x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, on note x_{-j} l'élément de $\mathbb{R}^{k-1}$ défini par :
$$x_{-j} = (x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_k).$$
Les couples (x_{-j}, x_j) et (x_j, x_{-j}) désigneront tous deux x.

- $\tau_p(u)$ $(u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{E}$ et $p \in \mathbb{R}^k)$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^k$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \quad \tau_p u(x) := u(x+p).$$
Pour les classes de fonctions mesurables, cette définition a encore un sens.

- Si (E, ϱ) est un espace métrique, pour tout $x \in E$ et $A \subset E$, lorsque $A \neq \emptyset$, on pose :
$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \varrho(x, y)$$

- $\mathcal{K}(E)$ (E espace topologique) désigne l'ensemble des compacts de E.

- $\mathrm{Int}A$ ($A \subset E$ topologique) est l'intérieur de A.

- Si E et F sont deux espaces vectoriels normés (e.v.n.), on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F, $\mathcal{L}^{(j)}(E, F)$ l'ensemble des applications j-linéaires continues de E vers F et $\mathcal{L}^{(j)}_{sym}(E, F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}^{(j)}(E, F)$ consistant en les applications j-linéaires continues et symétriques.

- $F^{\perp}$ ($F \subset \mathbb{H}$ espace de Hilbert) est l'orthogonal de F dans $\mathbb{H}$.

- $\mathbb{Z} < u_1, \cdots, u_p >$ ($u_i \in F$ $\mathbb{R}$-e.v.) désigne suivant S. Lang ([61] p.81), le $\mathbb{Z}$-module engendré par $u_1, \cdots, u_p$, c'est-à-dire :
$$\mathbb{Z} < u_1, \cdots, u_p > := \left\{ \sum_{j=1}^{p} k_j u_j \ : \ (k_j)_j \in \mathbb{Z}^p \right\}.$$

- $e_\nu : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ ($\nu \in \mathbb{R}^k$ –en général $k = 1$ ou m–), est la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \ \ e_\nu(x) := e^{i\nu \cdot x}.$$

- χ_A désigne la fonction caractéristique de $A \neq \emptyset$.

- μ_m est la mesure de Haar du tore $\mathbb{T}^m$, qui est reliée à la trace de la mesure de Lebesgue λ_m sur $[-\pi, \pi]^m$ par la relation, pour tout A borélien :
$$\mu_m(A) = \frac{\lambda_m(A)}{(2\pi)^m}.$$

- Si X et Y sont deux ensembles non vides, on note Y^X ou $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y.

- Pour une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$, on note $\sup f$ le *supessf*, *i.e.* le plus petit α t.q. $f \leq \alpha$ presque partout.

- Si A, B, C sont des ensembles non vides et si $f : A \times B \to C$, on définit l'opérateur de Nemytskii construit sur f comme étant l'opérateur $\mathcal{N}_f : B^A \to C^A$ défini par :

$$\forall \varphi \in B^A, \quad \mathcal{N}_f(\varphi) := [t \longmapsto f(t, \varphi(t))].$$

- Afin de traiter d'un coup plusieurs situations semblables, on définit des triplets $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et une opération $\diamond : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ dans les cas suivants :

  1. si $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (\mathbb{K}, \mathbb{E}, \mathbb{E})$, $x \diamond y := x.y$.
  2. si $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (\mathbb{E}, \mathbb{K}, \mathbb{E})$, $x \diamond y := y.x$.
  3. si $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (\mathbb{E}', \mathbb{E}, \mathbb{K})$, $x \diamond y := x \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} y$.
  4. si $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (\mathbb{E}, \mathbb{E}', \mathbb{K})$, $x \diamond y := y \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} x$.

  Par exemple, sous certaines conditions d'existence, si G est un groupe topologique abélien localement compact de mesure de Haar μ, pour certaines fonctions $f : G \to \mathcal{A}$ et $g : G \to \mathcal{B}$, on pourra définir la convolution $f * g : G \to \mathcal{C}$ par :

$$f * g(x) := \int_G f(x-y) \diamond g(y) d\mu(y).$$

Notations définies en cours de thèse.

Espaces fonctionnels

- $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = AP^0(\mathbb{E}) = AP(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = AP(\mathbb{E})$ espace des fonctions presque-périodiques $\mathbb{R} \to \mathbb{E}$, p. 13.

- $AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = AP^k(\mathbb{E})$ espace des fonctions C^k qui sont presque-périodiques jusqu'à l'ordre k, p. 16.

- $AP(\mathbb{L}, \mathbb{E})$ espace des suites p.p., p.112.

- $AP(G, \mathbb{E})$ ($G = b\mathbb{R}, b\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T}^m$), p. 121.

- $AP_M(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ espace des suites Mauclaire-p.p., p.117.

- $APU(\mathbb{R}, Q, \mathbb{E})$ espace des fonctions presque-périodiques uniformément en le paramètre, p. 19.

- $APU(G, P, \mathbb{E})$ ($G = b\mathbb{R}, b\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T}^m$), p. 122.

- $\mathcal{B}^2(\mathbb{E})$, $B^2(\mathbb{E})$, $\mathcal{B}^2_\omega(\mathbb{E})$, $B^2_\omega(\mathbb{E})$: espaces de Besicovich, par. 1.3.1.

- $B^{k,2}(\mathbb{E})$, $B^{k,2}_\omega(\mathbb{E})$ espaces de Blot et ∇ dérivation dans $B^{1,2}(\mathbb{E})$, par. 1.3.2.
- $B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H})$, p. 115.
- $B^2_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$, p. 119.
- $C^k_c(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, $C^k_{c,\omega}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, $C^k(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, $C^k_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, $L^\alpha(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$: espaces de fonctions sur le tore, par. 2.2.1
- $C^{0,j}(\mathbb{T}^m \times P,\mathbb{E})$, p. 89.
- $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, par. 2.3.1.
- $H^p_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ (pour $p \geq 2$), par. 2.7
- $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, par. 2.3.3.
- $H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{E})$, par. 2.6.
- $H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{E})$, par. 2.6.
- $PT(\mathbb{Z},\mathbb{E})$, p. 114.
- $PT(G,\mathbb{E})$ ($G = b\mathbb{R}, b\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T}^m$), p. 121.
- $QP^k(\mathbb{R},\mathbb{E}) = QP^k(\mathbb{E})$ ($k \geq 0$) et $QP(\mathbb{R},\mathbb{E}) = QP(\mathbb{E})$ espace de fonctions quasi-périodiques $\mathbb{R} \to \mathbb{E}$, p. 17.
- $QP^k_\omega(\mathbb{R},\mathbb{E}) = QP^k_\omega(\mathbb{E})$ ($k \geq 0$) et $QP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{E}) = QP_\omega(\mathbb{E})$ espace de fonctions quasi-périodiques dont le module de fréquences est engendré par les composantes de ω, p. 18.
- $QPU_M(\mathbb{R},Q,\mathbb{E})$, $QPU_\omega(\mathbb{R},Q,\mathbb{E})$ espace de fonctions quasi-périodiques uniformément en le paramètre, p. 25.
- $QPU^{0,j}_\omega(\mathbb{T}^m,P,\mathbb{E})$, p. 89.
- $TP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, p. 76.
- $TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C})$, p. 76.

Normes et produits scalaires

- $\|.\| = \|.\|_{L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})}$, par. 2.2.1.
- $\|.\|_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})} = \|.\|_{1,\omega}$, norme de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, par. 2.3.1.
- $\|.\|_{1,\omega,0}$ norme de $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, par. 2.3.3.
- $\|.\|_{H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{E})} = \|.\|_\omega$, norme de $H^1_\omega(\mathrm{Int}^m,\mathbb{E})$, par. 2.6.

- $< .;. >_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})} = < .;. >_{1,\omega}$, produit scalaire de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$, par. 2.3.1.
- $< .;. >_{1,\omega,0}$ produit scalaire de $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$, par. 2.3.3.
- $(.;.)_{H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{H})} = (.;.)_\omega$, produit scalaire de $H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{H})$, par. 2.6.

Divers

Classés selon l'alphabet latin, puis grec, puis un symbole.

- $a_\lambda(f)$ ($f \in AP^0(\mathbb{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$) est le λ-ème coefficient de Fourier-Bohr de f, p. 14
- $a(u;\nu)$: coefficient de Fourier de $u \in L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ d'indice ν, p. 53.
- $b\mathbb{Z}$ compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$, p. 116.
- d_ω, dérivation de Percival pour les fonctions régulières, p. 33.
- $f_{\underline{x}}$ voir p. 112 et p. 122.
- $\mathcal{M}\{f\} = \mathcal{M}\{f(t)\}_t$ ($f \in AP^0(\mathbb{E})$) est la moyenne de f, p. 14.
- $\mathcal{M}\{\underline{x}\} = \mathcal{M}\{x_t\}_t$, p. 114.
- $\mathcal{M}_M\{\underline{x}\} = \mathcal{M}_M\{x_t\}_t$, p. 118.
- $Mod(f)$ ($f \in AP^0(\mathbb{E})$) est le module des fréquences de f, p. 17.
- $Per(F)$ est le groupe des périodes d'une fonction F, p. 30.
- $\mathcal{Q}_\omega$ voir p. 74 et p. 86.
- α_{PW} ou $\alpha_{PW}(m)$ constante de Poincaré-Wirtinger, p. 50.
- $\varphi^{\underline{x}}$ voir p. 117 et p. 120.
- $\Lambda(f)$ ($f \in AP^0(\mathbb{E})$) est l'ensemble des fréquences de f, p. 14.
- ∇_ω, dérivation dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, par. 2.3.1.
- ∂_ω, dérivation de Percival pour les distributions, p. 58

Chapitre 1

Quelques rappels sur les fonctions presque-périodiques

Ce premier chapitre ne contient quasiment aucun résultat original ; il vise à présenter la notion de fonction presque-périodique (p.p.) et quasi-périodique (q.p.), les principales propriétés de ces fonctions et donner certains résultats existant. On présente également la notion de fonction presque-périodique à paramètre, que l'on adapte au cadre quasi-périodique. On démontre que ces espaces sont en fait isomorphes à des espaces de fonctions p.p. (ou q.p.) à valeurs dans un espace de Banach ; c'est d'ailleurs l'unique raison justifiant notre choix de se placer dans des espaces de Banach à l'arrivée plutôt que dans $\mathbb{R}^N$. La notion de fonction p.p. à paramètre introduite ici est connue pour assurer que les opérateurs de Nemytskii construits sur ces fonctions envoie l'espace des fonctions p.p. dans un espace de fonctions p.p. Notre théorème d'isomorphisme montre en fait que la condition suffisante pour que cette propriété soit satisfaite est aussi nécessaire.

Pour les résultats contenus dans ce chapitre, on renvoie à [2], [41], [73] et à [25], ainsi qu'à leur abondante bibliographie. Les traités historiques de la presque-périodicité, qui exposent certains de ces résultats pour les fonctions scalaires, sont [7], [31], [52]. Nous apprécions particulièrement [41]. Concernant le cadre des équations différentielles dissipatives (que nous n'étudierons pas), le Fink [53] fait encore référence. En ce qui s'agit du *Calcul des Variations en Moyenne* (ou *Formalisme de Blot*), on peut consulter les articles suivants : [9], [13], [14], [19], [20]. Enfin, concernant l'aspect K.A.M. que nous n'étudierons pas non plus, on peut consulter par exemple [32], [34].

1.1 Définitions et premières propriétés des fonctions presque-périodiques et quasi-périodiques

1.1.1 Espace vectoriel des fonctions presque-périodiques

Définition 1.1.1.1 *On dit qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ est* presque-périodique (au sens de Bohr) *si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists l > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \tau \in [a, a+l],\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}} < \varepsilon.$ *τ est dit* **presque-période** *attachée à ε, et l est dite longueur d'inclusion attachée à ε.*

2. *f vérifie la* **propriété de normalité** *: de toute suite de translatées $(\tau_{h_n} f)_n$, on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$.*

3. *f vérifie la* **propriété d'approximation** *: f est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques, c'est-à-dire qu'il existe une suite double $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ où pour tout n, $(a_{n,p})_{p\in\mathbb{Z}}$ est presque-nulle, telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| f - \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{n,p} e_p \right\|_\infty = 0.$$

On note $AP^0(\mathbb{E})$ (ou $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, ou $AP(\mathbb{E})$ ou enfin $AP(\mathbb{R},\mathbb{E})$) l'ensemble des fonctions presque-périodiques.

Remarque 1.1.1.2 *Dans le point* **3.**, *on a écrit $a_{n,p}$, qui est un vecteur, avant e_p, qui est une fonction à valeurs scalaires. Il paraît en effet naturel d'écrire la fonction en dernier. C'est un abus de notation que nous ferons souvent, étant entendu que $a_{n,p}e_p$ désigne en réalité la fonction $t \mapsto e_p(t)a_{n,p}$.*

On peut exprimer un peu différemment le point **3.** de la définition : $AP^0(\mathbb{E})$ est aussi la fermeture pour la norme uniforme de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des fonctions continues périodiques. Muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|_{\mathbb{E}}$, **c'est en particulier un espace de Banach**.

Proposition 1.1.1.3 *$AP^0(\mathbb{E})$ jouit des propriétés suivantes :*

1. *Tout élément de $AP^0(\mathbb{E})$ est uniformément continu et à image relativement compacte.*

2. *Si $\mathbb{E}_i$, $i = 1, 2$ sont deux espaces de Banach, et si $f \in AP^0(\mathbb{E}_1)$ et $F : \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ est uniformément continue sur $\overline{f(\mathbb{R})}$, alors $F \circ f \in AP^0(\mathbb{E}_2)$. En particulier, si $f \in AP^0(\mathbb{E})$, alors $[t \mapsto |f(t)|_{\mathbb{E}}] \in AP^0(\mathbb{R})$.*

3. *Si* $f \in AP^0(\mathbb{E})$ *et* $\varphi \in AP^0(\mathbb{K})$, *alors :* $\varphi.f \in AP^0(\mathbb{E})$.

4. *Si pour* $i = 1, \cdots, p$, $f_i \in AP^0(\mathbb{E}_i)$, $\mathbb{E}_i$ *étant un espace de Banach, alors* $(f_i)_{1\leq i\leq p} \in AP^0\left(\prod_{1\leq i\leq p} \mathbb{E}_i\right)$. *En particulier, pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un nombre de translation commun à toutes les fonctions* $f_1, \cdots, f_p$.

1.1.2 Analyse de Fourier des fonctions presque-périodiques

Proposition 1.1.2.1 *Soit* $f \in AP^0(\mathbb{E})$. *Alors, la limite suivante existe dans* $\mathbb{E}$ *et ne dépend pas de* $a \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt.$$

Cette limite s'appelle moyenne de f *et se note* $\mathcal{M}\{f\}$ *ou* $\mathcal{M}\{f(t)\}_t$. *Elle vérifie de plus la propriété suivante :*

$$\forall L \in \mathbb{E}', \quad L \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} \mathcal{M}\{f\} = \mathcal{M}\left\{L \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} f\right\}$$

Remarques 1.1.2.2 1. *L'intégrale considérée est, comme de nombreuses autres dans cette thèse, l'intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace de Banach. Nous supposerons toujours qu'il s'agit d'intégrales au sens de Bochner-Lebesgue, ou intégrales au sens fort (sur ces questions, voir [45] ou [62]).*

2. *Lorsque* f *est continue et* T*-périodique, on a :*

$$\mathcal{M}\{f\} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

Définition 1.1.2.3 *Pour* $f \in AP^0(\mathbb{E})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on définit le coefficient de Fourier-Bohr d'indice* λ *de* f *par :*

$$a_\lambda(f) = \mathcal{M}\{e_{-\lambda}.f\}.$$

Remarque 1.1.2.4 *Les coefficients de Fourier-Bohr appartiennent au complexifié* $\mathbb{E}_\mathbb{C}$ *de* $\mathbb{E}$. *Lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{E}_\mathbb{C} = \mathbb{E}$, *ce qui rend l'analyse de Fourier plus simple à exposer sur* $\mathbb{C}$. *Lorsque le corps des scalaires sous-jacent est* $\mathbb{R}$, *on a les relations supplémentaires :*

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad a_{-\lambda}(f) = \overline{a_\lambda(f)}.$$

Définition 1.1.2.5 *Soit* $f \in AP^0(\mathbb{E})$. *On définit l'ensemble :*

$$\Lambda(f) := \{\lambda \in \mathbb{R} \quad : \quad a_\lambda(f) \neq 0\}$$

dont on montre qu'il est (au plus) dénombrable.

Proposition 1.1.2.6 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$. Alors f est développable en série de Fourier-Bohr :*

$$f \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a_\lambda e_\lambda$$

la convergence ayant lieu en moyenne quadratique (au sens des familles sommables). De plus, si $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, la relation de Parseval est valide :

$$\mathcal{M}\{|f|^2_{\mathbb{H}}\} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |a_\lambda|^2_{\mathbb{H}}.$$

Remarques 1.1.2.7 *Cette proposition appelle les remarques suivantes.*

1. *On a unicité du développement en série de Fourier-Bohr, au sens où si*

$$f \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \alpha_\lambda e_\lambda$$

alors $a_\lambda(f) = \alpha_\lambda$ pour tout λ.

2. *L'espace qui réalise la synthèse harmonique n'est pas $AP^0(\mathbb{H})$ (il sera introduit plus tard).*

Les polynômes de Bochner.
Suivant la méthode de Féjer sur la Césaro-sommabilité des séries de Fourier, Bochner a construit explicitement une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers une fonction presque-périodique donnée. L'exposé suivant reprend celui de [2] (pp.25–29) ; on peut aussi consulter [41], Theorem 6.15 p.152.
Fixons $f \in AP^0(\mathbb{E})$. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ **le noyau de Féjer** :

$$K_n(t) := \sum_{\nu=-n}^{n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) e^{-i\nu t} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2.$$

Donnons-nous également une famille $B = (\beta_k)_{k \in I}$ (I intervalle de $\mathbb{N}$ commençant à 1) $\mathbb{Z}$-libre de sorte que tout élément de $\Lambda(f)$ soit combinaison linéaire à coefficients rationnels d'éléments de B. On définit **le polynôme de Bochner** :

$$Q^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{n_1 \cdots n_k}(f)(t) := \mathcal{M}\left\{ f(s+t) \prod_{j=1}^{k} K_{n_j}(\alpha_j s) \right\}_s .$$

Lorsque B est infinie, on pose :

$$f_m := Q^{\frac{\beta_1}{m!} \cdots \frac{\beta_m}{m!}}_{(m!)^2 \cdots (m!)^2}(f)$$

et si B est finie de cardinal q, on pose pour $m \geq q$:

$$f_m := Q^{\frac{\beta_1}{m!}\cdots\frac{\beta_q}{m!}}_{(m!)^2\cdots(m!)^2}(f).$$

Alors on démontre que la suite $(f_m)_m$ converge uniformément vers f.■

Proposition 1.1.2.8 *Soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{E}$. Alors la somme suivante :*

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a_\lambda e_\lambda$$

a un sens et définit une fonction presque-périodique.

Démonstration. La sommabilité d'une famille est équivalente à son absolue sommabilité. Comme $|e_\lambda| = 1$, l'existence de la somme est acquise. On note f la fonction définie par cette somme. Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de sous-ensembles finis de $\mathbb{R}$, de réunion $\Lambda(f)$ (cette suite existe car $\Lambda(f)$ est au plus dénombrable). On note alors :

$$x_n = \sum_{\lambda\in A_n} a_\lambda e_\lambda.$$

La suite $(x_n)_n$ est une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f, puisque :

$$\|f - x_n\|_\infty \leq \sum_{\lambda\notin A_n} |a_\lambda|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

On en déduit que f est presque-périodique.■

1.1.3 Dérivation et intégration des fonctions presque-périodiques

Lorsqu'une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est automatiquement périodique. En ce qui s'agit des fonctions presque-périodiques, ceci n'est pas vrai, puisque rien n'assure que la dérivée soit uniformément continue, ce qui est nécessaire pour être presque-périodique. En fait, un résultat remarquable assure que cette condition est suffisante :

Proposition 1.1.3.1 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$ dérivable. Alors la dérivée est presque-périodique si et seulement si elle est uniformément continue.*

Notation 1.1.3.2 *On note, pour $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$:*

$$AP^k(\mathbb{E}) := \{f \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{E}) \quad : \quad \forall j \leq k, f^{(j)} \in AP^0(\mathbb{E})\}.$$

Pour une fonction périodique continue, la condition d'être de moyenne nulle assure que les primitives soient presque-périodiques. Pour les fonctions presque-périodiques, cette condition ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1.3.3 *On note f la fonction :*

$$f := \sum_{n\geq 1} \frac{e_{1/n}}{n^{1,1}}.$$

Cette fonction est presque-périodique en vertu de la proposition 1.1.2.8, et de moyenne nulle en vertu de l'unicité du développement. Si ses primitives étaient presque-périodiques, leurs développements seraient (à une constante près) :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e_{1/n}}{n^{0,1}}$$

qui n'est pas une fonction presque-périodique en raison de la relation de Parseval.

En fait, la condition de relative compacité de l'image des primitives, qui est nécessaire, n'est pas automatiquement satisfaite. Il est remarquable que cette condition soit suffisante :

Proposition 1.1.3.4 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$ et F une primitive de f. L'une des conditions suivantes assure que les primitives soient presque-périodiques.*

1. *L'image de F est relativement compacte.*

2. *F est bornée et $\mathbb{E}$ est uniformément convexe*[1]*.*

Le premier énoncé est dû à Bochner, le second à Amerio, cf. [2], ch. 4 ; le chapitre de ce livre contient d'autres théorèmes.

1.1.4 Fonctions quasi-périodiques

Nous avons vu que si $f \in AP^0(\mathbb{E})$, l'ensemble $\Lambda(f)$ est au plus dénombrable. On note $Mod(f)$ le $\mathbb{Z}$-module qu'il engendre, c'est-à-dire :

$$Mod(f) := \left\{ \sum_{p=0}^{n} k_p\lambda_p \quad : \quad n \in \mathbb{N},\ k_p \in \mathbb{Z},\ \lambda_p \in \Lambda(f) \right\}.$$

Définition 1.1.4.1 *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in AP^k(\mathbb{E})$. On dit que f est* quasi-périodique *(jusqu'à l'ordre k), et l'on note $f \in QP^k(\mathbb{E})$ (ou $QP^k(\mathbb{R},\mathbb{E})$)*[2]*, lorsque $Mod(f)$ est libre de type fini*[3]*.*

[1] cf [2] p.49 et [33] p.51. Les espaces uniformément convexes sont réflexifs ; les espaces ℓ^p et L^p avec $1 < p < +\infty$ et les espaces de Hilbert sont uniformément convexes.

[2] ou encore $QP(\mathbb{E})$ ou $QP(\mathbb{R},\mathbb{E})$ si $k = 0$

[3] c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \cdots, u_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$Mod(f) = \mathbb{Z}u_1 + \cdots + \mathbb{Z}u_p.$$

Notation 1.1.4.2 *Soit $f \in QP^0(\mathbb{E})$ et $\omega := (\omega_1, \cdots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que ses composantes soient une base sur $\mathbb{Z}$ de $Mod(f)$ i.e. $Mod(f) = \mathbb{Z} < \omega >$. On note alors : $f \in QP^k_\omega(\mathbb{E}) = QP^k_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (ou si $k = 0$, $QP_\omega(\mathbb{E}) = QP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$).*

1.2 Fonctions presque-périodiques et quasi-périodiques à paramètres

On rappelle ici la définition d'une fonction presque-périodique uniformément par rapport à un paramètre et l'on démontre l'isomorphisme avec un espace de fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach. On adapte ces considérations au cadre quasi-périodique.

1.2.1 Généralités sur les fonctions presque-périodiques à paramètres

Soit X un espace de Banach et P une partie de X vérifiant l'une des deux conditions :

- P est compacte (on la notera plutôt K).
- Il existe une suite exhaustive de compacts, c'est-à-dire une suite croissante de compacts non vides $(K_n)_{n\geq 1}$ telle que $P = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ et pour tout n, $K_n \subset \text{Int}K_{n+1}$.

Dans le second cas, on dira que P est **dénombrable à l'infini**.

Remarque 1.2.1.1 *Tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^p$ est dénombrable à l'infini. On peut en effet prendre :*

$$K_n := \{x \in \mathbb{R}^p \quad : \quad d(x, \Omega^c) \geq 1/n \quad \text{et} \quad |x| \leq n\}.$$

On se donne une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ et on définit l'opérateur de Nemytskii construit sur f de $P^{\mathbb{R}}$ vers $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ comme étant :

$$\forall \varphi \in P^{\mathbb{R}}, \quad \mathcal{N}_f(\varphi) := [t \mapsto f(t, \varphi(t))] \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}.$$

Même si pour tout $\alpha \in P$, la fonction $f(., \alpha)$ est presque-périodique, l'opérateur de Nemytskii n'associe pas toujours une fonction presque-périodique. Il faut une certaine uniformité par rapport à α sur le choix du l de la définition (voir [25], [53] et surtout [93]). C'est pourquoi on retient la définition suivante, dont on verra plus tard l'aspect naturel du point de vue des espaces fonctionnels.

---

et :

$$(\sum_i k_i u_i = 0, \quad k_i \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \forall i, \quad k_i = 0.$$

Définition 1.2.1.2 *Soit Q une partie non vide de X et $f \in C^0(\mathbb{R}, Q, \mathbb{E})$. On dit que f est presque-périodique en t, uniformément par rapport à α si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall K \in \mathcal{K}(Q), \exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a+l[$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{\alpha \in K} |f(t+\tau, \alpha) - f(t, \alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

On note $APU(\mathbb{R}, Q, \mathbb{E})$ la classe des telles fonctions.

Les principales propriétés de ces fonctions sont résumées dans [25]. Signalons simplement deux de ces propriétés que nous ne démontrerons pas.
La première nous indique que cette classe de fonction répond bien au problème posé — et nous verrons plus tard, qu'en un certain sens, elle est minimale.

Proposition 1.2.1.3 *Soit Q une partie non vide de X et $f \in APU(\mathbb{R}, Q, \mathbb{E})$, et $\varphi \in AP^0(X)$ telle que $\varphi(\mathbb{R}) \subset Q$. Alors :*

$$[t \mapsto f(t, \varphi(t))] \in AP^0(\mathbb{E}).$$

Proposition 1.2.1.4 *Tout élément de $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ est uniformément continu et borné.*

1.2.2 Fonctions presque-périodique avec un ensemble de paramètres compact

On suppose ici que $P = K$ est un compact.
On munit $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ de la norme :

$$\|f\|_{APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})} := \sup_{(t,\alpha) \in \mathbb{R} \times K} |f(t, \alpha)|_{\mathbb{E}}$$

et nous allons voir immédiatement que l'on obtient un espace de Banach.

On va démontrer que l'on peut considérer $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ comme un espace de fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach.

Proposition 1.2.2.1 *Soit K un compact de X. L'application*

$$\Phi_K : APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E}) \to AP^0(C^0(K, \mathbb{E}))$$

définie par :

$$\Phi_K(f) := [t \mapsto f(t, .)]$$

est bien définie et est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach.

Démonstration. Existence de Φ_K.
Soit $f \in APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$. Elle est uniformément continue, donc continue, et donc $f(t,.) \in C^0(K, \mathbb{E})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, comme f est uniformément continue, étant donné $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta > 0, \quad [\max\{|t-t'|; |\alpha-\alpha'|\} \leq \eta] \Longrightarrow [|f(t,\alpha) - f(t',\alpha')|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon]$$

et en prenant $\alpha' = \alpha$, puis en passant au sup sur α, il vient :

$$(|t-t'| \leq \eta) \Longrightarrow (\|f(t,.) - f(t',.)\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon).$$

Ainsi, $\Phi_K(f) \in C^0(\mathbb{R}, C^0(K, \mathbb{E}))$. Montrons maintenant qu'elle est presque-périodique. Comme $f \in APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$, par définition, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a+l[, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha\in K} |f(t+\tau,\alpha) - f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a+l[, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau,.) - f(t,.)\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon.$$

Finalement Φ_K est bien définie.
Φ_K est linéaire et isométrique (donc injective et continue). Ces deux points sont évidents, le second résultant de :

$$\|\Phi_K(f)\|_{AP^0(C^0(K,\mathbb{E}))} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t,.)\|_{C^0(K,\mathbb{E})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha\in K} |f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}} = \|f\|_{APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})}.$$

Φ_K est surjective (donc bijective, et donc bicontinue puisque isométrique).
Soit $\phi \in AP^0(C^0(K, \mathbb{E}))$. Pour alléger, on note ϕ_t au lieu de $\phi(t)$, et c'est alors un élément de $C^0(K, \mathbb{E})$. Le candidat naturel à vérifier $\Phi_K(f) = \phi$ est $f(t,\alpha) := \phi_t(\alpha)$. Il y a juste à vérifier que l'on a bien un élément de $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$. Commençons par la continuité. Fixons $(t_0, \alpha_0) \in \mathbb{R} \times K$. On a :

$$|f(t,\alpha) - f(t_0,\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq |f(t,\alpha) - f(t_0,\alpha)|_{\mathbb{E}} + |f(t_0,\alpha) - f(t_0,\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq$$

$$\|\phi_t - \phi_{t_0}\|_{C^0(K,\mathbb{E})} + |\phi_{t_0}(\alpha) - \phi_{t_0}(\alpha_0)|_{\mathbb{E}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme ϕ est continue :

$$\exists \delta > 0, \quad (|t-t_0| \leq \delta) \Longrightarrow (\|\phi_t - \phi_{t_0}\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon/2)$$

et comme ϕ_{t_0} est continue :

$$\exists \delta' > 0, \quad (|\alpha-\alpha_0| \leq \delta') \Longrightarrow (|\phi_{t_0}(\alpha) - \phi_{t_0}(\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon/2).$$

Finalement, pour $(t,\alpha) \in \mathbb{R} \times K$ suffisamment voisin de (t_0, α_0), on a $|f(t,\alpha) - f(t_0,\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon$, d'où la continuité.
Comme ϕ est presque-périodique, on tire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a+l[, \quad \|\phi_{t+\tau} - \phi_t\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon$$

d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a+l[, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{\alpha \in K} |f(t+\tau, \alpha) - f(t, \alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

ϕ_K est donc bien surjective. Comme l'espace d'arrivée est un Banach et que Φ_K est bicontinue, $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ est bien un espace de Banach.
La proposition est donc complètement démontrée.■

On déduit immédiatement de cette proposition que les propriétés générales sur les fonctions presque-périodiques s'adaptent sans problème à $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$. Pour ne citer qu'un exemple, voici un énoncé de densité de polynômes trigonométriques à coefficients continus :

Proposition 1.2.2.2 *Soit $f \in APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$. Alors il existe une famille d'éléments de $C^0(K, \mathbb{E})$, $(a_\lambda^{(n)})_{(n,\lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}}$, telle que :*

- *pour tout n, $(a_\lambda^{(n)})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est presque-nulle*
- *on ait :*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{(t,\alpha) \in \mathbb{R} \times K} \left| f(t, \alpha) - \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a_\lambda^{(n)}(\alpha) e_\lambda(t) \right|_{\mathbb{E}} = 0.$$

Démonstration. $\Phi_K(f)$ est approchable par des polynômes trigonométriques à coefficients dans $C^0(K, \mathbb{E})$. Il existe donc une famille $(a_\lambda^{(n)})_{(n,\lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}}$ d'éléments de $C^0(K, \mathbb{E})$ telle que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (a_\lambda^{(n)})_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{ est presque} - \text{nulle}$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \Phi_K(f)(t, .) - \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a_\lambda^{(n)}(.) e_\lambda(t) \right\|_{C^0(K, \mathbb{E})} = 0.$$

Comme Φ_K est une isométrie, la seconde relation donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{(t,\alpha) \in \mathbb{R} \times K} \left| f(t, \alpha) - \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a_\lambda^{(n)}(\alpha) e_\lambda(t) \right|_{\mathbb{E}} = 0$$

c'est ce que l'on souhaitait.■

1.2.3 Fonctions presque-périodiques avec un ensemble de paramètres dénombrable à l'infini

On se fixe une fois pour toutes une famille croissante de compacts non vides $(K_n)_{n \geq 1}$ telle que $P = \bigcup_n K_n$ et pour tout n, $K_n \subset \mathrm{Int} K_{n+1}$.
On commence par un lemme très utile pour la suite :

Lemme 1.2.3.1 *Soit K un compact de P. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset \mathrm{Int}K_n$.*

Preuve. On a $K \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} K_n$, donc en vertu de l'hypothèse sur la suite de compacts :

$$K \subset \bigcup_{n\geq 2} \mathrm{Int}K_n.$$

Mais on a ainsi un recouvrement ouvert de K, donc par Borel-Lebesgue, il existe un entier $n \geq 2$ tel que :

$$K \subset \bigcup_{2\leq p\leq n} \mathrm{Int}K_p = \mathrm{Int}K_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.■

On munit $APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ d'une structure d'e.v.t.l.c. (espace vectoriel topologique localement convexe) à base dénombrable filtrante de semi-normes $(p_n)_{n\geq 1}$, où :

$$p_n(f) := \sup_{(t,\alpha)\in\mathbb{R}\times K_n} |f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}} = \left\| f_{|\mathbb{R}\times K_n} \right\|_{APU(\mathbb{R},K_n,\mathbb{E})}.$$

On voit immédiatement que cette topologie est séparée.
Rappelons que cette topologie peut aussi être définie par la métrique d, où :

$$d(f;g) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$

Lemme 1.2.3.2 *$APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ est un espace de Fréchet.*

Preuve. On va utiliser la structure métrique. Soit $(f_p)_p$ une suite de Cauchy dans $APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ muni de d.
Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P_0, \quad \forall p \geq P_0, \quad \forall q, \quad d(f_{p+q}; f_p) < \varepsilon.$$

En particulier, ayant fixé un $n \geq 1$ et choisi $\varepsilon < 2^{-n}$, on a :

$$\exists P_0, \quad \forall p \geq P_0, \quad \forall q, \quad \frac{p_n(f_{p+q} - f_p)}{1 + p_n(f_{p+q} - f_p)} < \varepsilon$$

donc :

$$\exists P_0, \quad \forall p \geq P_0, \quad \forall q, \quad p_n(f_{p+q} - f_p) < \frac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon}.$$

$(f_{p|_{\mathbb{R}\times K_n}})_p$ est donc de Cauchy dans le Banach $APU(\mathbb{R}, K_n, \mathbb{E})$ donc converge vers un élément $f^{(n)} \in APU(\mathbb{R}, K_n, \mathbb{E})$.
Par unicité de la limite, on a si $m \geq n$, $f^{(m)}_{|\mathbb{R}\times K_n} = f^{(n)}$, donc il est légitime de poser :

$$f(t,\alpha) := f^{(n)}(t,\alpha) \quad \text{si } \alpha \in K_n$$

(il existe un tel K_n en raison de 1.2.3.1).
Soit $(t_0, \alpha_0) \in \mathbb{R} \times P$ et n tel que $\alpha_0 \in \mathrm{Int} K_n$. Alors $\mathbb{R} \times \mathrm{Int} K_n$ est un voisinage ouvert de (t_0, α_0) dans $\mathbb{R} \times P$, et sur ce voisinage, f est égale à la fonction continue $f^{(n)}$. On en déduit que f est continue en (t_0, α_0), donc partout.
Soit maintenant K un compact fixé. Par le lemme 1.2.3.1, il existe N tel que $K \subset K_N$. Comme $f^{(N)}$ est presque-périodique, on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a; a + l[, \ \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{\alpha \in K_N} |f(t + \tau, \alpha) - f(t, \alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon,$$

donc on a bien :

$$\forall K \in \mathcal{K}(P), \ \forall \varepsilon > 0, \exists l > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a; a+l[, \ \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{\alpha \in K} |f(t+\tau, \alpha) - f(t, \alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon,$$

Ainsi $f \in APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$.■
Similairement, on munit $AP^0(C^0(P, \mathbb{E}))$ d'une structure d'e.v.t.l.c. à base dénombrable filtrante de semi-normes $(\pi_n)_{n \geq 1}$, où :

$$\pi_n(f) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, .)\|_{C^0(P, \mathbb{E})}.$$

On voit que cette topologie est séparée et qu'elle peut aussi être définie par la métrique D, où :

$$D(f; g) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{\pi_n(f - g)}{1 + \pi_n(f - g)}.$$

Comme avant, on démontrerait :

Lemme 1.2.3.3 *$AP^0(C^0(P, \mathbb{E}))$ est un espace de Fréchet.*

On donne la version Fréchet de la proposition 1.2.2.1 :

Proposition 1.2.3.4 *L'application $\Phi_P : APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E}) \to AP^0(C^0(P, \mathbb{E}))$ définie par :*

$$\Phi_P(f) := [t \longmapsto f(t, .)]$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Fréchet.

Démonstration. Soit $\alpha \in P$, et n un entier tel que $\alpha \in \mathrm{Int} K_n$. On a alors :

$$\Phi_P(f)(t, \alpha) = \Phi_{K_n}(t)(t, \alpha)$$

ce qui justifie l'existence de Φ_P, montre son caractère linéaire et isométrique. Il ne reste qu'à démontrer la surjectivité.
Etant donné $\phi \in AP^0(C^0(P, \mathbb{E}))$, on pose :

$$f(t, \alpha) := \Phi_{K_n}^{-1}(\phi)(t, \alpha)$$

où n est un entier quelconque tel que $\alpha \in \mathrm{Int} K_n$ (la définition de f ne dépend pas du choix de n). Par construction même, pour tout n, $f_{|\mathbb{R} \times K_n} \in APU(\mathbb{R}, K_n, \mathbb{E})$, et comme tout compact K s'injecte dans un K_n (cf. 1.2.3.1), on peut conclure que $f \in APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$.
Enfin, le fait que $\Phi_P(f) = \phi$ est immédiat par construction.■

1.2.4 Extension au cadre quasi-périodique

Fonctions quasi-périodiques à paramètres

Par souci de simplification, les résultats sont énoncés et démontrés dans ce paragraphe avec un ensemble de paramètres compact, les résultats s'étendant canoniquement au cadre dénombrable à l'infini.
On note $\mathcal{M}_1$ l'opérateur de moyenne sur $AP^0(C^0(K,\mathbb{E}))$ et l'on définit sur $APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})$ l'opérateur de moyenne à valeurs dans $C^0(K,\mathbb{E})$ suivant :

$$\mathcal{M}_2 := \mathcal{M}_1 \circ \Phi_K.$$

C'est un opérateur linéaire continu de norme 1 comme composé de deux tels opérateurs. On notera $\mathcal{M}_2\{f\}$ ou $\mathcal{M}_2\{f(t,\alpha)\}_{(t,\alpha)}$ sa valeur sur $f \in APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})$.
On définit alors l'élément $\tilde{a}_\lambda(f) \in C^0(K,\mathbb{E})$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \tilde{a}_\lambda(f) := \mathcal{M}_2\{f(t,\alpha)e_{-\lambda}(t)\}_{(t,\alpha)}.$$

On a en particulier la relation :

$$\tilde{a}_\lambda(f)(\alpha) = a_\lambda\left(\Phi_K(f(.,\alpha))\right).$$

On définit également les opérateurs d'évaluation en $\beta \in K$ suivants :

- $ev^1_\beta : APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{E})$ par :

$$ev^1_\beta(f) := f(.,\beta).$$

- $ev^2_\beta : C^0(K,\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{E}$ par :

$$ev^2_\beta(\varphi) := \varphi(\beta).$$

Ces opérateurs sont visiblement linéaires continus de norme 1.

L'évaluation commute avec les opérateurs de moyenne. Plus précisément :

Lemme 1.2.4.1 *On a :*

$$ev^2_\beta \circ \mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \circ ev^1_\beta.$$

Preuve. Il s'agit de montrer $ev^2_\beta \circ \mathcal{M}_1 \circ \Phi_K = \mathcal{M} \circ ev^1_\beta$, soit, comme Φ_K est un isomorphisme (isométrique) :

$$ev^2_\beta \circ \mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \circ ev^1_\beta \circ \Phi_K^{-1}.$$

Chaque membre de l'égalité est un opérateur linéaire continu (de norme 1), il suffit donc de montrer l'égalité sur un sous-ensemble dense.

Prenons pour sous-ensemble dense l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques à valeurs dans $C^0(K,\mathbb{E})$. Un tel polynôme a la forme :

$$f(t) = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a_\lambda e_\lambda, \quad a_\lambda \in C^0(K,\mathbb{E}),$$

la somme étant finie. On calcule alors :

$$ev_\beta^2 \circ \mathcal{M}_1(f) = ev_\beta^2(a_0(.)) = a_0(\beta)$$

et :

$$\mathcal{M}\circ ev_\beta^1 \circ \Phi_K^{-1}(f) = \mathcal{M}\circ ev_\beta^1 \circ \Phi_K^{-1}\left([(t,\alpha)\mapsto \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a_\lambda(\alpha)e_\lambda(t)]\right) = \mathcal{M}\left\{\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a_\lambda(\beta)e_\lambda\right\} = a_0(\beta).$$

Les deux membres sont donc identiques.■

Lemme 1.2.4.2 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe $\alpha \in K$ tel que $a_\lambda(f(.,\alpha)) \neq 0$.*
2. $\tilde{a}_\lambda(f) \neq 0$.

Preuve. Ce lemme résulte immédiatement du précédent appliqué à la fonction $(t,\alpha)\mapsto f(t,\alpha)e_{-\lambda}(t)$ et à $\beta = \alpha$.■
En vertu de ce lemme, on a l'égalité :

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \quad : \quad \tilde{a}_\lambda(f) \neq 0\} = \bigcup_{\alpha\in K} \Lambda(f(.,\alpha)).$$

On note $\Lambda(f)$ cet ensemble[4], et $Mod(f)$ le $\mathbb{Z}$-module qu'il engendre.
Etant donné un $\mathbb{Z}$-module de type fini M, on pose alors :

$$QPU_M(\mathbb{R},K,E) := \{f \in APU(\mathbb{R},K,E) \quad : \quad Mod(f) \subset M\}$$

et on abrège $QPU_{\mathbb{Z}<\omega>}(\mathbb{R},K,E)$ en $QPU_\omega(\mathbb{R},K,E)$.

Enoncé du résultat principal

Du fait du lemme 1.2.4.2, les énoncés 1.2.2.1 et 1.2.3.4 s'adaptent immédiatement au cadre quasi-périodique en l'énoncé suivant :

[4]Pour le cas dénombrable à l'infini, il faut prendre la réunion des ensembles définis par restriction à chaque $\mathbb{R}\times K_n$.

Proposition 1.2.4.3 *L'application* $\Phi_K : QPU_\omega(\mathbb{R}, K, \mathbb{E}) \to QP^0_\omega(C^0(K, \mathbb{E}))$ *définie par :*

$$\Phi_K(f) := [t \longmapsto f(t, .)]$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach.
L'application $\Phi_P : QPU_\omega(\mathbb{R}, P, \mathbb{E}) \to QP^0_\omega(C^0(P, \mathbb{E}))$ *définie par :*

$$\Phi_P(f) := [t \longmapsto f(t, .)]$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Fréchet.

1.3 Espaces de Besicovitch et de Blot

Il s'agit de construire des espaces jouant un rôle analogues dans les cas presque-périodiques et quasi-périodiques à l'espace L^2 et aux espaces de Sobolev.

1.3.1 Espaces de Besicovitch

Soit $\mathcal{B}^2(\mathbb{E})$ la fermeture de $AP^0(\mathbb{E})$ dans $\mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{E})$ pour la semi-norme $f \mapsto \overline{\mathcal{M}}\{|f|^2\}^{1/2}$. On note $f \sim_2 g$ si $\overline{\mathcal{M}}\{|f-g|^2\} = 0$. Le quotient de $\mathcal{B}^2(\mathbb{E})$ pour cette relation d'équivalence se note $B^2(\mathbb{E})$ et s'appelle l'espace des fonctions presque-périodique au sens de Besicovitch. Lorsque l'on fait le même opération en remplaçant $AP^0(\mathbb{E})$ par $QP^0_\omega(\mathbb{E})$, on obtient un espace noté $B^2_\omega(\mathbb{E})$.
Ces espaces sont complets, et si de plus $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, ce sont des espaces de Hilbert lorsqu'ils sont munis de :

$$< u; v >_{B^2} = \mathcal{M}\{u \cdot_{\mathbb{H}} v\}.$$

On peut bien entendu développer les éléments de ces espaces en série de Fourier, et si $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, leur développement satisfait la relation de Parseval.

Proposition 1.3.1.1 *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Tout* $f \in B^2(\mathbb{E})$ *admet un développement en série de Fourier :*

$$f \sim_2 \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(f; \lambda) e_\lambda$$

et si $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, f *satisfait la relation de Parseval suivante :*

$$\mathcal{M}\{|f|^2_{\mathbb{H}}\} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |a(f; \lambda)|^2_{\mathbb{H}}.$$

2. *Tout* $f \in B^2_\omega(\mathbb{E})$ *admet un développement en série de Fourier :*

$$f \sim_2 \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>} a(f; \lambda) e_\lambda$$

et si $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, *f satisfait la relation de Parseval suivante :*

$$\mathcal{M}\{|f|_{\mathbb{H}}^2\} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>} |a(f;\lambda)|_{\mathbb{H}}^2.$$

Mieux, le théorème de Riesz-Fisher-Besicovitch suivant montre que ces espaces réalisent en fait la synthèse harmonique, et jouent donc bien un rôle analogue à $L^2(]0,T[,\mathbb{H})$ pour les fonctions périodiques :

Théorème 1.3.1.2 (Riesz-Fisher-Besicovitch) *Les applications suivantes sont des isomorphismes isométriques d'espaces de Hilbert.*

1. $\Phi_1 : B^2(\mathbb{H}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{R},\mathbb{H})$ *défini par :*

$$\Phi_1(f) := (a(f;\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}.$$

2. $\Phi_2 : B^2_\omega(\mathbb{H}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}<\omega>,\mathbb{H})$ *défini par :*

$$\Phi_2(f) := (a(f;\lambda))_{\lambda\in\mathbb{Z}<\omega>}.$$

1.3.2 Espaces de Blot

Il s'agit de définir une notion de dérivée faible sur les espaces de Besicovitch.

Dans [23], pour $\mathbb{H}$ de dimension finie, J.Blot considère le générateur infinitésimal du groupe $(\tau_r)_r$ des translations dans $B^2(\mathbb{H})$; celui-ci se note ∇ et son domaine, noté $B^{1,2}(\mathbb{H})$, est l'espace de Blot. Il correspond à l'espace de Sobolev $H^1(]0,T[,\mathbb{H})$ du cas périodique. C'est un espace complet, on munit $B^{1,2}(\mathbb{H})$ du produit scalaire :

$$<u;v>_{B^{1,2}} = <u;v>_{B^2} + <\nabla u;\nabla v>_{B^2},$$

qui en fait un espace de Hilbert. Les modifications nécessaires pour généraliser à un espace de Hilbert ont été indiquées par P. Cieutat dans sa thèse (cf. [39]). Signalons sans démonstration les propriétés suivantes (cf. Blot [23]) :

Proposition 1.3.2.1 *Les propriétés suivantes sont vraies.*

1. *Si* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ *et* $r \in \mathbb{R}$, *alors* $\nabla(\tau_r u) \sim_2 \tau_r(\nabla u)$.

2. *Si* $u \in AP^1(\mathbb{E})$, *alors* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$*et* $\nabla u \sim_2 \dot{u}$.

3. *Si* $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, *alors* $AP^k(\mathbb{E})$ *est dense dans* $B^{1,2}(\mathbb{E})$.

4. *Si* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, *alors* $\mathcal{M}\{\nabla u\} = 0$.

5. *Si* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, *alors* $\forall\lambda$, $a(\nabla u;\lambda) = i\lambda a(u;\lambda)$.

6. *Si* $u \in AP^0(\mathbb{E}) \cap H^1_{loc}(\mathbb{E})$ *et si* $\dot{u} \in B^2(\mathbb{E})$, *alors* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$.

7. *Si* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E}')$ *et* $v \in AP^1(\mathbb{E})$, *alors* $u \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} v \in B^{1,2}(\mathbb{R})$, *et :*

$$\nabla(u \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} v) = \nabla u \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} v + u \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} \dot{v}.$$

Remarque 1.3.2.2 *Le point* **5.** *de la proposition indique que pour dériver une fonction de* $B^{1,2}(\mathbb{E})$, *il suffit de dériver terme à terme la série de Fourier.*

On a la propriété essentielle suivante :

Proposition 1.3.2.3 *Soit* $u \in B^2(\mathbb{H})$. *On a :*

$$\left(u \in B^{1,2}(\mathbb{H})\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(1 + |\lambda|^2\right) |a_\lambda(u)|^2_{\mathbb{H}} < +\infty\right).$$

A partir de là, on définit canoniquement les espaces $B^{j,2}(\mathbb{E})$ par itération, et les espaces $B^{j,2}_\omega(\mathbb{E}) := B^{j,2}(\mathbb{E}) \cap B^2_\omega(\mathbb{E})$. Les résultats s'étendent de manière naturelle à $B^{1,2}_\omega(\mathbb{E})$.

Chapitre 2

Fonctions sur le tore et fonctions multiplement périodiques

Dans le chapitre 2, on commence par faire quelques préliminaires élémentaires et faire le lien entre les fonctions définies sur le cube et les fonctions définies sur le tore, qui sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^m$ et $2\pi-$périodiques en chacune de leurs variables. On introduit ensuite des espaces du type de Sobolev avec des dérivations dans une seule direction, tant sur le cube que sur le tore. L'introduction de ces espaces sera pleinement motivée dans le chapitre 4. On fait une étude détaillée du cas d'une dérivation d'ordre 1, pour les dérivations supérieures, on se contente de la définition. De même, on se limite au cas modelé sur L^2, alors qu'il serait possible de les définir pour d'autres L^p. Ensuite, on étudie l'Analyse Harmonique sur ces espaces, et l'on démontre que les différentes manières de voir la dérivation faible sont équivalentes. On fait ensuite le lien entre les distributions périodiques et les distributions sur le tore. On introduit un espace analogue à H_0^1, pour lequel on démontre une inégalité de Poincaré-Wirtinger, et pour lequel on démontre que le résultat de Rellich-Kondrachov usuel n'est pas valable : on retrouve ici l'absence de compacité dans nos problèmes. On démontre ensuite un résultat d'absolue continuité et de densité de fonctions régulières, qui sera utile dans notre procédure de régularisation des solutions faibles. On élabore une théorie des traces pour nos espaces qui aboutit naturellement à un théorème de traces.

2.1 Préliminaires

On considère dans cette partie X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ de dimension finie m. Concernant l'espace de départ, il est plus facile de travailler avec des notions intrinsèques, et de ne faire l'identification $X = \mathbb{R}^m$ qu'après. Ce choix rend plus facile notamment l'étude des changements de base, et c'est pourquoi nous avons choisi cette présentation.

2.1.1 Notions intrinsèques

La définition suivante est donnée dans [36] p.55 et [84] p.64.

Définition 2.1.1.1 *On dit que la fonction $F : X \longrightarrow \mathbb{E}$ est périodique s'il existe $p \in X$ non nul tel que pour tout $x \in X$, $F(x+p) = F(x)$. Un tel vecteur p, de même que 0, est appelé une période de F.*

L'ensemble des périodes d'une fonction est un sous-groupe abélien de $(X, +)$, qui est de plus fermé si la fonction est continue. On note $Per(F)$ l'ensemble des périodes d'une fonction F.

Proposition 2.1.1.2 *Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{E}$, Y un e.v.n. de dimension m et L un isomorphisme de Y sur X. On définit $G := F \circ L : Y \longrightarrow \mathbb{E}$. Alors G est périodique, et $Per(G) = L^{-1}(Per(F))$.*

Démonstration. Soit p une période de F et $y \in Y$. On a : $G(z + L^{-1}(p)) = F \circ L(z + L^{-1}(p)) = F(L(z) + p) = F(L(z)) = G(z)$, ce qui montre que G est périodique et que $L^{-1}(Per(F)) \subset Per(G)$. L'inclusion réciproque s'obtient alors en permutant F et G.■

2.1.2 Lecture dans une base

Précisons maintenant en exhibant une base de X. On considère la base canonique de $X = \mathbb{R}^m$, notée $(e_j)_{1 \leq j \leq m}$. On note $(e_j^*)_{1 \leq j \leq m}$ sa base duale et χ l'isomorphisme de X sur $(\mathbb{R}^m)^*$ défini par :

$$\chi(x) = (e_j^*(x))_{1 \leq j \leq m}.$$

Notons que :

$$\chi^{-1}(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i.$$

On étudie maintenant le lien entre la fonction F et la fonction $f := F \circ \chi^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.1.2.1 *On dit que f est* 2π-périodique en chaque variable *si :*

$$\forall j = 1, \cdots, m, \quad \forall x_{-j} \in \mathbb{R}^{m-1}, \quad \forall x_j \in \mathbb{R}, \quad f(x_{-j}, x_j + 2\pi) = f(x_{-j}, x_j),$$

ce qui est équivalent à la formulation intrinsèque suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^m, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad f(x + 2\pi k) = f(x).$$

On a alors :

Proposition 2.1.2.2 *Il y a équivalence des deux assertions suivantes :*

1. *F est périodique et $Per(F) \supset 2\pi\mathbb{Z} < e_1, \cdots, e_m >$.*
2. *f est 2π-périodique en chaque variable.*

Démonstration. Voir la démonstration de la proposition 2.1.3.1 qui est une généralisation.■

2.1.3 Effet d'un changement de base

Considérons maintenant une autre base de $\mathbb{R}^m$, notée $(b_j)_{1\leq j\leq m}$. On note $(b_j^*)_{1\leq j\leq m}$ sa base duale et χ_1 l'isomorphisme de X sur $(\mathbb{R}^m)^*$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m,\ \chi_1(x) = (b_j^*(x))_{1\leq j\leq m}.$$

Concernant la base canonique, on conserve les notations originales. On pose enfin $f_1 := F \circ \chi_1^{-1}$.

Proposition 2.1.3.1 *Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

1. *F est périodique et $Per(F) \supset 2\pi b_j$.*
2. *Pour tout $x_{-j} \in \mathbb{R}^{m-1}$, $f_1(x_{-j}, \cdot)$ est 2π-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{E}$.*

Démonstration. [**1** $\Rightarrow$ **2**]. Fixons arbitrairement $x_{-j} \in \mathbb{R}^{m-1}$. Alors, pour tout $x_j \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_1(x_{-j}, x_j + 2\pi) = F \circ \chi_1^{-1}(x_{-j}, x_j + 2\pi) = F\left(2\pi b_j + \sum_{i=1}^m x_i b_i\right) =$$

$$F\left(\sum_{i=1}^m x_i b_i\right) = F \circ \chi_1^{-1}(x_{-j}, x_j) = f_1(x_{-j}, x_j).$$

D'où l'assertion **2.** [**2** $\Rightarrow$ **1**]. Fixons arbitrairement $x \in \mathbb{R}^m$.

$$F(x + 2\pi b_j) = F \circ \chi_1^{-1}(b_{-j}^*(x), b_j^*(x) + 2\pi) = f_1(b_{-j}^*(x), b_j^*(x) + 2\pi) =$$

$$f_1(b_{-j}^*(x), b_j^*(x)) = F \circ \chi_1^{-1}(b_{-j}^*(x), b_j^*(x)) = F(x).$$

On en déduit l'assertion **1.**■

Notation 2.1.3.2 *On définit $Q^m \subset X$ par :*

$$Q^m := \left\{\sum_{i=1}^m x_i e_i\ :\ \forall i = 1, \cdots m, x_i \in [-\pi; \pi]\right\}.$$

On a : $\chi(Q^m) = [-\pi, \pi]^m$. On note $K^m := \chi_1(Q^m)$.

2.1.4 Changement de base et intégrales

On conserve les notations précédentes, en supposant les deux bases orthonormales. On pose alors, pour $y_{-1} \in \mathbb{R}^{m-1}$,

$$K(y_{-1}) := \{y_1 \in \mathbb{R}\ :\ (y_1, y_{-1}) \in K^m\}$$

et :

$$D := \{y_{-1} \in \mathbb{R}^{m-1}\ :\ K(y_{-1}) \neq \emptyset\}.$$

La formule du changement de variables consécutive à un changement de base dans les intégrales s'exprime comme suit :

Proposition 2.1.4.1 *Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{E}$ continue, on a :*

$$\int_{[-\pi,\pi]^m} f(x)dx = \int_D \left(\int_{K(y_{-1})} f_1(y)dy_1 \right) dy_2 \cdots dy_m$$

Démonstration. Les fonctions f, f_1 et F sont continues. Par le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\chi_1(Q^m)} f_1(y)dy = \int_D \left(\int_{K(y_{-1})} f_1(y)dy_1 \right) dy_2 \cdots dy_m.$$

Par ailleurs, du fait que les isomorphismes χ et χ_1 sont orthogonaux, leur déterminant est en valeur absolue égal à 1, ce qui donne les deux égalités par la formule du changement de variables :

$$\int_{\chi_1(Q^m)} f_1(y)dy = \int_{Q^m} F(x)dx = \int_{\chi(Q^m)} f(x)dx$$

et l'on obtient le résultat par comparaison des deux égalités et en utilisant $\chi(Q^m) = [-\pi, \pi]^m$.■

Lemme 2.1.4.2 *Pour tout $y_{-1} \in D$,$K(y_{-1})$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ de diamètre égal à $2\pi\sqrt{m}$.*

Preuve. Fixons $y_{-1} \in D$. $K(y_{-1})$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}$, puisque c'est l'image réciproque du convexe K^m par l'application affine $\phi(y_1) = (y_1, y_{-1})$, on en déduit que $K(y_{-1})$ est un intervalle fermé. Comme $K(y_{-1}) \subset \chi_1(Q^m)$, on a :

$$diam[K(y_{-1})] \leq diam[\chi_1(Q^m)].$$

Comme χ_1 est orthogonale, on sait par la formule du changement de variable dans les intégrales que :

$$diam[\chi_1(Q^m)] = diam[Q^m].$$

Enfin, si $x, y \in Q^m$, on a :

$$|x - y|^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 \leq m(2\pi)^2,$$

le majorant étant atteint (par exemple) pour $x = (-\pi, \cdots, -\pi)$ et $y = (\pi, \cdots, \pi)$. On en déduit que :

$$diam[Q^m] = 2\pi\sqrt{m},$$

ce qui démontre le lemme.■

2.1.5 Changement de base et dérivation

$(e_i)_i$ désigne la base canonique de X, et on désigne par $(b_j)_j$ une autre base orthonormée telle que $b_1 = \omega/|\omega|$. Soit $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{E}$ une fonction 2π-périodique en chaque variable, $F := U \circ \chi$ et $V := F \circ \chi_1^{-1}$. La définition suivante est donnée, par exemple, dans [26] p.1 et [54] p.251.

Définition 2.1.5.1 *Soit $x \in \mathbb{R}^m$, ϕ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ contenant x à valeurs dans $\mathbb{E}$. On dit que ϕ admet une dérivée directionnelle (ou une Gâteaux-variation) dans la direction v si le rapport :*

$$\frac{\phi(x+\theta v) - \phi(x)}{\theta}$$

a une limite lorsque $\theta \to 0$. Cette limite, notée $\vec{D}\phi(x,v)$, s'appelle dérivée directionnelle (ou Gâteaux-variation) de ϕ dans la direction v.

Définition 2.1.5.2 *On définit l'opérateur de dérivation de Percival (cf. [10], [75],[76]) pour U dérivable dans la direction de ω par :*

$$d_\omega U(x) := \vec{D}U(x,\omega).$$

Remarque 2.1.5.3 *Lorsque U est de plus Fréchet-différentiable en x, on a :*

$$d_\omega U(x) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial U}{\partial x_i}(x).$$

Le lien entre les notions de dérivation est fourni par la proposition suivante :

Proposition 2.1.5.4 *Soit U dérivable dans la direction de ω. Alors V est dérivable par rapport à sa première variable, et on a la relation :*

$$d_\omega U(x_1,\cdots,x_m) = |\omega| \frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,\cdots,y_m)$$

Démonstration. Comme $\omega = |\omega| b_1$, on a :

$$\vec{D}F(x,\omega) = |\omega| \vec{D}F(x,b_1).$$

Par ailleurs, par définition, on a $\vec{D}F(x,\omega) = d_\omega U(x)$ et $\vec{D}F(x,b_1) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(y_1,\cdots,y_m)$. La proposition est alors établie.$\blacksquare$

2.2 Fonctions définies sur le tore et fonctions définies sur Q^m

2.2.1 Fonctions définies sur le tore

On donne ici une définition (non géométrique) des fonctions définies sur le tore $\mathbb{T}^m$ et on étudie comment prolonger une fonction définie sur Q^m en une fonction définie sur le tore. Ici, le tore n'est pas vu comme objet géométrique, mais comme notation pour préciser la périodicité par rapport à chaque variable des fonctions mises en jeu.

Pour les fonctions "régulières", on pose donc, lorsque $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

- $C^k(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ est l'espace des fonctions de $C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ qui sont 2π-périodiques en chaque variable.
- $C^k_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ est l'espace des fonctions continues, k fois continûment dérivables dans la direction de ω et 2π-périodiques en chaque variable.
- $C^k_c(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ est l'espace des fonctions de $C^k(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ qui sont nulles sur un voisinage ouvert de ∂Q^m.
- $C^k_{c,\omega}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ est l'espace des fonctions de $C^k_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ qui sont nulles sur un voisinage ouvert de ∂Q^m.

Pour les fonctions des espaces de Lebesgue, il convient de définir tout d'abord la notion de périodicité.

Définition 2.2.1.1 *Pour u (fortement) mesurable de $\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{E}$, on dit que u admet le vecteur p pour période si : $\tau_p u = u$. On dit que u est périodique s'il admet une période non nulle et l'on note :*

$$L^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) := \{u \in L^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{E}) \quad : \quad 2\pi\mathbb{Z} < (e_i)_i > \in Per(u)\},$$

l'espace $L^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ désignant l'espace des fonctions mesurables.

Pour les autres espaces de Lebesgue L^α, on pose, lorsque $\alpha \in [1, +\infty]$:

$$L^\alpha(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) := \{u \in L^\alpha_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E}) \quad : \quad 2\pi\mathbb{Z} < (e_i)_i) > \in Per(u)\}.$$

On munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{L^\alpha} := \left(\int_{Q^m} |u(x)|^\alpha_{\mathbb{E}} dx \right)^{1/\alpha}$$

si α est fini, et lorsque $\alpha = \infty$ de la norme :

$$\|u\|_\infty = supess|u|_{\mathbb{E}} := \inf\{\alpha \ : \ |u|_{\mathbb{E}} \leq \alpha \text{ p.p.}\}.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach. Rappelons que nous noterons sup au lieu de *supess*.

Notation 2.2.1.2 *Désormais, on notera* $\|.\|$ *au lieu de* $\|.\|_{L^2}$.

Remarque 2.2.1.3 *Pour une fonction* $u \in L^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_{\mathbb{T}^m} u(x)dx$ *désignera toujours* $\displaystyle\int_{Q^m} u(x)dx$. *Le lien entre cette intégrale et l'intégrale par rapport à la mesure de Haar du tore est donc :*

$$\int_{\mathbb{T}^m} u(x)d\mu_m(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m} u(x)dx.$$

Par ailleurs, on munit $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ du produit scalaire suivant :

$$< u; v >:= \int_{\mathbb{T}^m} u(x) \cdot_{\mathbb{H}} v(x)dx.$$

$L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ est alors un espace de Hilbert.

Le résultat suivant est immédiat :

Proposition 2.2.1.4 *Pour tout* $p \in \mathbb{R}^m$, *les assertions suivantes sont vraies.*

1. $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},\ \tau_p(C^k(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})) \subset C^k(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$.

2. $\forall \alpha \in [1; +\infty],\ \tau_p(L^\alpha(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})) \subset L^\alpha(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$.

2.2.2 Les théorèmes de prolongement

Le prolongement de fonctions définies sur Q^m en fonctions définies sur le tore se fait à l'aide du lemme suivant :

Lemme 2.2.2.1 *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \exists k \in \mathbb{Z}^m, \quad x - 2\pi k \in Q^m$.

2. *la frontière de* Q^m *est donnée par*

$$\partial Q^m = \{p \in Q^m \quad : \quad \exists j \in \{1, \cdots, m\},\ p_j \in \{-\pi, \pi\}\}$$

et est Lebesgue-négligeable dans Q^m *et dans* $\mathbb{R}^m$.

3. *si* f *est* 2π*-périodique en chaque variable,* f *satisfait la condition à la frontière suivante :*

(CF) $(\forall i \in \{1, \cdots, m\})(\forall x_{-i} \in \mathbb{R}^{m-1})f(x_{-i}, -\pi) = f(x_{-i}, \pi)$ *qui peut aussi s'énoncer :*

$$\forall \xi, \zeta \in Q^m,\ [\forall i \in \{1, \cdots, m\}, (\xi_i = \zeta_i) \text{ ou } ((\xi_i \in \{-\pi, \pi\}) \text{ et } (\zeta_i \in \{-\pi, \pi\})]$$
$$\Longrightarrow (f(\xi) = f(\zeta)).$$

Preuve. Le point (**3.**) résulte de la définition de la périodicité.

Pour le point (**1.**), étant donné $x \in \mathbb{R}^m$, posons pour tout $j = 1, \cdots, m$,

$$k_j = E\left(\frac{x_j + \pi}{2\pi}\right)$$

où E désigne la fonction partie entière. On vérifie que $k \in \mathbb{Z}^m$ et que pour tout $j = 1, \cdots, m$, on a $-\pi \leq x_j - 2\pi k_j < \pi$, donc $x - 2\pi k \in Q^m$.

Passons au point (**2.**). Il s'agit en fait de montrer que $\mathrm{Int}Q^m =]-\pi, \pi[^m$. Tout d'abord, on a $\mathrm{Int}Q^m \supset]-\pi, \pi[^m$ puisque $]-\pi, \pi[^m$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenu dans Q^m. Si l'inclusion est stricte, il existe $p \in \mathrm{Int}Q^m$ et un indice j_0 tel que $p_{j_0} \in \{-\pi, \pi\}$. Sans nuire à la généralité, on suppose que $p_{j_0} = \pi$. La suite de points $\left((p_j + \frac{1}{n})_{1 \leq j \leq m}\right)_n$ tend vers p, mais aucun de ces points n'est dans Q^m. Ainsi, $p \notin \mathrm{Int}Q^m$.■

Commençons par l'étude du prolongement dans le cas des espaces de Lebesgue.

Proposition 2.2.2.2 *L'application* $\mathcal{J} : L^\alpha(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) \to L^\alpha(Q^m, \mathbb{E})$ *définie par :*

$$\mathcal{J}(u) := u_{|Q^m}$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach (et même de Hilbert si $\alpha = 2$ *et* $\mathbb{E} = \mathbb{H}$*).*

Démonstration. $\mathcal{J}$ est visiblement une application linéaire isométrique. Montrons son caractère bijectif.
Surjectivité. Soit $f \in L^\alpha(Q^m, \mathbb{E})$. Quitte à modifier f sur la frontière de Q^m (qui est Lebesgue-négligeable), on peut supposer que f est nulle sur ∂Q^m. Soit $x \in \mathbb{R}^m$. S'il existe k, l dans $\mathbb{Z}^m$, distincts, pour lesquels on aitsimultanément $x - 2\pi k \in Q^m$ et $x - 2\pi l \in Q^m$ alors pour tous les i tels que $k_i \neq l_i$, on a ($k_i = 0$ et $l_i = 2\pi$) ou ($k_i = 2\pi$ et $l_i = 0$). Ainsi, par **(CF)**,$f(x - 2\pi k) = f(x - 2\pi l)$, et il est donc possible de définir $\tilde{f}(x) = f(x - 2\pi k)$ où k est choisi arbitrairement dans $\mathbb{Z}^m$ de sorte que $x - 2\pi k \in Q^m$. Montrons maintenant que la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est périodique. Si $p \in \mathbb{Z}^m$ et $x \in \mathbb{R}^m$sont donnés, soit $k \in \mathbb{Z}^m$ tel que : $x - 2\pi k \in Q^m$. On a $(x + 2\pi p) - 2\pi(k + p) \in Q^m$ donc $\tilde{f}(x + 2\pi p) = f((x + 2\pi p) - 2\pi(k + p)) = f(x - 2\pi k) = \tilde{f}(x)$. Il reste enfin à vérifier l'appartenance à L^α. La restriction de $\tilde{f}$ à chaque $Q^m + 2\pi k$, où $k \in \mathbb{Z}^m$ est de la forme $x \mapsto f(x + 2\pi k)$, donc $\tilde{f} \in L^\alpha_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, ce qui montre bien que $\tilde{f} \in L^\alpha(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et vérifie $\mathcal{J}(\tilde{f}) = f$.

Injectivité. Soit $f \in L^\alpha(Q^m, \mathbb{E})$ et f_1 et f_2 deux fonctions telles que $\mathcal{J}(f_1) = \mathcal{J}(f_2) = f$. On peut supposer que les deux fonctions f_i sont égales sur Q^m. Soit $x \in \mathbb{R}^m$. Il existe $k \in \mathbb{Z}^m$ tels que $x - 2\pi k \in Q^m$. On a alors : $f_1(x) = f_1(x - 2\pi k) = f_2(x - 2\pi k) = f_2(x)$.■

Nous passons au cas des fonctions continues. Cette fois, il faut bien entendu étudier précisément ce qui se passe sur la frontière.

Lemme 2.2.2.3 *Soient k et l deux éléments distincts de $\mathbb{Z}^m$ et soit $p \in (Q^m + 2\pi k) \cap (Q^m + 2\pi l)$. Alors :*

$$p \in \partial(Q^m + 2\pi k) \cap \partial(Q^m + 2\pi l) = (\partial Q^m + 2\pi k) \cap (\partial Q^m + 2\pi l).$$

Preuve. Il existe $\xi, \zeta \in Q^m$ tels que $p = \xi + 2\pi k = \zeta + 2\pi l$. Comme $k \neq l$, il existe j tel que $\xi_j \neq \zeta_j$. Par ailleurs, comme $\xi_i + 2\pi k_i = \zeta_i + 2\pi l_i$ et $|\xi_i - \zeta_i| \leq 2\pi$, on a $|k_i - l_i| \leq 1$.
Premier cas. $k_i = l_i$. Alors $\xi_i = \zeta_i$.
Second cas. $k_i = l_i \pm 1$. Alors $\xi_i = \zeta_i \pm 2\pi$, soit, comme $\xi, \zeta \in Q^m$, l'un des deux vaut $-\pi$ et l'autre π. Ainsi, on a montré que pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$,

$\xi_i = \zeta_i$ ou $\xi_i, \zeta_i \in \{-\pi; \pi\}$ et il existe j tel que $\xi_j \neq \zeta_j$. Finalement, $p \in (\partial Q^m + 2\pi k) \cap (\partial Q^m + 2\pi l)$.■

Proposition 2.2.2.4 *Soit $f \in C^0(Q^m, \mathbb{E})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un unique $\tilde{f} \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ tel que $\tilde{f}_{|Q^m} = f$.*

2. *f satisfait* **(CF)**.

Démonstration. L'implication [**1**$\Rightarrow$ **2**] est évidente, passons donc à l'implication [**2** $\Rightarrow$ **1**]. **Existence.** Pour $x \in Q^m + 2\pi k$, on pose $f_k(x) = f(x - 2\pi k)$. Lorsque $(Q^m + 2\pi k) \cap (Q^m + 2\pi l) \neq \emptyset$, avec $k \neq l$, on a $(Q^m + 2\pi k) \cap (Q^m + 2\pi l) = (\partial Q^m + 2\pi k) \cap (\partial Q^m + 2\pi l)$ en vertu du lemme. Ainsi, grâce à **(CF)**, on a $f_k(x) = f_l(x)$. Introduisons $A_k := Q^m + 2\pi k$. La famille $(A_k)_k$ forme un recouvrement de $\mathbb{R}^m$ tel que si $A_k \cap A_l \neq \emptyset$, $f_k(x) = f_l(x)$. On peut définir la fonction $\tilde{f}$ en posant $\tilde{f}(x) = f_k(x)$ si $x \in A_k$. Comme chaque f_k est continue et comme le recouvrement $(A_k)_k$ est fermé et localement fini, on sait que $\tilde{f}$ est continue (cf.[78] p.20). Sa périodicité est évidente. Ainsi, on a montré l'existence.

Unicité. Deux solutions prennent les mêmes valeurs sur Q^m, donc sur $\mathbb{R}^m$ par périodicité.■

Proposition 2.2.2.5 *Pour toute $f \in C^k_c(Q^m, \mathbb{E})$, il existe une unique $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ telle que $\tilde{f}_{|Q^m} = f$.*

Démonstration. L'unicité est acquise par la proposition 2.2.2.4. De plus, cette proposition nous donne, pour tout $j \leq k$, un unique $\tilde{f}_j \in C^0\left(\mathbb{T}^m, \mathcal{L}^j_{sym}\left((\mathbb{R}^m)^j; \mathbb{E}\right)\right)$ tel que$\tilde{f}_{j_{|Q^m}} = f^{(j)}$. Soit $\tilde{f} = \tilde{f}_0$; il s'agit de montrer que cette fonction appartient à $C^k(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Soit $x \in \mathbb{R}^m$ et $l \in \mathbb{Z}^m$ tel que $x \in Q^m + 2\pi l$. Distinguons deux cas :
Premier cas. $x \in \mathrm{Int}\,(Q^m + 2\pi l)$. Dans ce cas, au voisinage de x, $\tilde{f} = f \circ \tau_{-2\pi l}$ donc est de classe C^kcomme composée d'une application C^k et d'une application C^∞.
Second cas. $x \in \partial\,(Q^m + 2\pi l)$. Soit

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{Z}^m; x \in \partial Q^m + 2\pi\lambda\}$$

Λ est un ensemble fini non vide et comme pour $\lambda \in \Lambda$, on a $supp\left(\tilde{f}_{|Q^m+2\pi\lambda}\right) = supp(f) + 2\pi\lambda$ et comme $x \notin supp\left(\tilde{f}_{|Q^m+2\pi\lambda}\right)$, on peut considérer

$$r := \min_{\lambda\in\Lambda} d(x; supp(f) + 2\pi\lambda)$$

qui est un réel strictement positif et dire que sur $B(x;r)$, $\tilde{f} = 0$. Elle est donc bien C^k au voisinage de x.$\blacksquare$

2.2.3 Quelques autres propriétés des espaces de fonctions définies sur le tore

Proposition 2.2.3.1 *Tout élément de* $C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ *est uniformément continu sur* $\mathbb{R}^m$.

Démonstration. Soit r un réel positif fixé. L'ensemble $K := \{x \in \mathbb{R}^m; d(x, Q^m) \leq r\}$ est un compact (car on est en dimension finie), donc en vertu du lemme de Heine,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, z \in K) \quad (|x - z| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(z)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon)$$

Fixons arbitrairement $\varepsilon > 0$ et un δ donné comme ci-dessus. On pose $\delta' := \min\{r; \delta\}$. Soit x, z tels que $|x - z| \leq \delta'$. Il existe $k \in \mathbb{Z}^m$ tel que $x - 2\pi k \in Q^m$ et alors $z - 2\pi k \in K$. On a alors :

$$|f(x) - f(z)|_{\mathbb{E}} = |f(x - 2\pi k) - f(z - 2\pi k)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon$$

ce qui est bien l'uniforme continuité.$\blacksquare$
On établit maintenant des théorèmes de densité. Etudions pour cela la convolution.

Proposition 2.2.3.2 *Soit* $j \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $u \in C_c^j(\mathbb{T}^m, \mathcal{A})$ *et* $v \in L^\alpha(\mathbb{T}^m, \mathcal{B})$ *avec* $\alpha \in [1, +\infty]$. *Alors* $u * v \in C^j(\mathbb{T}^m, \mathcal{C})$.

Démonstration. Comme $v \in L^\alpha(\mathbb{T}^m, \mathcal{B})$, on a $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathcal{B})$ et le produit de convolution $u * v$ est donné par :

$$u * v(z) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x) \diamond v(z - x)dx.$$

De surcroît il est bien défini sur $\mathbb{R}^m$ et $u * v \in C^j(\mathbb{R}^m, \mathcal{C})$. Vérifions que $2\pi\mathbb{Z}^m \subset Per(u * v)$, ce qui conclura la démonstration. Soit donc $p \in 2\pi\mathbb{Z}^m$. p est une période de v, et :

$$u * v(z + p) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x)v(z + p - x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} u(x)v(z - x)dx = u * v(z)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.$\blacksquare$

Proposition 2.2.3.3 *Soit $j \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. $C^j(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $C_c^j(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ sont denses dans $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$.*

Démonstration. Il suffit de faire la démonstration pour $C_c^j(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. On rappelle que $C_c^\infty(\mathrm{Int}(Q^m), \mathbb{E})$ est dense dans $L^2(Q^m, \mathbb{E})$ (la démonstration de Brezis [33] p.71 s'adapte aux espaces de Banach). Fixons $u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$; on note $\underline{u}$ sa restriction à Q^m. Ainsi, en vertu du rappel fait dans cette démonstration, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $w \in C_c^\infty(\mathrm{Int}(Q^m), \mathbb{E})$ tel que

$$\int_{Q^m} |w(x) - \underline{u}(x)|_{\mathbb{E}}^2 dx \leq \varepsilon^2.$$

Par ailleurs, en vertu de la Proposition 2.2.2.5, on peut prolonger de manière unique w en un élément $z \in C_c^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. On a :

$$\int_{\mathbb{T}^m} |z(x) - u(x)|_{\mathbb{E}}^2 dx = \int_{Q^m} |w(x) - \underline{u}(x)|_{\mathbb{E}}^2 dx \leq \varepsilon^2,$$

d'où la proposition.■

Lemme 2.2.3.4 *Soit $f \in L^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $\beta \in \mathbb{R}^m$. Alors :*

$$\int_{Q^m} f(x+\beta)dx = \int_{Q^m} f(x)dx$$

Preuve. Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur m. Lorsque $m = 1$, on a successivement :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\beta)dt = \int_{\beta-\pi}^{\beta+\pi} f = \int_{\beta-\pi}^{-\pi} f + \int_{-\pi}^{\pi} f + \int_{\pi}^{\pi+\beta} f =$$

$$-\int_{-\pi}^{\beta-\pi} f + \int_{-\pi}^{\pi} f + \int_{-\pi}^{\beta-\pi} f(t+2\pi)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f$$

C'est le résultat cherché. Supposons le résultat vrai pour 1 et $m-1$. On a :

$$\int_{Q^m} f(x+\beta)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{[-\pi,\pi]^{m-1}} f(x_1+\beta_1, x_{-1}+\beta_{-1})dx_{-1} \right] dx_1$$

D'après le résultat au rang $m-1$, le membre de droite vaut :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{[-\pi,\pi]^{m-1}} f(x_1+\beta_1, x_{-1})dx_{-1} \right] dx_1$$

Par utilisation du théorème de Fubini puis du résultat au rang 1, cette intégrale vaut bien $\int_{Q^m} f(x)dx$, et la proposition est démontrée.■

Proposition 2.2.3.5 *Soit $u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. La fonction de $\mathbb{R}^m$ vers $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ définie par $\beta \longmapsto \tau_\beta u$ est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et soit $v \in C_c^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ tel que $\|u - v\| \leq \varepsilon/3$. Comme v est uniformément continue sur $\mathbb{R}^m$, $\beta \longmapsto \tau_\beta$ est uniformément continue de $\mathbb{R}^m$ vers $C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, donc on peut trouver $\eta > 0$ tel que si γ et β sont dans $\mathbb{R}^m$ tels que $|\gamma - \beta| \leq \eta$, alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |v(x+\gamma) - v(x+\beta)|_{\mathbb{E}} \leq \frac{\varepsilon}{3(2\pi)^m}.$$

Soit γ et β ainsi choisis. On a alors :

$$\|u(\cdot + \beta) - u(\cdot + \gamma)\| \leq$$

$$\|u(\cdot + \beta) - v(\cdot + \beta)\| + \|v(\cdot + \beta) - v(\cdot + \gamma)\| + \|v(\cdot + \gamma) - u(\cdot + \gamma)\| \leq$$

$$2\|u - v\| + \|v(\cdot + \beta) - v(\cdot + \gamma)\|$$

en utilisant le lemme 2.2.3.4. Ce dernier terme est majoré par ε, et c'est ce que l'on voulait.■

2.3 Construction d'espaces du type de Sobolev

Ce chapitre se propose de présenter la construction d'espaces du type de Sobolev et de Blot adaptés à nos problèmes. On va commencer par introduire une notion de dérivée faible de Percival pour les éléments de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ comme générateur infinitésimal d'un (semi-)groupe de contractions. Le domaine de cet opérateur non borné est l'espace du type Sobolev que l'on souhaitait construire. Nous expliciterons le lien entre distributions sur le tore et distributions 2π-périodiques en chaque variable, et montrerons que les différentes manières d'introduire la dérivée faible de Percival coïncident.

2.3.1 Construction et premières propriétés de l'espace $H_\omega^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$

Rappelons que selon la proposition 2.2.1.4, pour tout $u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et tout $\beta \in \mathbb{R}^m$, on a : $\tau_\beta u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Ainsi, il est légitime de définir, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $T(t)$ de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ vers lui-même en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N), \quad T(t)u := \tau_{t\omega} u.$$

On vérifie facilement que $T(t)$ est une isométrie linéaire de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ sur lui-même.

Proposition 2.3.1.1 *Les assertions suivantes sont valides.*

1. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$, $T(s+t) = T(t) \circ T(s)$.

2. $T(0) = id$.

3. $\forall u \in L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}), \quad [t \mapsto T(t)u] \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}))$.

Démonstration. **(1)**$T(t+s)u = \tau_{(s+t)\omega}u = u(\cdot + (s+t)\omega) = \tau_{s\omega}u(\cdot + t\omega) = T(s)[T(t)u] = [T(s)\circ T(t)](u)$.
(2) trivial.
(3) $[t \mapsto t\omega]$ est continue, donc ce point résulte de la proposition 2.2.3.5.■

Ainsi, selon [50] p.614, la famille $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un semi-groupe fortement continu dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}); L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}))$. On note ∇_ω le générateur infinitésimal de ce semi-groupe, et $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ son domaine. Nous avons donc par définition :

$$H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}) \quad : \quad \exists \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)u-u}{t} \in L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}) \right\}$$

et pour $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, cette limite se note $\nabla_\omega u$. Il résulte de la théorie générale des semi-groupes fortement continus, cf. [50] p.619-620, que :

Proposition 2.3.1.2 *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ *est un sous-espace-vectoriel de* $L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ *et* ∇_ω *est linéaire de* $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ *vers* $L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$.

2. *si* $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ *et si* $t \in \mathbb{R}^+$, *alors* $\tau_{t\omega}u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ *et :*

$$\frac{d}{dt}(\tau_{t\omega}u) = \nabla_\omega(\tau_{t\omega}u) = \tau_{t\omega}(\nabla_\omega u).$$

3. *si* $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ *et si* $0 \le s < t < +\infty$, *alors :*

$$\tau_{t\omega}u - \tau_{s\omega}u = \int_s^t \tau_{r\omega}(\nabla_\omega u)dr.$$

4. *si* $t \in \mathbb{R}^+$ *et si* $g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *est continue en* t, *alors :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(s)\tau_{s\omega}u \; ds = g(t)\tau_{t\omega}u.$$

5. $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ *et* ∇_ω *est de graphe fermé dans* $L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})\times L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$.

Remarque 2.3.1.3 *Les intégrales considérées dans cette proposition sont des intégrales de fonctions continues à valeurs dans l'espace de Banach* $L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$.

On munit $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ de la norme :

$$\|u\|_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})} = \sqrt{\|u\|^2 + \|\nabla_\omega u\|^2}$$

que l'on note aussi $\|u\|_{1,\omega}$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur $\mathbb{E}$. Lorsque de plus $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, on munit $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ de la forme bilinéaire suivante :

$$< u; v >_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})} := < u; v > + < \nabla_\omega u; \nabla_\omega v > .$$

S'il n'y a pas d'ambiguité sur $\mathbb{H}$, on notera plutôt $< u; v >_{1,\omega}$ au lieu de $< u; v >_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})}$.

Proposition 2.3.1.4 *Muni de la forme bilinéaire* $< \cdot, \cdot >_{1,\omega}$, $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. La seule chose à vérifier est la complétude. Or, si $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$, chacune des suites $(u_n)_n$ et $(\nabla_\omega u_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace complet $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$, donc converge. On note u et v les limites respectives. Maintenant, comme ∇_ω est de graphe fermé, on voit que $v = \nabla_\omega u$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ converge dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$.■

On vérifie maintenant que l'on récupère bien la notion usuelle pour les fonctions régulières :

Proposition 2.3.1.5 *Si* $u \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$*, alors* $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$*, et :* $\nabla_\omega u(x) = u'(x) \cdot \omega$ *pour Lebesgue-presque tout* x.

Démonstration. Puisque u' est continue sur $\mathbb{T}^m$, elle est uniformément continue, et donc $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^m, \quad (|\xi - \zeta| \leq \eta) \Rightarrow \left(|u'(\zeta) - u'(\xi)|_{\mathbb{E}} \leq \frac{\varepsilon}{|\omega|} \right).$$

On fixe un tel η, $x \in \mathbb{R}^m$ et soit $t \in]0; \eta/|\omega|[$. Par l'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction $y \mapsto u(y) - u'(x).y$ entre x et $x + t\omega$, on a :

$$|u(x + t\omega) - u(x) - u'(x) \cdot (t\omega)|_{\mathbb{E}} \leq \frac{\varepsilon}{|\omega|} t|\omega|.$$

On divise par t, et l'on intègre le carré de l'inégalité sur Q^m. Il vient, pour tout $t \in]0; \eta/|\omega|[$:

$$\left\| \frac{\tau_{t\omega} u - u}{t} - u'(\cdot) \cdot \omega \right\| \leq \varepsilon (2\pi)^{m/2}$$

ce qui démontre le résultat attendu.■

2.3.2 Convolution et théorèmes de densité

Nous appellerons suite régularisante une suite $(\rho_j)_{j \geq 0}$ de fonctions de $C^\infty_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ vérifiant :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \rho_j(x) \geq 0.$

2. $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \rho_j = 1.$

3. $\forall j \in \mathbb{N}, \quad supp(\rho_j) \subset \mathrm{Int}(Q^m)$ et $\displaystyle\lim_{j \to +\infty} diam[supp(\rho_j)] = 0.$

Proposition 2.3.2.1 *Soit $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $\rho \in C^1_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$ tel que $supp(\rho) \subset \mathrm{Int}(Q^m)$. On a :*

$$(d_\omega \rho) * u = \rho * (\nabla_\omega u).$$

Démonstration.
Première étape. Soit $t > 0$. On commence par remarquer que :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \rho(x) \left[\frac{\tau_{t\omega} u - u}{t}\right](z-x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} u(z-x) \left[\frac{\tau_{t\omega}\rho - \rho}{t}\right](x)dx$$

Seconde étape. Démontrons que, lorsque $t \to 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \rho(x) \left[\frac{\tau_{t\omega} u - u}{t}\right](z-x)dx$ tend vers $\rho * (\nabla_\omega u)(z)$. En effet, comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \rho = 1$, la différence entre cette intégrale et $\rho * (\nabla_\omega u)(z)$ vaut :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \rho(x) \left[\frac{\tau_{t\omega} u - u}{t} - \nabla_\omega u\right](z-x)dx = \int_{Q^m} \rho(x) \left[\frac{\tau_{t\omega} u - u}{t} - \nabla_\omega u\right](z-x)dx$$

qui est majoré par, en désignant par I le nombre $\displaystyle\left[\int_{Q^m} \rho^2\right]^{1/2}$:

$$I \left[\int_{Q^m} \left|\frac{\tau_{t\omega} u - u}{t} - \nabla_\omega u\right|^2_{\mathbb{E}} (z-x)dx\right]^{1/2} \leq I \left\|\frac{\tau_{t\omega} u - u}{t} - \nabla_\omega u\right\|$$

et le dernier terme tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

Troisième étape. Démontrons que lorsque $t \to 0$, $\int_{\mathbb{R}^m} u(z-x)[\frac{\tau_{t\omega}\rho - \rho}{t}](x)dx$ tend vers $(d_\omega \rho) * u$. Comme $supp(\rho) \subset \mathrm{Int}Q^m$, il existe un réel $r > 0$ tel que si $t \leq r$, alors $supp(\tau_{t\omega}\rho) \subset \mathrm{Int}Q^m$. Comme $supp(\rho')$ est compact, ρ' est uniformément continue donc par utilisation de l'inégalité de la moyenne, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t' < r$ tel que si $t \in]0; t'[$, on a :

$$\left|\frac{\tau_{t\omega}\rho - \rho}{t}(x) - d_\omega \rho(x)\right| \leq \varepsilon|\omega|.$$

On intègre sur $\mathbb{R}^m$ cette inégalité multipliée auparavant par $u(z-x)$, et l'on obtient la majoration, comme $supp\left[\frac{\tau_{t\omega}\rho - \rho}{t}\right] \subset Q^m$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\tau_{t\omega}\rho - \rho}{t}(x) - d_\omega \rho(x)\right) u(z-x)dx\right|_{\mathbb{E}} \leq \int_{Q^m} \varepsilon|\omega|.|u(z-x)|_{\mathbb{E}}$$

et le résultat de cette étape est valide.

Quatrième étape. Conclusion. On passe à la limite dans l'égalité de la première étape.■

Proposition 2.3.2.2 *Soit $(\rho_j)_j$ une suite régularisante et $u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Alors :*

$$\lim_{j \to +\infty} \|\rho_j * u - u\| = 0.$$

Démonstration. Comme ρ_j est positive et à support inclus dans Q^m, on a pour tout $z \in \mathbb{R}^m$:

$$|\rho_j * u(z)|_{\mathbb{E}} \leq \int_{Q^m} \rho_j(x)|u(z-x)|_{\mathbb{E}} dx \leq \sqrt{\int_{Q^m} \rho_j(x)|u(z-x)|^2_{\mathbb{E}} dx}$$

où pour la dernière inégalité, on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, en élevant au carré, en intégrant sur $\mathbb{T}^m$ puis en utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\|\rho_j * u - u\|^2 \leq \int_{Q^m} \rho_j(x) \left(\int_{\mathbb{T}^m} |u(z-x)|^2_{\mathbb{E}} dz \right) dx,$$

mais d'après le lemme 2.2.3.4, l'intégrale imbriquée vaut $\|u\|^2$, soit finalement on aboutit à :

$$\|\rho_j * u - u\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Comme $C^0_c(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$ est dense dans $L^2(Q^m, \mathbb{E})$, on sait que $C^0_c(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ est dense dans $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et donc $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $\varphi \in C^0_c(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ tel que $\|u - \varphi\| < \varepsilon$. On a alors aussi $\|\rho_j * u - \rho_j * \varphi\| \leq \varepsilon$. A l'aide de l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\|\rho_j * u - u\| \leq 2\varepsilon + \|\rho_j * \varphi - \varphi\|.$$

Il nous reste donc à démontrer que $\|\rho_j * \varphi - \varphi\| \leq \varepsilon$ pour j assez grand. L'uniforme continuité de φ nous donne un $\eta > 0$ tel que si $|\xi - \zeta| \leq \eta$, alors $|\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon$. Soit j assez grand pour que $(z \in supp(\rho_j)) \Rightarrow (|z| \leq \eta)$. Soit enfin $z \in \mathbb{R}^m$ arbitraire. Alors, de :

$$\rho_j * \varphi(z) - \varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \rho_j(x) \left(\varphi(z-x) - \varphi(z)\right) dx$$

comme l'intégrale ne porte que sur $supp(\rho_j)$, on déduit :

$$|\rho_j * \varphi(z) - \varphi(z)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon \int_{supp(\rho_j)} \rho_j(x) dx \leq \varepsilon.$$

On aboutit à, pour j assez grand :

$$\|\rho_j * u - u\| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qu'il fallait démontrer.■

Proposition 2.3.2.3 *Soit $u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $\rho \in C^1_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$. Alors :*

$$d_\omega(\rho * u) = (d_\omega \rho) * u.$$

Démonstration. On sait que l'on a toujours (cf [88] p.122) :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * u) = (\frac{\partial}{\partial x_i}\rho) * u.$$

On multiplie par ω_i et l'on somme sur i pour obtenir la formule annoncée.$\blacksquare$

Proposition 2.3.2.4 *$C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ est dense dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Plus précisément, si $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, alors la suite $(\rho_j * u)_j$ tend vers u dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ pour toute suite régularisante $(\rho_j)_j$.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.2.3.2, on a $\rho_j * u \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $\rho_j * (\nabla_\omega u) \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. D'après la Proposition 2.3.2.2, on a :

$$\lim_{j\to+\infty} \|\rho_j * u - u\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{j\to+\infty} \|\rho_j * (\nabla_\omega u) - (\nabla_\omega u)\| = 0.$$

Or par les Propositions 2.3.2.1 et 2.3.2.3, on a $\rho_j * (\nabla_\omega u) = \nabla_\omega(\rho_j * u)$ donc finalement $\lim\limits_{j\to+\infty} \|\rho_j * u - u\|_{1,\omega} = 0.$$\blacksquare$

Proposition 2.3.2.5 *Les formules suivantes sont vraies.*

1.

$$\forall f \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}), \quad \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega f(x)dx = 0.$$

2.

$$\forall u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}), \quad \int_{\mathbb{T}^m} \nabla_\omega u(x)dx = 0.$$

Démonstration. **Première assertion.** Par périodicité, on a bien entendu pour tout i :

$$\int_{\mathbb{T}^m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx = 0$$

de quoi on déduit l'assertion par linéarité.
Seconde assertion : par densité, on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, un $f \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ tel que $\|f - u\|_{1,\omega} < \varepsilon$. On a ainsi $\|d_\omega f - \nabla_\omega u\| < \varepsilon$, d'où $\|d_\omega f - \nabla_\omega u\|_{L^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})} < \varepsilon(2\pi)^m$. Ainsi, en utilisant la première assertion, on voit que $|\int_{\mathbb{T}^m} \nabla_\omega u(x)dx|_{\mathbb{E}} < \varepsilon(2\pi)^m$.$\blacksquare$

Proposition 2.3.2.6 *Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathcal{A})$ et $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathcal{B})$. Alors $\varphi \cdot u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathcal{C})$ et l'on a :*

$$\nabla_\omega(\varphi \diamond u) = (d_\omega\varphi) \diamond u + \varphi \diamond (\nabla_\omega u).$$

Démonstration.
Premier cas : $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbb{E}', \mathbb{E})$ (ou $(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ qui est analogue).
Première étape du premier cas. On montre que :

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{\tau_{t\omega}\varphi - \varphi}{t} \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} \tau_{t\omega}u - (d_\omega\varphi) \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u \right\| = 0.$$

Fixons ε strictement positif. Par uniforme continuité de φ', on peut trouver $t_0 > 0$ tel que si $|t| < t_0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \xi \in [x; x + t\omega], \quad |\varphi'(\xi) - \varphi'(x)|_{\mathbb{E}'} \leq \varepsilon |\omega|^{-1}.$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de la moyenne, on a :

$$\left| \frac{\varphi(x + t\omega) - \varphi(x)}{t} \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} u(x + t\omega) - (d_\omega \varphi(x)) \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} u(x + t\omega) \right| \leq$$

$$\sup_{\xi \in [x; x + t\omega]} |\varphi'(\xi) - \varphi'(x)|_{\mathbb{E}'} . |\omega| . |u(x + t\omega)|_{\mathbb{E}},$$

donc si $|t| < t_0$, ce terme est majoré par $\varepsilon |u(x + t\omega)|_E$. Elevant au carré et intégrant, en utilisant le Lemme 2.2.3.4, on voit que :

$$\left\| \left[\frac{\tau_{t\omega}\varphi - \varphi}{t} - d_\omega \varphi \right] \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} \tau_{t\omega} u \right\| \leq \varepsilon \|u\|.$$

Ainsi, on a démontré :

$$\lim_{t \to 0} \left\| \left[\frac{\tau_{t\omega}\varphi - \varphi}{t} - d_\omega \varphi \right] \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} \tau_{t\omega} u \right\| = 0. \tag{2.1}$$

Par ailleurs, on a la majoration :

$$\|(d_\omega \varphi) \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} (\tau_{t\omega} u - u)\|^2 \leq (2\pi)^m \|d_\omega \varphi\|_\infty^2 \|\tau_{t\omega} u - u\|^2$$

et par la proposition 2.2.3.5, ce terme tend vers 0 quand $t \to 0$. Compte tenu de ce résultat et de la majoration :

$$\left\| \frac{\tau_{t\omega}\varphi - \varphi}{t} \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} \tau_{t\omega} u - (d_\omega \varphi) \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} u \right\| \leq$$

$$\left\| \left[\frac{\tau_{t\omega}\varphi - \varphi}{t} - d_\omega \varphi \right] \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} \tau_{t\omega} u \right\| + \|(d_\omega \varphi) \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} (\tau_{t\omega} u - u)\|,$$

l'inégalité (2.1) permet de conclure cette étape.

Seconde étape du premier cas. On montre que :

$$\lim_{t \to 0} \left\| \varphi \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} \frac{\tau_{t\omega} u - u}{t} - \varphi \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} \nabla_\omega u \right\| = 0.$$

En effet, le terme considéré est notoirement majoré par

$$(2\pi)^{m/2} \|\varphi\|_\infty \left\| \frac{\tau_{t\omega} u - u}{t} - \nabla_\omega u \right\|$$

qui tend vers 0 quand $t \to 0$.

Conclusion. On a :

$$\frac{\tau_{t\omega}(\varphi \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u) - \varphi \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u}{t} - (d_\omega\varphi) \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u - \varphi \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} (\nabla_\omega u) =$$

$$\left[\frac{\tau_{t\omega}\varphi - \varphi}{t} \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} \tau_{t\omega}u - (d_\omega\varphi) \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u\right] + \left[\varphi \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} \frac{\tau_{t\omega}u - u}{t} - \varphi \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} \nabla_\omega u\right]$$

donc il résulte des deux premières étapes que le membre de droite tend vers 0 lorsque $t \to 0$, et l'asserion **1.** est démontrée.
Second cas : $(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathbb{K},\mathbb{E})$ (ou $(\mathbb{E},\mathbb{K})$ qui est analogue).
Soit $e \in \mathbb{E}'$ arbitraire, et soit $\varphi_e(x) := \varphi(x)e$. Alors $\varphi_e \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}')$ et en lui appliquant l'assertion 1, on obtient :

$$\nabla_\omega[(\varphi e) \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u] = d_\omega(\varphi e) \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u + (\varphi e) \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} (\nabla_\omega u).$$

Mais comme e est constant, on a $\nabla_\omega[(\varphi e) \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u] = (\nabla_\omega\varphi)e \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} u$ et $d_\omega(\varphi e) = (d_\omega\varphi)e$, donc on obtient :

$$e \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} [\nabla_\omega(\varphi.u)] = e \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} [(d_\omega\varphi)u] + e \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} [\varphi.(\nabla_\omega u)]\,.$$

Comme la relation est vraie pour tout $e \in \mathbb{E}'$, on conclut que :

$$\nabla_\omega(\varphi.u) = (d_\omega\varphi)u + \varphi.(\nabla_\omega u).\blacksquare$$

Proposition 2.3.2.7 *On a la formule d'intégration par parties suivante. Pour tout $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^m,\mathcal{A})$ et $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathcal{B})$, on a :*

$$\int_{\mathbb{T}^m} \varphi \diamond (\nabla_\omega u) = -\int_{\mathbb{T}^m} (d_\omega\varphi) \diamond u.$$

Démonstration. A l'aide de la proposition précédente, on sait que $\varphi \diamond u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathcal{C})$ et que l'on a :

$$\nabla_\omega(\varphi \diamond u) = (d_\omega\varphi) \diamond u + \varphi \diamond (\nabla_\omega u).$$

Intégrons cette égalité. Comme selon la proposition 2.3.2.5, l'intégrale du membre de gauche est nulle, on a :

$$\int_{\mathbb{T}^m} \varphi \diamond (\nabla_\omega u) + \int_{\mathbb{T}^m} (d_\omega\varphi) \diamond u = 0,$$

ce qui est le résultat cherché.$\blacksquare$

2.3.3 L'espace $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$

Définition 2.3.3.1 *On appelle $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ l'adhérence de $C^1_c(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$.*

Proposition 2.3.3.2 *Muni de la norme de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ est complet. Si de plus $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, c'est un espace de Hilbert.*

Démonstration. $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace complet $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, c'est donc un espace complet.■

Proposition 2.3.3.3 *$H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ est aussi l'adhérence de $C^1_{c,\omega}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$.*

Démonstration. Soit $\tilde{H}$ l'adhérence de $C^1_{c,\omega}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$. L'inclusion $\tilde{H}\subset H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ résulte de $C^1_c(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})\subset C^1_{c,\omega}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$.
Pour le sens réciproque, on va montrer que l'injection de $C^1_c(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ dans $C^1_{c,\omega}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ est dense pour la norme de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$. Soit donc $\varphi\in C^1_{c,\omega}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ et soit $(\rho_n)_n$ une suite régularisante. Comme $\varphi\in H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, il résulte de la proposition 2.2.3.3 appliquée à φ et ρ_n que si $\psi_n:=\rho_n*\varphi$, on a $\psi_n\in C^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\|\psi_n-\varphi\|_{1,\omega}=0.$$

Par ailleurs, on a :

$$supp(\psi_n)\subset supp(\varphi)+supp(\rho_n)$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} diam(supp(\rho_n))=0$, pour n assez grand, on a :

$$supp(\psi_n)\subset \mathrm{Int}Q^m.$$

On en déduit que $\psi_n\in C^1_c(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ pour n assez grand, d'où le résultat.■

Proposition 2.3.3.4 *Pour toute $u\in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$, on a l'inégalité de* Poincaré-Wirtinger *:*

$$\|\nabla_\omega u\|\geq\frac{|\omega|}{\pi\sqrt{m}}\|u\|.$$

De plus, l'application $u\mapsto\|\nabla_\omega u\|$ est une norme sur $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$ équivalente à celle de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$.

On notera $\|.\|_{1,\omega,0}$ la norme donnée dans la proposition, c'est-à-dire que :

$$\forall u\in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H}),\quad \|u\|_{1,\omega,0}=\|\nabla_\omega u\|.$$

La démonstration de la proposition est basée essentiellement sur la vérification de l'inégalité indiquée pour les fonctions régulières, ce qui fait l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.3.3.5 *On note $\alpha=\frac{|\omega|}{\pi\sqrt{m}}$. Alors pour toute $u\in C^1_c(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$, on a :*

$$\|d_\omega u\|\geq\alpha\|u\|.$$

Démonstration de la proposition. Supposant provisoirement le lemme acquis, soit $u\in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$. On considère une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans $C^1_c(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$ tendant vers u et auxquels on applique le lemme. Ainsi, pour tout n, on a :

$$\|\nabla_\omega u_n\|\geq\alpha\|u_n\|.$$

Mais comme

$$\lim_{n\to+\infty} \|u-u_n\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|\nabla_\omega u - \nabla_\omega u_n\| = 0,$$

on peut passer à la limite pour obtenir :

$$\|\nabla_\omega u\| \geq \alpha \|u\|.$$

A l'aide de cette majoration, on obtient que pour tout $u \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$:

$$\|u\|_{1,\omega,0} \leq \|u\|_{1,\omega} \leq \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \|u\|_{1,\omega,0}$$

d'où l'équivalence des normes.■
Passons à la démonstration du lemme.

Démonstration du lemme. Utilisons les résultats et notations de la section **2.1**. Soit $u \in C^1_c(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ fixée et $v = u \circ \chi \circ \chi_1^{-1}$. On a alors :

$$\|\nabla_\omega u\| = |\omega|^2 \int_{K^m} \left| \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) \right|^2_{\mathbb{H}} dy = |\omega|^2 \int_D \left(\int_{K(y_{-1})} \left| \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) \right|^2_{\mathbb{H}} dy_1 \right) dy_{-1}.$$

Fixons $y_{-1} \in D$. On pose $[a,b] := K(y_{-1})$ (rappelons que $K(y_{-1})$ est un intervalle fermé, cf. lemme 2.1.4.2). On pose également :

$$\varphi(y_1) = v(y_1, \cdots, y_m).$$

On indique que $\varphi \in C^1_c([a,b], \mathbb{H})$ et que :

$$\varphi'(y_1) = \frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, \cdots, y_m).$$

Il vient alors :

$$\int_{K(y_{-1})} \left| \frac{\partial v}{\partial y_1}(y) \right|^2_{\mathbb{H}} dy_1 = \int_a^b |\varphi'(t)|^2_{\mathbb{H}} \, dt.$$

Mais comme $\varphi(a) = 0$, on a :

$$|\varphi(t)|^2_{\mathbb{H}} = \int_a^t \frac{\varphi(s) \cdot_{\mathbb{H}} \varphi'(s)}{2} ds \leq \frac{\|\varphi\|_{L^2([a,b],\mathbb{H})} \cdot \|\varphi'\|_{L^2([a,b],\mathbb{H})}}{2},$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis majoré chacune des intégrales (de fonctions positives) par l'intégrale sur le segment entier. Par intégration sur $[a,b]$, on en déduit :

$$\|\varphi\|_{L^2([a,b],\mathbb{H})} \leq \frac{b-a}{2} \|\varphi'\|_{L^2([a,b],\mathbb{H})}$$

et comme $b-a=diamK(y_{-1})\leq 2\pi\sqrt{m}$, on aboutit à la majoration :

$$\|\varphi\|_{L^2([a,b],\mathbb{H})}\leq \pi\sqrt{m}\|\varphi'\|_{L^2([a,b],\mathbb{H})}.$$

Revenant en v, on obtient :

$$\int_{K(y_{-1})}\left|\frac{\partial v}{\partial y_1}(y)\right|^2_{\mathbb{H}}dy\geq \frac{1}{m\pi^2}\int_{K(y_{-1})}|v(y)|^2_{\mathbb{H}}\,dy,$$

soit, en revenant en u :

$$\|d_\omega u\|\geq \frac{|\omega|}{\pi\sqrt{m}}\|u\|.$$

Ceci termine la démonstration du lemme.■

Remarque 2.3.3.6 *Le fait qu'une fonction constante non nulle ne vérifie pas la relation de Poincaré-Wirtinger démontre que $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$ est distinct de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$.*

Notation 2.3.3.7 *On note $\alpha_{PW}(m)$ (ou α_{PW} s'il n'y a pas ambiguité sur m), la meilleure constante de Poincaré-Wirtinger, c'est-à-dire :*

$$\alpha_{PW}(m):=\inf_{u\in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla_\omega u\|}{\|u\|}=$$

$$\sup\{\alpha>0\ :\ \forall u\in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H}),\ \|\nabla_\omega u\|\geq\alpha\|u\|\}.$$

On a ainsi pour tout m, la minoration :

$$\alpha_{PW}(m)\geq\frac{|\omega|}{\pi\sqrt{m}}.$$

Proposition 2.3.3.8 *L'injection canonique de $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$ dans $L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$ n'est pas compacte.*

Remarque 2.3.3.9 *Autrement dit, l'espace $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})$ ne vérifie pas un résultat du type Rellich-Kondrachov. Cette absence de compacité rend plus difficile l'obtention de théorèmes d'existence dans cet espace que dans l'espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$ usuel.*

Démonstration. Compte tenu de la caractérisation des compacts forts (*i.e.* pour la topologie de la norme) de $L^2(\mathrm{Int}Q^m)$ (cf. [33] p.74), pour nier Rellich-Kondrachov, il suffit de démontrer que :

$$\exists\varepsilon>0,\ \exists\Omega\subset\subset\mathrm{Int}Q^m,\ \exists\delta_0>0,\ \forall\delta\in]0;\delta_0[,$$

$$\exists h\in\mathbb{R}^m,\ \exists u\in B_{H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{H})},\ \ |h|\leq\delta \text{ et } \|\tau_h u-u\|\geq\varepsilon.$$

Avant de progresser dans la démonstration, faisons trois remarques.

- Il suffit de fabriquer un contre-exemple avec $\mathbb{H} = \mathbb{R}$.
- Bien entendu, ceci ne contredit pas la continuité des translations dans L^2 car u dépend de δ.
- L'idée fondamentale à retenir est que l'absence de compacité est due à l'absence de contrôle des dérivées qui ne sont pas dans la direction de ω.

On se place donc dans le cas $\mathbb{H} = \mathbb{R}$; soit (b_j) une base orthonormée telle que $b_1 = \frac{\omega}{|\omega|}$. On se donne $A \subset \text{Int}Q^m$, L_j, $j = 1, \cdots, m$, m réels strictement positifs tels que si :

$$K := \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L_i b_i \quad : \quad \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in [0;1]^m \right\}$$

et :

$$TK := \bigcup_{\alpha \in [0; \frac{2}{3}L_1]} \tau_\alpha K,$$

on ait :

$$TK \subset \text{Int}Q^m.$$

On peut alors trouver un ouvert Ω contenant TK et donc l'adhérence est contenue dans $\text{Int}Q^m$ (c'est-à-dire $\Omega \subset\subset \text{Int}Q^m$). On pose $\delta_0 := \frac{2}{3}L_1$ et $l = \frac{1}{3}L_1$.

Première étape. Dans cette étape (que l'on ne fait que si $m \geq 3$), on se ramène au cas où $m = 2$. Soit $\phi \in C^0(\mathbb{R}^{m-2}, \mathbb{R}^+)$ non constamment nulle, telle que $supp(\phi) \subset \prod_{j=3}^{m}[0, L_j]$. On note

$$\mathcal{I} := \int_{\mathbb{R}^{m-2}} \phi^2,$$

qui est un réel strictement positif. On va chercher $v = u \circ \chi \circ \chi_1^{-1}$ sous la forme :

$$v(y_1, \cdots, y_m) = v_2(y_1, y_2)\phi(y_3, \cdots, y_m).$$

Si $supp(v) \subset K$ et si $h = \delta b_2$ avec $\delta \in]0, \delta_0[$, on a $\|(\tau_h v - v)\chi_\Omega\| = \|\tau_h v - v\|$, et en utilisant le théorème de Fubini on obtient les deux égalités suivantes :

$$\|\tau_h u - u\|^2 = \|\tau_h v_2 - v_2\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\mathcal{I}$$

$$\|\nabla_\omega u\|^2 = |\omega|^2 \|\partial_1 v_2\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\mathcal{I}$$

soit finalement :

$$\frac{\|\tau_h u - u\|^2}{\|\nabla_\omega u\|^2} = |\omega|^2 \frac{\|\tau_h v_2 - v_2\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{\|\partial_1 v_2\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}.$$

On voit par l'égalité précédente qu'il suffit de construire v_2, ce qui revient à faire la démonstration dans le cas $m = 2$.

Seconde étape. On construit maintenant v_2. Fixons arbitrairement $\delta \in]0, \delta_0[$. Pour $i, j \in \{0, 1, 2\}$, notons

$$A_{i,j} = A + i\frac{L_1}{3}b_1 + j\frac{L_2}{3}\frac{\delta}{\delta_0}b_2.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on définit la fonction P_λ sur $[0, l]$ par :

$$P_\lambda(x) = 2\frac{\lambda}{l^2}x^2\chi_{[0,l/2]}(x) + \lambda\left(1 - 2\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\right)\chi_{[l/2,l]}(x).$$

On introduit alors f_λ :

$$f_\lambda(x) = P_\lambda(x)\chi_{[0,l]}(x) + \lambda\chi_{[l,2l]}(x) + P_\lambda(3l - x)\chi_{[0,l]}(x).$$

La fonction f_λ est continue et elle est C^1 par morceaux. On calcule :

$$\|f'_\lambda\|_\infty = 2\frac{\lambda}{l}.$$

On pose enfin :

$$v_2(y_1, y_2) = f_{y_2/\delta}(y_1)\chi_{[0,\delta]}(y_2) + f_1(y_1)\chi_{[\delta,2\delta]}(y_2) + f_{3-y_2/\delta}(y_1)\chi_{[2\delta,3\delta]}(y_2).$$

On a alors :

$$\|\tau_{\delta b_2}v_2 - v_2\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \geq \int_{co(A_{1,1};A_{1,2};A_{2,1};A_{2,2})} (1-0)^2 = \frac{l\delta}{2}$$

et

$$\|\partial_1 v_2\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq 2\left[2\int_{co(A_{0,0};A_{1,0};A_{0,1};A_{1,1})} \frac{4.y_2^2}{l^2\delta^2}dy + \int_{co(A_{0,1};A_{1,1};A_{0,2};A_{2,2})} \frac{4}{l^2}\right] = \frac{17\delta}{4l}.$$

Finalement, on a :

$$\frac{\|\tau_{\delta b_2}v_2 - v_2\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{\|\partial_1 v_2\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}} \geq \frac{2l^2}{17},$$

donc on peut prendre dans le cas m quelconque :

$$\varepsilon = \frac{l}{|\omega|}\sqrt{\frac{2}{17}}.$$

Ceci achève la démonstration.$\blacksquare$

2.4 Analyse de Fourier et comparaison des différentes notions de dérivation

Remarque 2.4.0.10 *Ici, par commodité, on supposera que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dans le cas réel, ceci consiste à travailler dans le complexifié de $\mathbb{E}$, puis à réunir les coefficients de Fourier d'indices opposés.*

On note, pour $u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $\nu \in \mathbb{Z}^m$, $a(u;\nu)$ l'élément de $\mathbb{E}$:

$$a(u;\nu) := \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{Q^m} e_{-\nu}(x)u(x)dx.$$

On note :

$$u \sim \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} a(u;\nu)e_\nu$$

On rappelle que :

Rappel 2.4.0.11 *L'application $u \mapsto (a(u;\nu))_{\nu \in \mathbb{Z}^m}$ est un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ sur $\ell^2(\mathbb{Z}^m; \mathbb{H})$.*

Remarque 2.4.0.12 *La fonction e_ν est de classe $C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et :*

$$d_\omega e_\nu = i(\nu \cdot \omega)e_\nu.$$

Proposition 2.4.0.13 *Soit $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $\nu \in \mathbb{Z}^m$.On a :*

$$a(\nabla_\omega u;\nu) = i(\nu \cdot \omega)a(u;\nu).$$

Démonstration. Fixons $\nu \in \mathbb{Z}^m$. L'application $a(\cdot;\nu)$ est linéaire continue de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ vers $\mathbb{E}$, on a ainsi :

$$a(\nabla_\omega u;\nu) = \lim_{t \to 0} \frac{a(\tau_{t\omega}u;\nu) - a(u;\nu)}{t}.$$

En utilisant le Lemme 2.2.3.4, on a : $a(\tau_{t\omega}u;\nu) = e_\nu(t\omega)a(u;\nu)$ d'où le résultat proposé.■

Proposition 2.4.0.14 *Soit $u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ tel que :*

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} (\nu \cdot \omega)^2 |a(u;\nu)|^2_{\mathbb{H}} < +\infty.$$

Alors $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ et $\nabla_\omega u \sim \sum_\nu i(\nu \cdot \omega)a(u;\nu)e_\nu$.

Démonstration. On sait (cf. 2.4.0.11) qu'il existe $v \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ tel que $v \sim \sum_\nu i(\nu \cdot \omega)a(u;\nu)e_\nu$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, formons alors le polynôme trigonométrique $P_k(x) = \sum_{|\nu| \leq k} a(u;\nu)e_\nu(x)$. On a ainsi $\lim_{k \to +\infty} \|u - P_k\| = 0$ et $\lim_{k \to +\infty} \|v - \nabla_\omega P_k\| = 0$. Comme $(P_k; \nabla_\omega P_k)$ est dans le graphe de ∇_ω qui est fermé, on en déduit que $v = \nabla_\omega u$ et donc $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$.■

Proposition 2.4.0.15 *Soit u et v deux éléments de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ tels que :*

$$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{C}), \quad \int_{\mathbb{T}^m} (d_\omega \varphi) \cdot_{\mathbb{H}} u = -\int_{\mathbb{T}^m} \varphi \cdot_{\mathbb{H}} v$$

ou

$$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}), \quad \int_{\mathbb{T}^m} u \cdot_{\mathbb{H}} d_\omega \varphi = -\int_{\mathbb{T}^m} v \cdot_{\mathbb{H}} \varphi$$

alors $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ et $\nabla_\omega u = v$.
De même, soit u et v deux éléments de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{C})$ tels que :

$$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{C}), \quad \int_{\mathbb{T}^m} (d_\omega \varphi) u = -\int_{\mathbb{T}^m} \varphi v$$

ou

$$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}), \quad \int_{\mathbb{T}^m} u (d_\omega \varphi) = -\int_{\mathbb{T}^m} v \varphi$$

alors $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{C})$ et $\nabla_\omega u = v$.

Remarque 2.4.0.16 *Cette manière de définir la dérivée d'un élément de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ est analogue à celle de Sobolev. Aussi, nous dirons que v est la dérivée faible de Sobolev. Cette proposition montre ainsi que cette dérivée faible, lorsqu'elle existe, coïncide avec la notion déjà introduite. Nous montrerons la réciproque plus tard.*

Démonstration de la Proposition 2.4.0.15
Premier énoncé. Prenant $\varphi = e_\nu$, on obtient que $a(v;\nu) = -i(\nu \cdot \omega)a(u;\nu)$. Comme $v \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$, on en déduit que $((\nu \cdot \omega)a(u;\nu))_\nu \in \ell^2(\mathbb{Z}^m; \mathbb{H})$, et l'on conclut avec la Proposition 2.4.0.14.
Second énoncé. Soit $h \in \mathbb{H}$ non nul arbitraire. Soit également $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{C})$. On applique l'hypothèse avec les fonctions $\varphi_h(x) := \varphi(x)h$. On obtient, en utilisant le premier énoncé, le résultat.
Troisième énoncé. C'est un cas particulier du premier avec $\mathbb{H} := \mathbb{C}$.
Quatrième énoncé. On se ramène au troisième par la même méthode que pour le second énoncé.■

2.5 Lien avec les distributions périodiques et les distributions sur le tore

2.5.1 Premier préliminaire : rappels sur les distributions à valeurs vectorielles

Notons $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{K}$ nulles en dehors d'un compact.
L'espace des distributions à valeurs dans $\mathbb{E}$ est par définition $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K}), \mathbb{E})$. On le notera $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$.

Proposition 2.5.1.1 *Toute fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ définit une distribution vectorielle T_f par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K}), \quad < T_f ; \varphi > := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x) dx.$$

Démonstration. Comme $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, on a $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ ce qui montre en particulier que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$, $\varphi f \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ donc $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi f \in \mathbb{E}$. De plus, on a :

$$\forall e' \in \mathbb{E}', \quad |e' \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} f| \leq |e'|_{\mathbb{E}'} \ \ |f|_{\mathbb{E}}$$

donc $e' \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ pour tout $e' \in \mathbb{E}'$. D'après la proposition 19 de [82] p.66, on en déduit que f définit une distribution vectorielle.■

2.5.2 Second préliminaire : la périodification

Cette partie s'inspire de [89].

Proposition 2.5.2.1 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{E}$ une fonction à support compact. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^m$,*

$$\varpi(\varphi)(x) = \sum_{\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}^m} \tau_\lambda \varphi(x)$$

est bien définie, la fonction $\varpi(\varphi) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{E}$ est périodique, et $2\pi\mathbb{Z}^m \subset Per(\varpi(\varphi))$.

Démonstration. Existence. On va vérifier que la somme définissant $\varpi(\varphi)(x)$ est finie. Soit x fixé. $\tau_\lambda \varphi(x) \neq 0$ implique $x + \lambda \in supp(\varphi)$ ce qui implique $\lambda \in (supp(\varphi) - x) \cap 2\pi\mathbb{Z}^m$ et comme cette intersection est finie puisque le support de φ est borné, on en déduit que la somme définissant $\varpi(\varphi)$ ne porte que sur un nombre fini de termes, d'où l'existence de $\varpi(\varphi)$.
Périodicité. Cette propriété est une conséquence directe du fait que $2\pi\mathbb{Z}^m$ est un groupe.■

L'opérateur ϖ s'étend aux distributions à support compact de la manière suivante. Pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, on pose :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K}), \quad < \varpi T ; \varphi > := < T ; \varpi \varphi > .$$

Proposition 2.5.2.2 *ϖ envoie continûment $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$.*

Démonstration. Soit K un compact fixé de $\mathbb{R}^m$. ϖ envoie continûment $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, donc $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$. La formule définissant ϖ pour les distributions permet de conclure à la fin de la proposition, puisque ϖ est défini comme étant son transposé (avec un abus de notations !).∎

Proposition 2.5.2.3 *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Pour toute $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, ϖT est périodique et plus précisément on a :*

$$\forall \lambda \in 2\pi \mathbb{Z}^m, \quad \varpi(\tau_\lambda T) = \tau_\lambda(\varpi T) = \varpi T.$$

2. *Pour toute $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$, on a :*

$$\varpi(F\psi) = (\varpi\psi).F.$$

3. *Pour toute $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, on a :*

$$\varpi(fT) = f.(\varpi T).$$

Démonstration. Pour les détails, consulter [89] pp.62–63, dont les démonstrations s'adaptent sans problème avec un espace de Banach à l'arrivée.
Le point (**1.**) est immédiat par transposition.
Pour le point (**2.**), on a $\tau_\lambda(\psi F) = \tau_\lambda(\psi)\tau_\lambda(F) = \tau_\lambda(\psi)F$ car F est périodique. On conclut en sommant.
Le dernier point est analogue au second.∎

Proposition 2.5.2.4 *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Si $\varphi \in C^0_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, alors $\varpi(\varphi) \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$.*

2. *Si $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, alors $\varpi(\varphi) \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et en outre on a*

$$\forall i = 1, \cdots, m, \quad \varpi(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) = \frac{\partial \varpi(\varphi)}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad :$$

$$\varpi(d_\omega \varphi) = d_\omega \varpi(\varphi).$$

3. *Pour tout* $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *si* $\varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, *alors* $\varpi(\varphi) \in C^k(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$.

Démonstration. Commençons par noter que (**3.**) est une conséquence de (**2.**) par itération. Notons également que $supp(\tau_\lambda \varphi) = supp(\varphi) - \lambda$. Soit x fixé arbitrairement. On va montrer que sur une boule centrée en x, on peut choisir un ensemble fini fixe d'indices λ pour lesquels les termes de la somme sont non nuls. Les assertions de la proposition s'ensuivront immédiatement. Notant K le compact $supp(\varphi) - x$, on remarque tout d'abord que $d(x; supp(\tau_\lambda \varphi)) = d(\lambda; K)$, donc $r > 0$ étant fixé arbitrairement, l'ensemble :

$$Z := \{\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}^m \quad : \quad d(x; supp(\tau_\lambda \varphi)) < r\}$$

est fini, et comme $Z = \{\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}^m \quad : \quad \mathrm{Int}B(x,r) \cap supp(\tau_\lambda\varphi) \neq \emptyset\}$, on a sur $\mathrm{Int}B(x,r)$,$\varpi(\varphi) = \sum_{\lambda \in Z} \tau_\lambda \varphi$. La proposition est alors démontrée.■

Remarque 2.5.2.5 *Précédemment, on a prolongé certaines fonctions* $u : \mathrm{Int}Q^m \longrightarrow \mathbb{E}$ *en des fonctions* $\tilde{u} : \mathbb{T}^m \longrightarrow \mathbb{E}$. *Désignant par* u_0 *l'extension de* u *à* $\mathbb{R}^m$ *par 0, on a :* $\tilde{u} = \varpi(u_0)$.

2.5.3 Distributions périodiques et distributions sur le tore

Pour les détails, consulter de nouveau [89] dont les démonstrations s'adaptent au cas d'un Banach comme espace d'arrivée. On commence par un lemme de partition périodique de l'unité.

Lemme 2.5.3.1 *Il existe une fonction* $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ *telle que* $\varpi\theta = 1$.

Preuve. cf. [89] p.63.

Lemme 2.5.3.2 (lemme de surjectivité).

1. $$\forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}), \quad \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E}), \quad f = \varpi(\varphi).$$

2. $$\forall F \in (C^\infty)'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}), \quad \exists T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E}), \quad F = \varpi(T).$$

Preuve. Compte tenu de 2.5.2.4 points **2., 3.**, $\varphi = \theta f$ et $T = \theta F$ conviennent.■

Proposition 2.5.3.3 *Les espaces* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ *et* $(C^\infty)'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, *munis des mêmes topologies duales (fortes ou faibles), sont algébriquement et topologiquement isomorphes.*

Compte tenu de l'importance de cette proposition, nous la démontrons en détail.
Démonstration.
1. ϖ envoie continûment $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$, donc $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K}) \cap \mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{K}) = C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{K})$. Sa transposée, notée ϖ^T et définie par :

$$\forall L \in (C^\infty)'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) < \varpi^T L; \varphi >=< L; \varpi\varphi >_{\mathbb{T}^m}$$

envoie donc continûment $(C^\infty)'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$. Mais $\varpi^T L$ est une distribution périodique, donc ϖ^T envoie donc continûment $(C^\infty)'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$.
2. Soit θ donnée par le lemme de partition périodique de l'unité. L'application $f \mapsto \theta f$ envoie donc continûment $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$. Soit Θ la restriction de cette application à $C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{K})$. Θ envoie alors continûment $C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$, donc sa transposée envoie continûment $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ dans $(C^\infty)'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, encore notée Θ^T, applique donc $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ continûment dans $(C^\infty)'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$.
3. On vérifie par un calcul immédiat que ϖ^T et Θ^T sont inverses l'une de l'autre.■

Remarque 2.5.3.4 *Désormais, nous ferons systématiquement l'identification.*

Remarque 2.5.3.5 *On peut expliciter cette correspondance.*

1. *Etant donnée $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et T une distribution quelconque à support compact vérifiant $\varpi T = F$, on a :*

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}), \quad < F, f >_{\mathbb{T}^m} = < T; f > .$$

2. *Si de plus F est localement intégrable, on peut prendre $T = \chi_{Q^m} F$, et :*

$$< F, f >_{\mathbb{T}^m} = \int_{Q^m} F(x) f(x) dx.$$

2.5.4 Lien avec les notions déjà introduites

On définit des opérateurs de Percival pour les distributions :

Définitions 2.5.4.1 *On définit :*

1. *l'opérateur ∂_ω sur $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ de la manière suivante. Si $T \in (C^\infty)'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, on pose :*

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{K}), \quad < \partial_\omega T; \varphi > = - < T; d_\omega \varphi > .$$

2. *pour $T \in \mathcal{D}'(\mathrm{Int} Q^m, \mathbb{E})$, $D_\omega T$ par :*

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathrm{Int} Q^m, \mathbb{K}), \quad < D_\omega T; \varphi > = - < T; d_\omega \varphi > .$$

Remarque 2.5.4.2 *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Si $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, alors $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ et $\partial_\omega \varphi = d_\omega \varphi$.*

2. *Si $\varphi \in C^1_c(\mathrm{Int} Q^m, \mathbb{E})$, alors $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathrm{Int} Q^m, \mathbb{E})$ et $D_\omega \varphi = d_\omega \varphi$.*

On indique maintenant une caractérisation de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ en termes de distributions périodiques.

Proposition 2.5.4.3 *L'égalité suivante est vraie :*

$$H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}) \quad : \quad \partial_\omega u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})\}$$

et si $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$, *on a :* $\nabla_\omega u = \partial_\omega u$.

Démonstration. On va supposer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour simplifier l'exposé.
Inclusion $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}) \supset \{u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}) \quad : \quad \partial_\omega u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})\}$.
Soit $u \in L^2(\mathbb{T}^m; \mathbb{H})$ tel que $\partial_\omega u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$. On remarque tout d'abord que l'on a pour toute $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{K})$ l'égalité suivante par définition de ∂_ω :

$$\int_{\mathbb{T}^m} \varphi.\partial_\omega u = -\int_{\mathbb{T}^m} d_\omega \varphi.u.$$

En utilisant la proposition 2.4.0.15, on en conclut que $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ et $\partial_\omega u = \nabla_\omega u$.
Inclusion $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}) \subset \{u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}) \quad : \quad \partial_\omega u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})\}$.
D'après le point (**4.**) de la proposition 2.3.2.7, si $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$, on a pour toute $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{K})$:

$$\int_{\mathbb{T}^m} \varphi \nabla_\omega u = -\int_{\mathbb{T}^m} d_\omega \varphi.u.$$

Mais cela signifie que $\nabla_\omega u = \partial_\omega u$, et donc $\partial_\omega u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$.■

Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ représente une distribution notée T_f. On note D_i les dérivées distributionnelles partielles sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ et D_ω l'opérateur $D_\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i D_i$. Rappelons que $\partial_\omega u$ a été défini pour $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$.

Proposition 2.5.4.4 *Soit* $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. *On a alors l'égalité, sur* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ *:*

$$D_\omega T_u = T_{\partial_\omega u}$$

c'est-à-dire que $D_\omega u$ *est représentée par* $\partial_\omega u$.

Notons avant tout que $T_{\partial_\omega u}$ a bien un sens car

$$\partial_\omega u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{E}).$$

Démonstration. Soit $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$ fixée. Il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que $supp(\varphi) \subset \cup_{j=1}^p (Q^m + \lambda_j)$. Soit $i \in \{1, \cdots, m\}$.

$$< D_i T_u; \varphi >= - < T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >= -\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u$$

et comme si $i \neq j$, $(Q^m + \lambda_i) \cap (Q^m + \lambda_j)$ est de mesure nulle, cette intégrale vaut :

$$-\sum_{j=1}^p \int_{(Q^m + \lambda_j)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u = -\sum_{j=1}^p \int_{Q^m} \frac{\partial \varphi(x + \lambda_j)}{\partial x_i} u(x + \lambda_j) dx =$$

$$-\sum_{j=1}^{p}\int_{Q^m}\frac{\partial\varphi(x+\lambda_j)}{\partial x_i}u(x)dx = -\int_{\mathrm{Int}Q^m}\left(\sum_{j=1}^{p}\tau_{\lambda_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)u$$

Mais si $x \in \mathrm{Int}Q^m$ et λ n'est pas un λ_j, $j = 1, \cdots, p$, on a $\varphi(x+\lambda) = 0$ par définition des λ_j. Ainsi, l'intégrale obtenue est égale à :

$$-\int_{\mathrm{Int}Q^m}\varpi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)u$$

donc on obtient finalement :

$$< D_\omega T_u;\varphi >= -\int_{\mathrm{Int}Q^m}\varpi(d_\omega\varphi)u. \tag{2.2}$$

Par ailleurs, à l'aide d'arguments analogues, on a la liste d'égalités :

$$\int_{\mathbb{R}^m}\varphi\partial_\omega u = \sum_{j=1}^{p}\int_{Q^m+\lambda_j}\varphi\partial_\omega u =$$

$$\sum_{j=1}^{p}\int_{\mathrm{Int}Q^m}(\tau_{\lambda_j}\varphi)\partial_\omega u = \int_{\mathrm{Int}Q^m}\left(\sum_{j=1}^{p}\tau_{\lambda_j}\varphi\right)\partial_\omega u =$$

$$\int_{\mathrm{Int}Q^m}(\partial_\omega u)\varpi(\varphi) = -\int_{\mathrm{Int}Q^m}ud_\omega\left(\varpi(\varphi)\right)\partial_\omega u = -\int_{\mathrm{Int}Q^m}\varpi\left(d_\omega\varphi\right)u.$$

Ainsi, on a démontré que :

$$\int_{\mathbb{R}^m}\varphi\partial_\omega u = -\int_{\mathrm{Int}Q^m}\varpi\left(d_\omega(\varphi)\right)u.$$

Comparant cette égalité avec l'égalité (2.2), on voit que finalement :

$$\forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}), \quad < D_\omega T_u,\varphi >= \int_{\mathrm{Int}Q^m}\varphi.\partial_\omega u,$$

ce qui démontre la Proposition.■

2.6 Espaces de Sobolev sur $\mathrm{Int}Q^m$

Définition 2.6.0.5 *On définit :*

$$H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{E}) := \{u\in L^2(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{E}) \ : \ D_\omega u\in L^2(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{E})\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_\omega := \sqrt{\int_{\mathrm{Int}Q^m}|u|^2_{\mathbb{E}}+|D_\omega u|^2_{\mathbb{E}}}.$$

On définit un produit scalaire sur $H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{H})$ en posant, pour tous $u, v \in H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m,\mathbb{H})$:

$$(u;v)_\omega := \int_{\mathrm{Int}Q^m}u\cdot_{\mathbb{H}}v + D_\omega u\cdot_{\mathbb{H}}D_\omega v$$

Proposition 2.6.0.6 *$H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$ est un espace de Banach (Hilbert si $\mathbb{E} = \mathbb{H}$).*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy à valeurs dans $H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$. Alors les deux suites $(u_n)_n$ et $(D_\omega u_n)_n$ sont de Cauchy à valeurs dans l'espace complet $L^2(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$, donc convergent vers u et v respectivement. Par ailleurs, l'opérateur D_ω est continu, donc on peut dire que $v = D_\omega u$, ce qui prouve que $u \in H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$.$\blacksquare$

Définition 2.6.0.7 *On définit $H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$ comme l'adhérence de $C^1_c(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$ dans $H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$.*

Remarque 2.6.0.8 *On pourrait définir de même $H^1_\omega(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$. Tout ce qui vient d'être dit est alors valable.*

Les deux propositions suivantes explicitent les liens entre espaces de Sobolev sur le tore et espaces de Sobolev sur le cube.

Proposition 2.6.0.9 *Les deux assertions suivantes sont vraies.*

1. $\forall u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}), \quad u_{|\mathrm{Int}Q^m} \in H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$.
2. $\forall u \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}), \quad u_{|\mathrm{Int}Q^m} \in H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$.

Démonstration. **Première assertion.** Soit $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. On pose $w = u_{|\mathrm{Int}Q^m}$ et $z = \nabla_\omega u_{|\mathrm{Int}Q^m}$. Soit $\varphi \in C^\infty_c(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{K})$. Il existe $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{T}^m, \mathbb{K})$ tel que $\phi_{|\mathrm{Int}Q^m} = \varphi$. On a alors successivement :

$$\int_{\mathrm{Int}Q^m} \varphi z = \int_{\mathbb{T}^m} \phi.(\nabla_\omega u) = -\int_{\mathbb{T}^m} (d_\omega \phi) u = -\int_{\mathrm{Int}Q^m} (d_\omega \varphi) w.$$

Ceci montre que $z = D_\omega w$ et donc $w \in H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$.

Seconde assertion. Soit $u \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Par la première assertion, $u_{|\mathrm{Int}Q^m} \in H^1_\omega(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$. Soit $(f_j)_j$ une suite d'éléments de $C^1_c(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ convergeant vers u dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. On note g_j la restriction de f_j à $\mathrm{Int}Q^m$ et $w = u_{|\mathrm{Int}Q^m}$. On a alors : $\|w - g_j\|_\omega = \|u - f_j\|_{1,\omega}$ et donc le terme de gauche tend vers 0 lorsque $j \to +\infty$, c'est-à-dire que : $w \in H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$.$\blacksquare$

Proposition 2.6.0.10 *Pour tout $u \in H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$, il existe un unique $\tilde{u} \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ tel que $\tilde{u}_{|Q^m} = u$. De plus, $\nabla_\omega \tilde{u}_{|Q^m} = D_\omega u$.*

Démonstration. Soit $u \in H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$ et $(f_j)_j$ une suite d'éléments de $C^1_c(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$ convergeant vers u dans $H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$. Il existe ainsi une suite $(F_j)_j$ d'éléments de $C^1_c(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ telle que la restriction de F_j à $\mathrm{Int}Q^m$ coïncide avec f_j. La suite $(F_j)_j$ est de Cauchy dans $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ donc converge vers une fonction U. On note v la restriction de U à $\mathrm{Int}Q^m$, qui est alors une fonction de $H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$ d'après la proposition précédente. Par ailleurs, on a :

$$\|v - f_j\|_\omega = \|U - F_j\|_{1,\omega}$$

Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque $j \to +\infty$, le membre de droite aussi, donc par unicité de la limite, on a $v = u$, c'est-à-dire $u = U_{|\mathrm{Int}Q^m}$ d'où l'existence de $\tilde{u}$. Passons à l'unicité. Soit U_1 et U_2 deux candidats. On a :

$$\int_{\mathbb{T}^m} |U_1 - U_2|^2_{\mathbb{E}} = \int_{\mathrm{Int}Q^m} |U_1 - U_2|^2_{\mathbb{E}} = \int_{\mathrm{Int}Q^m} |u - u|^2_{\mathbb{E}} = 0$$

d'où le résultat.■

Remarque 2.6.0.11 *Les deux propositions précédentes montrent en particulier que l'application de $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ vers $H^1_{\omega,0}(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$ qui à u associe $u|_{\mathrm{Int}Q^m}$ est un isomorphisme isométrique ce qui permet d'identifier les deux espaces de Hilbert.*

2.7 Espaces d'ordre supérieur

Signalons très rapidement que l'on peut bien entendu définir des espaces de Sobolev d'ordre supérieur :

Définition 2.7.0.12 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On définit l'espace $H^p_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ comme étant l'espace des $u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ tels que pour tout $j \le p$, $\nabla^j_\omega u \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Il est normé par :*

$$\|u\|_{p,\omega} := \sqrt{\sum_{j=0}^{p} \|\nabla^j_\omega u\|^2}$$

et Hilbertien lorsque $\mathbb{E} = \mathbb{H}$.

Similairement, on définit bien entendu $H^p_\omega(\mathrm{Int}Q^m, \mathbb{E})$. On pourrait également définir d'autres espaces construits à partir d'un L^p avec $p \neq 2$. En raison des besoins futurs, et puisque l'étude de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ est déjà très détaillée, nous ne nous étendrons pas plus sur ces espaces.

2.8 Sur l'absolue continuité des fonctions de $H^p_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$

On suppose dans cette section que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^N$.

Soit $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, et soit $g := u \circ \chi_1^{-1}$. Alors $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$ et $D_1 g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$. Soit maintenant C^{m-1} un convexe d'intérieur

non vide de $\mathbb{R}^{m-1}$, et $\Xi := \chi_1^{-1}(0 \times \mathrm{Int}(C^{m-1}))$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On introduit :

$$\Omega_n :=]n-\varepsilon, n+1+\varepsilon[\ \times \mathrm{Int}(C^{m-1});$$

c'est un convexe ouvert de $\mathbb{R}^m$, $g_{|\Omega_n}$ et $D_1(g_{|\Omega_n})$ sont dans $L^2(\Omega_n, \mathbb{R}^N)$. Soit maintenant

$$O_n := \{y_{-1} \in \mathrm{Int}(C^{m-1}) \quad : \quad [y_1 \mapsto g(y_1, y_{-1})] \in AC(\ ]n-\varepsilon, n+1+\varepsilon[\ , \mathbb{R}^N)\}.$$

D'après NECAS [70] p.61, pour tout entier n, O_n est de mesure pleine dans $\mathrm{Int}(C^{m-1})$. Comme une réunion dénombrable de négligeables est négligeable, on en déduit que $\bigcap_n O_n$ est aussi de mesure pleine dans $\mathrm{Int}(C^{m-1})$. Mais :

$$\bigcap_n O_n = \left\{y_{-1} \in \mathrm{Int}(C^{m-1}) \quad : \quad [y_1 \mapsto g(y_1, y_{-1})] \in AC_{loc}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N\right)\right\}.$$

En remarquant que $u(t\omega + \sum_{j=2}^m y_j b_j) = g(t|\omega|, y_{-1})$ et que χ_1^{-1} est une isométrie linéaire, on a donc établi :

Lemme 2.8.0.13 *Soit $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$. Alors :*

$$\Xi' := \left\{\xi \in \Xi \quad : \quad [t \mapsto u(t\omega + \xi)] \in AC_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)\right\}$$

est de mesure pleine dans Ξ.

Etablissons maintenant la proposition :

Proposition 2.8.0.14 *Soit $u \in H^p_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$. Alors :*

1. *Il existe Ξ_p de mesure pleine dans Ξ tel que si $\xi \in \Xi_p$, pour Lebesgue-presque tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t\omega + \xi)$ est dérivable, et :*

$$\frac{d^j}{dt^j}[u(t\omega + \xi)] = (\nabla^j_\omega u)(t\omega + \xi), \quad j \in \{0, ..., p\}.$$

$$[t \mapsto u(t\omega + \xi)] \in H^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N).$$

2. *Si $u \in H^p_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, alors il existe Ξ'_p de mesure pleine dans Ξ tel que si $\xi \in \Xi'_p$:*

$$[t \mapsto u(t\omega + \xi)] \in H^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t\omega + \xi)| \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)}.$$

Démonstration. Première assertion quand $p = 1$.
Premier point de la première assertion. Pour $y_{-1} \in \Xi'$, la fonction $y_1 \mapsto g(y_1, y_{-1})$ est localement absolument continue, donc presque-partout dérivable, et :

$$D_1 g(y_1, y_{-1}) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1, y_{-1}).$$

Donc pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$D_1 g(t|\omega|, y_{-1}) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(t|\omega|, y_{-1}).$$

Soit t_0 arbitraire tel que ces deux membres existent. Par composition, $t \mapsto g(t|\omega|, y_{-1})$ est dérivable en t_0, et l'on a en ce point :

$$\frac{d}{dt} g(t|\omega|, y_{-1}) = |\omega| \frac{\partial g}{\partial y_1}(t|\omega|, y_{-1}).$$

Par ailleurs, puisque l'on a :

$$\frac{d}{dt} u\left(t\omega + \sum_{j=2}^{m} y_j b_j\right) = \frac{d}{dt} g(t|\omega|, y_{-1}),$$

on en déduit que $\frac{d}{dt} u(t\omega + \sum_{j=2}^{m} y_j b_j)$ existe t-presque-partout, et qu'alors :

$$\frac{d}{dt} u\left(t\omega + \sum_{j=2}^{m} y_j b_j\right) = \nabla_\omega u\left(t\omega + \sum_{j=2}^{m} y_j b_j\right),$$

d'où le résultat.
Second point de la première assertion. On écrit $\xi = \sum_{j=2}^{m} y_j b_j$. Comme χ_1^{-1} est une isométrie linéaire et $\nabla_\omega u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$, $D_1 g = \nabla_\omega u \circ \chi_1^{-1} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$. Ainsi, $|D_1 g|^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ donc par le théorème de Fubini, $|D_1 g(\cdot, y_{-1})|^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc $D_1 g(\cdot, y_{-1}) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Compte tenu des calculs précédents, on en déduit que $[t \mapsto \frac{d}{dt} u(t\omega + \xi)] \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, donc $[t \mapsto u(t\omega + \xi)] \in H^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Première assertion pour p quelconque.

Procédons par récurrence. Soit $p \geq 2$, et supposons l'assertion vraie pour 1 et $p-1$. Par l'hypothèse de récurrence à l'ordre $p-1$, il existe Ξ_{p-1} de mesure pleine dans Ξ tel que pour tout $\xi \in \Xi_{p-1}$, $[t \mapsto u(t\omega + \xi)] \in H^{p-1}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ et :

$$\frac{d^j}{dt^j}[u(t\omega + \xi)] = (\nabla^j_\omega u)(t\omega + \xi), \quad j \in \{0, ..., p-1\}.$$

Puisque $\nabla^{p-1}_\omega u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, par l'hypothèse de récurrence au rang 1, il existe Ξ^* de mesure pleine dans Ξ tel que pour tout $\xi \in \Xi^*$, $[t \mapsto (\nabla^{p-1}_\omega u)(t\omega + \xi)] \in H^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ et :

$$\frac{d}{dt}[(\nabla^{p-1}_\omega u)(t\omega + \xi)] = (\nabla^p_\omega u)(t\omega + \xi), \quad j \in \{0, ..., p-1\}$$

ce qui donne le rang p puisque sur l'ensemble $\Xi_p := \Xi_{p-1} \cap \Xi^*$ on a :

$$\frac{d}{dt}[(\nabla^{p-1}_\omega u)(t\omega + \xi)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}[u(t\omega + \xi)]\right] = \frac{d^p}{dt^p}[u(t\omega + \xi)].$$

Seconde assertion.
En utilisant la même technique que dans la démonstration du lemme précédent et la version positive du théorème de Fubini, on voit que l'ensemble :

$$\{\xi \in \Xi \quad , \quad |u(t\omega + \xi)| \leq \|u\|_\infty\}$$

est de mesure pleine dans Ξ, donc l'assertion 2 découle de la première et du fait qu'une intersection de deux ensembles de mesures pleines est de mesure pleine.■

2.9 Théorie des traces

2.9.1 Description de la frontière de Q^m

Le point (**2.**) du lemme 2.2.2.1 décrit la frontière du cube. On peut la décomposer en parties de dimensions $k = 0$ à $m-1$. La partie de dimension k est :

$$\{p \in \partial Q^m \quad : \quad card\{j \ : \ |p_j| = \pi\} = m - k\}\,.$$

On note $\mathcal{F}^m$ la partie (faces ouvertes) de dimension $m-1$. Elle correspond à la frontière régulière de Q^m (cf. Dieudonné [47] p.77 et [48] p.95). Notant, pour $(i,j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1,2\}$:

$$F^i_j :=]-\pi, \pi[^{i-1} \times \{(2j-3)\pi\} \times]-\pi, \pi[^{m-i},$$

on a donc :

$$\mathcal{F}^m = \bigcup_{i,j} F^i_j.$$

On introduit les notations suivantes :

- $R(\partial Q^m) := \partial Q^m + 2\pi\mathbb{Z}^m$ (réseau engendré par ∂Q^m).
- si $p \in \mathcal{F}^m$, on note $\omega(p) := \epsilon(p)\frac{\omega}{|\omega|}$ où $\epsilon(p)$ vaut 1 ou -1 de sorte que $\omega(p)$ soit rentrant en p dans Q^m. F^i_j étant un ouvert relatif, ceci a bien un sens [1]. Si $p, q \in F^i_j$, $\omega(p) = \omega(q)$, on note $\omega_{i,j}$ le vecteur commun.
- on définit une involution ρ sur ∂Q^m en posant :

  $$\rho(-\pi, x_{-j}) = (\pi, x_{-j}) \quad \text{et} \quad \rho(\pi, x_{-j}) = (-\pi, x_{-j}).$$

  On voit que $\rho(F^i_j) = F^i_{3-j}$; on dira que ces faces sont *en regard.*

Remarque 2.9.1.1 *$\omega(\rho(p)) = -\omega(p)$ et donc $\omega_{i,3-j} = -\omega_{i,j}$.*

[1] Si ω et $-\omega$ étaient simultanément sortants (ou rentrants) en p, ω serait tangent, ce qui est contredit par la liberté de ses composantes.

Lemme 2.9.1.2 *Il existe* $\gamma_0 > 0$ *tel que si* $\gamma \in]0, \gamma_0]$, *on ait :*

- *L'une des intersection au moins :*

$$\left]p, p + \gamma\frac{\omega}{|\omega|}\right[\cap R(\partial Q^m) \quad , \quad \left]p, p - \gamma\frac{\omega}{|\omega|}\right[\cap R(\partial Q^m)$$

  est vide.

- *si* $]p, p + \gamma\omega(p)[\cap R(\partial Q^m) \neq \emptyset$, *alors* $]\rho(p), \rho(p) - \gamma\omega(p)[\cap R(\partial Q^m) = \emptyset$.

- $$co\{F_j^i; F_j^i + \gamma\omega_{i,j}\} \cap co\{F_{3-j}^i; F_{3-j}^i + \gamma\omega_{i,3-j}\} = \emptyset,$$

  où $co\{A, B\} := \{\lambda a + (1-\lambda)b \quad : \quad (\lambda, a, b) \in [0,1] \times A \times B\}$.

Preuve. Soit $\tilde{\omega} := \frac{\omega}{|\omega|}$.
Première étape Soit :

$$\gamma(p) := \sup\left\{\gamma > 0 \ : \ ]p, p - \gamma\tilde{\omega}[\cap R(\partial Q^m) = \emptyset \text{ ou }]p, p + \gamma\tilde{\omega}[\cap R(\partial Q^m) = \emptyset\right\}$$

et

$$\gamma_1 := \inf_{p \in \mathcal{F}^m} \gamma(p).$$

Il est clair que $\gamma(p)$ est la borne supérieure d'un ensemble non vide majoré de réels strictement positifs, il est donc dans $\mathbb{R}_+^*$. On va trouver un réel strictement positif minorant tous les $\gamma(p)$, ce qui montrera que $\gamma_1 > 0$.
Pour minorer $\gamma(p)$, introduisons :

$$\gamma_j(p) := \sup\{\gamma > 0 \ :]p_j, p_j - \gamma\tilde{\omega}_j[\cap(\pi + 2\pi\mathbb{Z}) = \emptyset \text{ ou }]p_j, p_j + \gamma\tilde{\omega}_j[\cap(\pi + 2\pi\mathbb{Z}) = \emptyset\}.$$

Comme $(p \in R(\partial Q^m)) \Leftrightarrow (\exists j, p_j \in \pi + 2\pi\mathbb{Z})$, on a $\gamma(p) \geq \min_j \gamma_j(p)$.
Soit $p \in \mathcal{F}^m$ et supposons sans nuire à la généralité que $p_1 = \pi$. On calcule :

$$\gamma_1(p) = \frac{\pi}{|\tilde{\omega}_1|}$$

et si $j \geq 2$,

$$\gamma_j(p) = \frac{\max\{d(p_j; \pi + 2\pi\mathbb{Z}); d(2\pi - p_j; \pi + 2\pi\mathbb{Z})\}}{|\tilde{\omega}_j|} \geq \frac{\pi}{|\tilde{\omega}_j|}.$$

On en conclut que :

$$\gamma(p) \geq \min_{1 \leq j \leq m} \frac{\pi}{|\tilde{\omega}_j|}.$$

On a ainsi montré que $\gamma_1 > 0$, et tout $\gamma_0 \leq \gamma_1$ satisfait la première condition.

Seconde étape on montre que tout $\gamma_0 \leq \gamma_1$ satisfait la seconde condition.
En effet, la première condition étant vérifiée, si $\gamma \leq \gamma_1$ et si $]p, p + \gamma\omega(p)[\cap$

$R(\partial Q^m)$ est non vide, alors $]\rho(p), \rho(p) - \gamma\omega(p)[\cap R(\partial Q^m)$ est vide.

Troisième étape réalisons la dernière condition.
Posons $B^i_j(\gamma) := co\{F^i_j ; F^i_j + \gamma\omega_{i,j}\}$. $B^i_j(\gamma)$ et $B^i_{3-j}(\gamma)$ sont deux bandes parallèles, de largeur majorée par $\gamma|\omega|$; elles ne se rencontrent pas si $2\gamma|\omega| < 2\pi$. Posant $\gamma_2 := \frac{\pi}{2|\omega|}$, on est assuré que :

$$(\gamma \leq \gamma_2) \Rightarrow (B^i_j(\gamma) \cap B^i_{3-j}(\gamma) = \emptyset).$$

Ainsi, tout $\gamma \leq \gamma_2$ permet de réaliser la troisième condition.
On peut alors poser $\gamma_0 := \min\{\gamma_1; \gamma_2\}$ pour conclure.■

Notations 2.9.1.3 *On introduit maintenant les notations suivantes :*

- $K^i_j := \{p \in F^i_j \quad : \quad]p, p + \gamma\omega_{i,j}[\cap \partial Q^m = \emptyset\}$.
- $L^i_j := F^i_j \cap^c K^i_j$.
- $S^i_j := K^i_j + \omega_{i,j}[0, \gamma]$.
- $K := \cup_{i,j} K^i_j$.
- $L := \cup_{i,j} L^i_j$.
- $S := \cup_{i,j} S^i_j$.

Remarque 2.9.1.4 *La dernière condition du lemme assure que* $\rho(L^i_j) \subset F^i_{3-j}$.

2.9.2 Intégration sur la frontière du cube

Pour faciliter l'écriture, on introduit les notations suivantes :

Notations 2.9.2.1 *Pour* $u \in C^0(\partial Q^m, \mathbb{E})$ *et* $(i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_2$, *on pose :*

- $$I^i_j(u) := \int_{[-\pi,\pi]^{m-1}} u((2j-3)\pi, x_{-i}) dx_{-i}.$$
- $$\int_{\partial Q^m} u d\sigma_i := I^i_2(u) - I^i_1(u).$$
- $$\int_{\partial Q^m} u d\sigma_\omega := \sum_{i=1}^m \omega_i \int_{\partial Q^m} u d\sigma_i.$$

Par densité, ces formes linéaires continues s'étendent à $L^1(\partial Q^m, \mathbb{E})$. On pose enfin, pour $u \in L^2(\partial Q^m, \mathbb{E})$:

$$\|u\|_{L^2(\partial Q^m, \mathbb{E})} := \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq m} I^i_j(|u|^2_{\mathbb{E}})}.$$

Lemme 2.9.2.2 *Soit $f \in C^1(Q^m, \mathcal{A})$ et $g \in C^1(Q^m, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{C} = \mathbb{K}$. On a :*

1. *pour tout i :*

$$\int_{Q^m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \diamond g = -\int_{Q^m} f \diamond \frac{\partial g}{\partial x_i} + \int_{\partial Q^m} f \diamond g d\sigma_i.$$

2.

$$\int_{Q^m} (d_\omega f) \diamond g = -\int_{Q^m} f \diamond (d_\omega g) + \int_{\partial Q^m} f \diamond g d\sigma_\omega.$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser la formule de Stokes pour Q^m. Ceci est légitime (cf. [86] p.343 ou [48] ch. XXIV, n.14), et l'on a alors, en appliquant cette formule à la forme différentielle $f.g \bigwedge_{j \neq i} dx_j$:

$$\int_{Q^m} \frac{\partial}{\partial x_i}(f \diamond g) = \int_{\partial Q^m} f \diamond g d\sigma_i,$$

d'où la première assertion en développant la dérivée du produit. De là, la seconde est immédiate par linéarité.■

2.9.3 Opérateurs des traces

On introduit l'opérateur des traces $\tilde{T_0} : C^1(Q^m, \mathbb{E}) \to L^2(\partial Q^m, \mathbb{E})$, qui se prolonge canoniquement en un opérateur $T_0 : C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) \to L^2(\partial Q^m, \mathbb{E})$.

Une estimation intermédiaire

Proposition 2.9.3.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute $u \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, on ait :*

$$\|T_0(u)\|_{L^2(\partial Q^m, \mathbb{E})} \leq C\|u\|_{1,\omega}.$$

Pour démontrer cette proposition, on va commencer par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.9.3.2 *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que, pour toute $u \in C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, on ait :*

$$\int_K |T_0(u)|^2_{\mathbb{E}} d\sigma_\omega \leq C_0^2 \int_S \left[|u|^2_{\mathbb{E}} + |d_\omega u|^2_{\mathbb{E}}\right].$$

Preuve. Fixons u, et soit i, j donnés.
On choisit sur F^i_j un système de coordonnées locales (ξ, η), où $\xi \in \mathbb{R}^{m-1}$ est tangente à K^i_j et η est la coordonnée selon $\omega_{i,j}$, de sorte que

$$K^i_j \subset \{(\xi, 0) \quad : \quad \xi \in \mathbb{R}^{m-1}\}.$$

Notant pour simplifier $u_\eta := \frac{\partial u}{\partial \eta}$, on a pour $t \in [0;\gamma]$:

$$u(\xi,0) = \int_t^0 u_\eta(\xi,\eta)d\eta + u(\xi,t)$$

donc :

$$|u(\xi,0)|_{\mathbb{E}}^2 \leq 2\gamma \int_0^t |u_\eta(\xi,\eta)|_{\mathbb{E}}^2 d\eta + 2|u(\xi,t)|_{\mathbb{E}}^2$$

d'où :

$$|u(\xi,0)|_{\mathbb{E}}^2 \leq 2\gamma \int_0^\gamma |u_\eta(\xi,\eta)|_{\mathbb{E}}^2 d\eta + 2|u(\xi,t)|_{\mathbb{E}}^2.$$

On intègre par rapport à t de 0 à γ, et l'on obtient :

$$\gamma|u(\xi,0)|_{\mathbb{E}}^2 \leq 2\int_0^\gamma \left(\gamma^2|u_\eta(\xi,\eta)|_{\mathbb{E}}^2 + |u(\xi,\eta)|_{\mathbb{E}}^2\right) d\eta.$$

Intégrons par rapport à ξ sur K_j^i. Il vient :

$$\int_{K_j^i} |u(\xi,0)|_E^2 d\xi \leq \frac{2}{\gamma}\int_{K_j^i}\int_0^\gamma \left(\gamma^2|u_\eta(\xi,\eta)|_{\mathbb{E}}^2 + |u(\xi,\eta)|_{\mathbb{E}}^2\right) d\eta d\xi.$$

Soit $\Delta_{i,j}$ la valeur absolue du jacobien de la transformation $(\xi,\eta) \mapsto (x_1,\cdots,x_m)$.
On a :

$$\int_{K_j^i} |u(\xi,0)|_{\mathbb{E}}^2 d\xi \leq \frac{2}{\gamma}\Delta_{i,j}\max\left\{1;\frac{\gamma^2}{|\omega|^2}\right\}\int_{S_j^i} |u_\eta|_{\mathbb{E}}^2 + |u|_{\mathbb{E}}^2.$$

Multiplions par ω_j et sommons sur tous les couples (i,j). Notant $\Delta := \max_{(i,j)}\{\omega_i\Delta_{i,j}\}$. Comme tout point de S est dans au plus $2m$ ensembles S_j^i (majoration très grossière), on a :

$$\sum_{i,j}\omega_i\Delta_{i,j}\int_{S_j^i} \leq 2m\Delta\int_S,$$

donc finalement :

$$\int_K |u|_{\mathbb{E}}^2 d\sigma_\omega \leq \frac{4}{\gamma}m\Delta\max\left\{1;\frac{\gamma^2}{|\omega|^2}\right\}\int_S |u_\eta|_{\mathbb{E}}^2 + |u|_{\mathbb{E}}^2.$$

On peut donc prendre :

$$C_0 := \sqrt{\frac{4}{\gamma}m\Delta\max\left\{1;\frac{\gamma^2}{|\omega|^2}\right\}}.\blacksquare$$

Démonstration de la proposition. Compte tenu de la périodicité de u et de la remarque 2.9.1.4, on a :

$$\int_L |T_0(u)|_{\mathbb{E}}^2 d\sigma_\omega \leq \int_K |T_0(u))|_{\mathbb{E}}^2 d\sigma_\omega.$$

Comme de plus :

$$\int_{\partial Q^m} |T_0(u)|_{\mathbb{E}}^2 d\sigma_\omega = \int_L |T_0(u)|_{\mathbb{E}}^2 d\sigma_\omega + \int_K |T_0(u)|_{\mathbb{E}}^2 d\sigma_\omega,$$

la périodicité de u et le lemme permettent de conclure avec $C = C_0\sqrt{2}$.$\blacksquare$

Le prolongement à $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$

Proposition 2.9.3.3 *L'application T_0 se prolonge en une application linéaire continue*

$$\gamma_0 : H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) \to L^2(\partial Q^m, \mathbb{E}).$$

Démonstration. Compte tenu de la proposition précédente, T_0 est linéaire continue de $\big(C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}); \|.\|_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})}\big)$ vers $L^2(\partial Q^m, \mathbb{E})$ et comme $C^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ est dense dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, T_0 se prolonge de manière unique en une application linéaire continue γ_0 de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ vers $L^2(\partial Q^m, \mathbb{E})$.■

Remarque 2.9.3.4 *De même, $\tilde{T}_0$ se prolonge en*

$$\tilde{\gamma_0} : H^1_\omega(Q^m, \mathbb{E}) \to L^2(\partial Q^m, \mathbb{E})$$

qui est linéaire continu.

2.9.4 Le théorème des traces

Le but de cette sous-section est de démontrer le **théorème des traces**, selon lequel :

$$H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) = Ker\gamma_0.$$

Soit $u \in L^2(Q^m, \mathbb{E})$. u peut-être canoniquement prolongé en :

- $\hat{u} \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$
- $\tilde{u} := \chi_{Q^m}.u$.

Lemme 2.9.4.1 *On a :*

1. *si $u \in L^2(Q^m, \mathbb{E})$, alors $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$.*
2. *si $u \in H^1_\omega(Q^m, \mathbb{E})$ et $\tilde{\gamma_0}(u) = 0$, alors pour toute $\varphi \in C^1(Q^m, \mathbb{K})$, on a :*

$$\int_{Q^m} \varphi.\nabla_\omega u = -\int_{Q^m} (d_\omega \varphi).u.$$

3. *si $u \in H^1_\omega(Q^m, \mathbb{E})$ et $\tilde{\gamma_0}(u) = 0$, alors $\tilde{u} \in H^1_\omega(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ et $\nabla_\omega \tilde{u} = \widetilde{\nabla_\omega u}$.*

Preuve. **1.** Comme u est mesurable, $\tilde{u}$ est clairement mesurable. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}|_{\mathbb{E}}^2 \leq \int_{Q^m} |\tilde{u}|_{\mathbb{E}}^2 \leq \int_{Q^m} |u|_{\mathbb{E}}^2 < +\infty$$

donc $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$.

2. Il existe $(u_n)_n$ à valeurs dans $C^1(Q^m, \mathbb{E})$ convergeant vers u.
Comme γ_0 est linéaire continue, on voit que $(\tilde{\gamma}_0(u_n))_n$ est de Cauchy dans $L^2(Q^m, \mathbb{E})$ donc converge, et que la limite est $\tilde{\gamma}_0(u) = 0$.
La formule de Stokes donne immédiatement :

$$\int_{Q^m} \varphi d_\omega u_n = -\int_{Q^m} (d_\omega \varphi) u_n + \int_{\partial Q^m} \varphi . \tilde{\gamma}_0(u_n) d\sigma_\omega .$$

Passant à la limite, on obtient le résultat annoncé.

3. Soit $\varphi \in C^1(Q^m, \mathbb{K})$. On a :

$$\int_{R^m} \varphi . \nabla_\omega \tilde{u} = -\int_{R^m} (d_\omega \varphi) \tilde{u}$$

en raison de la dérivation au sens des distributions ; mais le premier terme vaut :

$$-\int_{Q^m} (d_\omega \varphi) u = \int_{Q^m} \varphi . (\nabla_\omega u) = \int_{Q^m} \varphi . \widetilde{(\nabla_\omega u)}$$

l'avant dernière égalité résultant de **2.** Ainsi, pour toute $\varphi \in C^1(Q^m, \mathbb{K})$, on a :

$$\int_{R^m} \varphi . \nabla_\omega \tilde{u} = \int_{Q^m} \varphi . \widetilde{(\nabla_\omega u)}$$

dòù l'assertion **3.**■

Lemme 2.9.4.2 *Soit $u \in L^2(Q^m, \mathbb{E})$. On définit, pour $\alpha > 1$, $\tilde{u}_\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{E}$ par*

$$\tilde{u}_\alpha(x) := \tilde{u}(\alpha x).$$

Alors :

1. $\tilde{u}_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$

2. *supp*$(\tilde{u}_\alpha) \subset \mathrm{Int} Q^m$

3. $\lim_{\alpha \to 1^+} \|\tilde{u}_\alpha - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})} = 0$

4. *si de plus $\tilde{u} \in H^1_\omega(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$, alors $\tilde{u}_\alpha \in H^1_\omega(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$ et :*

$$\lim_{\alpha \to 1^+} \|\tilde{u}_\alpha - \tilde{u}\|_{H^1_\omega(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})} = 0.$$

Preuve.
1. C'est une conséquence du lemme précédent.
2. Comme $supp(\tilde{u}) \subset Q^m$, il vient :

$$supp(\tilde{u}_\alpha) \subset \frac{1}{\alpha} Q^m \subset \mathrm{Int} Q^m.$$

3. Supposons, dans un premier temps, que u est en plus continue.
Il existe alors dans $\mathbb{R}$ le nombre $M := \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(x)|_{\mathbb{E}}$. De plus,

$$\|\tilde{u}_\alpha - \tilde{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} \leq \int_{Q^m} |\tilde{u}_\alpha(x) - \tilde{u}(x)|^2_{\mathbb{E}} dx.$$

A x fixé, $|\tilde{u}_\alpha(x) - \tilde{u}(x)|^2_{\mathbb{E}}$ tend vers 0 lorsque α tend vers 1, et cette fonction est majorée par la constante $4M^2$, qui est intégrable sur Q^m. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure.
Passons maintenant au cas général. Fixons $\varepsilon > 0$. Par densité, il existe $\varphi \in C^0(Q^m, \mathbb{E})$ telle que

$$\|\tilde{u} - \tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} \leq \varepsilon/3.$$

Comme φ est continue, on sait qu'il existe $\alpha_0 > 1$ telle que si $\alpha \in \,]1, \alpha_0[$, on ait :

$$\|\tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} \leq \varepsilon/3.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a donc si $\alpha \in \,]1, \alpha_0[$:

$$\|\tilde{u}_\alpha - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} \leq \|\tilde{\varphi} - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} + \|\tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} + \|\tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{u}_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} \leq \varepsilon.$$

4. D'après le lemme 2.9.4, on sait déjà que $\tilde{u}_\alpha \in H^1_\omega(\mathbb{R}^m, \mathbb{E})$. En raison du point précédent, il suffit de démontrer que :

$$\lim_{\alpha\to 1^+} \|\partial_\omega (\tilde{u}_\alpha - \tilde{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} = 0.$$

Mais on a :

$$\|\partial_\omega (\tilde{u}_\alpha - \tilde{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} \leq \|(\partial_\omega \tilde{u})_\alpha - \partial_\omega \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} + \|(\partial_\omega \tilde{u})_\alpha - \partial_\omega(\tilde{u}_\alpha)\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})}.$$

De plus, toujours en raison du point précédent, le premier terme du membre de droite tend vers 0 ; quant au second, on peut écrire :

$$\|(\partial_\omega \tilde{u})_\alpha - \partial_\omega(\tilde{u}_\alpha)\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} = (\alpha^m - 1)\|\partial_\omega(\tilde{u}_\alpha)\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})}$$

qui est le produit d'un terme tendant vers 0 par un terme borné au voisinage à droite de 1, donc la limite est 0, ce qui termine la démonstration du lemme.■

Théorème 2.9.4.3 (Théorème de traces) *On a :* $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) = Ker\gamma_0$.

Démonstration.
$H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}) \subset Ker\gamma_0$.
Soit $\hat{u} \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$, $u \in H^1_{\omega,0}(Q^m,\mathbb{E})$ associé et $(\varphi_n)_n$ une suite d'éléments de $C^1_c(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$ convergeant vers u dans $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$. On a pour tout entier n :

$$\gamma_0(\varphi_n) = T_0(\varphi_n) = 0$$

donc par continuité de γ_0, on a $\gamma_0(u) = 0$, d'où $\gamma_0(\hat{u}) = 0$ et l'inclusion est donc prouvée.
$H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E}) \supset Ker\gamma_0$.
Soit $\hat{u} \in Ker\gamma_0$, $u \in H^1_{\omega}(Q^m,\mathbb{E})$ associé et $\varepsilon > 0$. Par le lemme 2.9.4.2, il existe $\alpha_0 > 1$ tel que

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_{\alpha_0}\|_{H^1_\omega(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})} \leq \varepsilon/2.$$

Soit $(\rho_n)_n$ une suite régularisante. Alors, pour tout n, $\rho_n * \tilde{u}_{\alpha_0} \in C^1_{c,\omega}(\mathbb{R}^m,\mathbb{E})$.
De plus, comme $supp(\tilde{u}_{\alpha_0}) \subset \mathrm{Int}Q^m$ et $diam(supp\rho_n) \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, on sait que pour n assez grand, $supp(\rho_n * \tilde{u}_{\alpha_0}) \subset \mathrm{Int}Q^m$. Il existe donc $\varphi \in C^1_{c,\omega}(Q^m,\mathbb{E})$ telle que :

$$\|\varphi - \tilde{u}_{\alpha_0}\|_{1,\omega} \leq \varepsilon/2.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a finalement :

$$\|\varphi - u\|_{1,\omega} \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $u \in H^1_{\omega,0}(Q^m,\mathbb{E})$ *i.e.* $\hat{u} \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$.■

Chapitre 3

Opérateur de Perceval, fonctions multiplement périodiques et fonctions quasi-périodiques

Ce chapitre 3 a pout but d'établir un lien entre les fonctions sur le tore et les fonctions q.p. Ce lien est souvent utilisé dans la littérature, parfois même comme définition de fonction q.p., mais à notre connaissance n'a jamais été explicité. On démontre en premier que l'on peut assimiler $QP^0_\omega(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $C^0(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$. On présente deux démonstrations (au moins quand $\mathbb{E}=\mathbb{K}$), chacune ayant un intérêt propre. On adapte ce lien aux espaces de fonctions dérivables puis aux espaces de Besicovitch et de Blot. On termine ce chapitre sur l'extension du lien au cadre des fonctions q.p. à paramètre.
Formellement, ce lien consiste à associer à la fonction multiplement périodique u la fonction $t \mapsto u(t\omega)$. L'opérateur ainsi défini sera noté $\mathcal{Q}_\omega$. La justification de la considération de cet opérateur $\mathcal{Q}_\omega$ est, en partie, basée sur le lemme suivant (cf [57], thm 443 p.382) :

Lemme 3.0.4.4 *Lorsque les composantes de ω sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{t\omega\ :\ t\in\mathbb{R}\}$ est dense dans $\mathbb{T}^m$.*

3.1 L'assimilation de $QP^0_\omega(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $C^0(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$

Le but de cette section est de démontrer :

Théorème 3.1.0.5 *Il existe un isomorphisme isométrique (bicontinu) entre les espaces de Banach $QP^0_\omega(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $C^0(\mathbb{T}^m,\mathbb{E})$.*

Nous allons montrer uniquement l'aspect isomorphisme isométrique, la continuité en découlant et la continuité de la bijection réciproque résultant du théorème de l'application ouverte. Nous présentons exceptionnellement deux démonstrations de ce résultat. La première démonstration, indiquée par P. Cieutat, est courte et spécifique à la quasi-périodicité. La seconde est basée sur la transformation de Gelfand et peut se généraliser au cas presque-périodique en remplaçant le tore par le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$ (notion due à S. Kakutani et simultanément à A. Weil). Cette seconde démonstration sera présentée dans le cas spécifique où $\mathbb{E} = \mathbb{C}$.

3.1.1 Une première démonstration

On va supposer par commodité que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons $P(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{T}^m \to \mathbb{E}$ engendré par les fonctions $e_k,\ k \in \mathbb{Z}^m$. On peut définir

$$\mathcal{Q}_\omega : \mathbb{E}^{\mathbb{T}^m} \to \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$$

en posant :

$$\mathcal{Q}_\omega(u)(t) := u(t\omega).$$

L'inclusion $\mathcal{Q}_\omega(P(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})) \subset TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est évidente, et par densité elle implique

$$\mathcal{Q}_\omega(C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})) \subset QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E});$$

de plus $\mathcal{Q}_\omega : C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}) \to QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est linéaire. Par ailleurs, selon le lemme 3.0.4.4, on a l'égalité

$$\|\mathcal{Q}_\omega(u)\|_\infty = \|u\|_\infty.$$

Ainsi, $\mathcal{Q}_\omega$ est un morphisme isométrique (donc injectif et continu) de $C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ vers $QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Passons maintenant à son caractère surjectif. On commence, pour cela par noter que $\mathcal{Q}_\omega(P(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})) \supset TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ puisque si $f \in TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, il est de la forme $f = \sum_{j=1}^J a_j e_{k_j \cdot \omega}$ ($a_j \in \mathbb{E}$ et $k_j \in \mathbb{Z}^m$) et alors $f = \mathcal{Q}_\omega(g)$ avec $g = \sum_{j=1}^J a_j e_{k_j}$. Concluons par densité. Soit $f \in QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $(f_n)_n$ une suite à valeurs dans $TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ convergeant vers f. Pour chaque n, on construit $g_n \in P(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ tel que $\mathcal{Q}_\omega(g_n) = f_n$. Puisque :

$$\|g_p - g_q\|_\infty = \|\mathcal{Q}_\omega(g_p - g_q)\|_\infty = \|\mathcal{Q}_\omega(g_p) - \mathcal{Q}_\omega(g_q)\|_\infty = \|f_p - f_q\|_\infty,$$

on déduit que la suite $(g_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace complet $(C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E}); \|.\|_\infty)$ donc converge vers un élément $g \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Par ailleurs :

$$\|\mathcal{Q}_\omega(g) - f\|_\infty \leq \|\mathcal{Q}_\omega(g) - f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty =$$

$$\|\mathcal{Q}_\omega(g) - \mathcal{Q}_\omega(g_n)\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty = \|g - g_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, donc on a bien $\mathcal{Q}_\omega(g) = f$ d'où la surjectivité.■

3.1.2 Une seconde démonstration

L'idée principale

On va utiliser la théorie des algèbres normées[1] (cf. [46]).
Etant donnée une algèbre de Banach commutative avec élément unité non nul A, la transformation de Gelfand est un morphisme continu de A vers $C^0(\mathcal{X}(A), \mathbb{C})$. On montrera qu'en fait si $A = QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, c'est un isomorphime isométrique, et que $\mathcal{X}(QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ s'identifie à $\mathbb{T}^m$. On montrera enfin que cette transformation a pour inverse $\mathcal{Q}_\omega$.

Les espaces utilisés

1. On munit $AP^0(\mathbb{C})$ de la norme uniforme $\|.\|_\infty$. Muni de la multiplication usuelle des fonctions, c'est une algèbre de Banach commutative unifère, d'élément unité la fonction constante 1.

2. $QP^0_\omega(\mathbb{C})$ est alors une sous-algèbre de Banach commutative et unifère (avec même unité) de $AP^0(\mathbb{C})$.

3. On note $TP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions e_λ; $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est une sous-algèbre commutative et unifère de $AP^0(\mathbb{C})$, appelée algèbre des polynômes trigonométriques.

4. On note $TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = TP(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap QP^0_\omega(\mathbb{C})$; c'est une sous-algèbre commutative et unifère de $QP^0_\omega(\mathbb{C})$. On notera que $\{e_\lambda \ : \ \lambda \in \mathbb{Z} < \omega >\}$ est une base de $TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, dite base canonique de $TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Quelques rappels sur les caractères d'un groupe

Les rappels ci-dessous sont issus de [80] pp.6–7, et de [77] p.235 et suivantes. Soit G un groupe abélien localement compact, dont la loi sera notée additivement.

Définition 3.1.2.1 *Un* caractère *de G est un morphisme de groupes de $(G, +)$ vers le groupe multiplicatif $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$. L'ensemble des caractères continus de G est un groupe, il se nomme* groupe dual (topologique) *de G et se note G'.*

On a le lemme suivant :

Lemme 3.1.2.2 *Soit $\phi : G \to \mathbb{C}$ telle que :*

1. *pour tous $x, y \in G$, $\phi(x + y) = \phi(x)\phi(y)$.*

2. *pour tout $x \in G$, $|\phi(x)| \leq 1$.*

[1] Des rappels de vocabulaire sur cette question sont fait plus bas.

3. *il existe* $x \in G$, $\phi(x) \neq 0$.

Alors ϕ *est un caractère de* G.

Preuve. Il s'agit de démontrer le premier point de la définition. On vérifie tout d'abord que ϕ ne s'annule jamais. Pour cela, supposons le contraire, et soit $x_0 \in G$ tel que $\phi(x_0) = 0$. On a alors, pour tout $x \in G$, en vertu du point (**1.**) du lemme :

$$\phi(x) = \phi(x - x_0 + x_0) = \phi(x - x_0)\phi(x_0) = 0,$$

ce qui contredit le point (**3.**), donc pour tout $x \in G$, $\phi(x) \neq 0$. Soit $x \in G$ ne vérifiant pas $|\phi(x)| = 1$. Compte tenu de ce que l'on vient de prouver et du point (**2.**) du lemme, on sait que :

$$0 < |\phi(x)| < 1.$$

Comme $\phi(x)\phi(-x) = 1$, on en déduit que $|\phi(-x)| > 1$, ce qui contredit le point (**2.**) du lemme. Le lemme est ainsi démontré.■

Quelques rappels sur la transformation de Gelfand

Les rappels ci-dessous sont issus de [46] chapitre XV.

Rappel 3.1.2.3 *Soit* $(E, +, ., \times)$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre commutative. Un* caractère *sur* E *est un morphisme d'algèbres non nul* $\varphi : E \to \mathbb{C}$*, c'est-à-dire qu'il vérifie :*

1. φ *est linéaire.*
2. *Pour tous* $x, y \in E$, $\varphi(x \times y) = \varphi(x)\varphi(y)$.
3. *Il existe* $x \in E$ *tel que* $\varphi(x) \neq 0$.

Lorsque E *est une algèbre de Banach commutative avec élément unité non nul, l'ensemble des caractères de* E *s'appelle le* spectre *de* E *et se note* $\mathcal{X}(E)$*. Il est muni de la topologie faible-*$\star$ $\sigma(E'; E)$.

Remarque 3.1.2.4 *Le troisième axiome est équivalent à dire que* $\varphi(1_E) = 1$.

Lorsque E est une algèbre de Banach commutative avec élément unité non nul, tout caractère de E est continu de norme 1. Si de plus E est séparable, $\mathcal{X}(E)$ est $\star$-faiblement compact et métrisable.

Définition 3.1.2.5 **1.** *La transformée de Gelfand de* $x \in E$ *est l'application* $\mathcal{G}(x) : \mathcal{X}(E) \to \mathbb{C}$ *qui à* φ *associe* $\varphi(x)$*, i.e.* $\mathcal{G}(x)(\varphi) = \varphi(x)$.

2. *La transformation de Gelfand est l'application* $\mathcal{G} : E \to \mathbb{C}^{\mathcal{X}(E)}$ *qui à* $x \in E$ *associe sa transformée de Gelfand.*

Rappel 3.1.2.6 [2] *Si* E *est une algèbre de Banach commutative séparable avec élément unité non nul, la transformation de Gelfand est un morphisme continu d'algèbres de Banach, et vérifie* $\|\mathcal{G}(x)\| \leq \|x\|$ *et* $\mathcal{G}(1_E) = 1$.

---

[2] cf. DIEUDONNÉ, [46], (15.3.4.) p.286

Démonstration du Théorème 3.1.0.5.

Proposition 3.1.2.7 *$QP^0_\omega(\mathbb{C})$ est une algèbre de Banach commutative séparable avec élément unité non nul.*

Démonstration. La seule chose à vérifier est la séparabilité. Or, celle-ci résulte du fait que l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j e_{\lambda_j} \;:\; n \in \mathbb{N}^*, \lambda_j \in \mathbb{Z} < \omega >, a_j \in \mathbb{Q}[i] \right\}$$

est dénombrable dense dans $QP^0_\omega(\mathbb{C})$.■

On note $S_\omega = \mathcal{X}\left(TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})\right)$ et $\Sigma_\omega = \mathcal{X}(QP^0_\omega(\mathbb{C}))$.

Proposition 3.1.2.8 *On peut assimiler S_ω et Σ_ω. De plus, $\sigma \in S_\omega$ est entièrement déterminé par les valeurs $\sigma(e_{\omega_j})$ quand $j = 1, \cdots, m$.*

Démonstration. Tout élément de Σ_ω en définit un de S_ω par restriction à $TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Réciproquement, soit $\sigma \in S_\omega$. σ est linéaire continu, donc uniformément continu, et comme $TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $QP^0_\omega(\mathbb{C})$, σ se prolonge de manière unique en un élément $\tilde{\sigma} : QP^0_\omega(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Le fait que $\tilde{\sigma} \in \Sigma_\omega$ est alors clair. L'assimilation est donc légitime. Passons à la démonstration de la seconde partie de la proposition. Soit $\sigma \in S_\omega$. Comme σ est linéaire et que $\{e_\lambda; \lambda \in \mathbb{Z} < \omega >\}$ est une base de $TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, σ est entièrement déterminé par les valeurs qu'il prend sur les e_λ pour $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$. Soit un tel λ. On a $\lambda = \sum_{j=1}^{m} k_j \omega_j$, où $k_j \in \mathbb{Z}$. On en déduit que :

$$\sigma(e_\lambda) = \prod_{j=1}^{m} \sigma(e_{\omega_j})^{k_j}$$

d'où l'assertion.■

Remarque 3.1.2.9 *$\mathbb{R}$ peut être considéré comme étant une sous-algèbre de S_ω, car tout $t \in \mathbb{R}$ définit $\underline{t} : f \mapsto f(t)$.*

Lemme 3.1.2.10 *Soit $\sigma : TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ linéaire. On définit $\phi_\sigma : \mathbb{Z} < \omega > \to \mathbb{C}$ par $\phi_\sigma(\lambda) = \sigma(e_\lambda)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\sigma \in S_\omega$.

2. $\phi_\sigma \in (\mathbb{Z} < \omega >)'$.

La démonstration de ce lemme utilise le théorème arithmétique de Kronecker (cf. [49] p.232) dont voici l'énoncé :

Rappel 3.1.2.11 *(***Théorème arithmétique de Kronecker***) Soit $z_1, \cdots, z_p$ des nombres complexes unitaires, et $\mu_1, \cdots, \mu_p$ des réels deux à deux distincts. On suppose que pour tout $(d_1, \cdots, d_p) \in \mathbb{Z}^p$, on a :*

$$\left[\sum_{j=1}^{p} d_j \mu_j = 0\right] \Longrightarrow \left[\prod_{j=1}^{p} z_j^{d_j} = 1\right].$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j = 1, \cdots, p$,

$$|e_{\mu_j}(t) - z_j| \leq \epsilon.$$

Preuve du lemme : Si la première assertion est vraie, on vérifie facilement que $\phi_\sigma(\lambda + \mu) = \phi_\sigma(\lambda)\phi_\sigma(\mu)$. De plus, pour tout λ, $|\phi_\sigma(\lambda)| = |\sigma(e_\lambda)| \leq \|e_\lambda\|_\infty = 1$. Donc par le lemme 3.1.2.2, $\phi_\lambda \in (\mathbb{Z} < \omega >)'$. Pour la réciproque, on vérifie en

premier que $\sigma(1) = 1$ puis que si $f, g \in TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$. Il reste à vérifier que pour tout $f \in TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $|\sigma(f)| \leq \|f\|_\infty$. Soit donc $f \in TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de la forme $f = \sum_{j=1}^{p} a_j e_{\lambda_j}$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Par le théorème arithmétique de Kronecker, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout j, on ait :

$$|fe_{\lambda_j}(t) - \phi_\sigma(\lambda_j)| \leq \varepsilon.$$

On a alors la majoration :

$$|\sigma(f)| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{p} |a_j| + |f(t)| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{p} |a_j| + \|f\|_\infty.$$

En faisant tendre ε vers 0, on a le résultat souhaité, ce qui termine la démonstration du lemme.■

Si σ_1 et σ_2 sont deux éléments de S_ω, on note $\sigma_1 \bigodot \sigma_2$ l'unique application linéaire définie par, si $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$:

$$\sigma_1 \bigodot \sigma_2(e_\lambda) := \sigma_1(e_\lambda)\sigma_2(e_\lambda).$$

Cette application est bien définie car $\{e_\lambda \ : \ \lambda \in \mathbb{Z} < \omega >\}$ est une base de $TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Lemme 3.1.2.12 $(S_\omega; \bigodot)$ *est un groupe abélien.*

Preuve. *Loi de composition interne.* Il faut commencer à vérifier que si $\sigma_1, \sigma_2 \in S_\omega$, alors $\sigma_1 \bigodot \sigma_2 \in S_\omega$. D'après le lemme 3.1.2.10, $\phi_{\sigma_j} \in (\mathbb{Z} < \omega >)'$. On définit alors $\phi_{\sigma_1 \bigodot \sigma_2}$ en posant $\phi_{\sigma_1 \bigodot \sigma_2}(\lambda) = \sigma_1 \bigodot \sigma_2(e_\lambda)$. On voit facilement que $\phi_{\sigma_1 \bigodot \sigma_2}(\lambda) = \phi_{\sigma_1}(\lambda)\phi_{\sigma_2}(\lambda)$. Donc $\phi_{\sigma_1 \bigodot \sigma_2} \in (\mathbb{Z} < \omega >)'$, puis par le lemme 3.1.2.10, $\sigma_1 \bigodot \sigma_2 \in S_\omega$.

Associativité et commutativité. Ces deux propriétés résultent du fait qu'elles sont vraies pour la multiplication de $\mathbb{C}$.

Elément neutre. On note $e : TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ l'application linéaire vérifiant pour tout $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$, $e(e_\lambda) = 1$. Raisonnant encore avec ϕ_e tel que $\phi_e(\lambda) = 1$ si $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$, on vérifie que $\phi_e \in (\mathbb{Z} < \omega >)'$, et donc via le lemme 3.1.2.10, $e \in S_\omega$. Par ailleurs, sur les éléments de base, on a par construction $e \bigodot \sigma = \sigma$ pour toute $\sigma \in S_\omega$, donc cette égalité est vérifiée sur S_ω en entier. Ainsi, e est un élément neutre pour $\bigodot$.

Elément inverse. Soit $\sigma \in S_\omega$. On définit l'application linéaire $\sigma_{-1} : TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ en posant pour $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$,$\sigma_{-1}(e_\lambda) = \overline{\sigma(e_\lambda)} = \frac{1}{\sigma(e_\lambda)}$. Raisonnant comme avant avec $\phi_{\sigma_{-1}}$ construit de manière évidente, et à l'aide du lemme 3.1.2.10, on conclut que $\sigma_{-1} \in S_\omega$. Enfin, comme sur la base canonique de $TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\sigma_{-1} \bigodot \sigma = e$, cette égalité passe à $TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C})$, donc σ_{-1} est l'inverse de σ.■

On note $QP^0_\omega(\mathbb{C})'$ le dual topologique de $(QP^0_\omega(\mathbb{C}), \|..\|_\infty)$ et B_* la boule unité de $QP^0_\omega(\mathbb{C})'$. On a $S_\omega \equiv \Sigma_\omega \subset QP^0_\omega(\mathbb{C})'$.

Lemme 3.1.2.13 Σ_ω *est faiblement-$\star$ compact.*

Preuve. Compte tenu du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, on sait que B_* est faiblement-$\star$ compacte, il suffit donc de montrer que Σ_ω est faiblement-$\star$ fermée.
Par ailleurs, comme $QP^0_\omega(\mathbb{C})$ est séparable, la topologie faible-$\star$ engendrée sur B_* est métrisable, on peut donc travailler avec les suites. Soit donc $\varphi \in QP^0_\omega(\mathbb{C})$ et $(\varphi_n)_n$ une suite d'éléments de Σ_ω convergeant faiblement-$\star$ vers φ. La fermeture faible-$\star$ de B_* assure que $\varphi \in B_*$. Soit $f, g \in TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a

$$\varphi_n(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi_n(f) + \beta\varphi_n(g) \text{ et } \varphi_n(fg) = \varphi_n(f)\varphi_n(g).$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \text{ et } \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g).$$

De même, en passant à la limite l'égalité $\varphi_n(1) = 1$ et dans l'inégalité $|\varphi_n(f)| \leq \|f\|_\infty$, on obtient l'égalité $\varphi(1) = 1$ et l'inégalité $|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty$.■

Lemme 3.1.2.14 *Soit* $(\varphi; (\varphi_n)_n) \in \Sigma_\omega \times \Sigma_\omega^{\mathbb{N}}$. *Les cinq assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $(\varphi_n)_n$ *converge faiblement-$\star$ vers* φ.
2. *Pour toute* $f \in QP^0_\omega(\mathbb{C})$, $(\varphi_n(f))_n$ *converge vers* $\varphi(f)$.
3. *Pour toute* $f \in TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $(\varphi_n(f))_n$ *converge vers* $\varphi(f)$.
4. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$, $(\varphi_n(e_\lambda))_n$ *converge vers* $\varphi(e_\lambda)$.
5. *Pour tout* $j = 1, \cdots, m$, $(\varphi_n(e_{\omega_j}))_n$ *converge vers* $\varphi(e_{\omega_j})$.

Preuve. L'équivalence de **(1.)** et **(2.)** est la définition de la convergence faible-$\star$. Le fait que **(2.)** implique **(3.)** résulte de $TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset QP_\omega^0(\mathbb{C})$. Montrons que **(3.)** implique **(2.)**. Soit $f \in QP_\omega^0(\mathbb{C})$, il existe une suite $(f_q)_q$ à valeurs dans $TP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{C})$ convergeant vers f (uniformément). En utilisant l'inégalité triangulaire puis la linéarité, on a :

$$|\varphi_n(f) - \varphi(f)| \leq |\varphi_n(f - f_q)| + |\varphi_n(f_q) - \varphi(f_q)| + |\varphi(f - f_q)| \leq$$

$$\|f - f_q\|_\infty + |\varphi_n(f_q) - \varphi(f_q)| + \|f - f_q\|_\infty.$$

Ainsi, on a pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{n\to+\infty} |\varphi_n(f) - \varphi(f)| \leq 2\|f - f_q\|_\infty + \lim_{n\to+\infty} |\varphi_n(f_q) - \varphi(f_q)| = 2\|f - f_q\|_\infty$$

On passe à la limite quand $q \to +\infty$ pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} |\varphi_n(f) - \varphi(f)| = 0,$$

d'où le résultat. **(3.)** implique **(4.)** de manière évidente, montrons la réciproque. Soit $f \in TP_\omega$ de la forme $f = \sum_{j=1}^{s} a_j e_{\lambda_j}$. Par linéarité, on a :

$$|\varphi_n(f) - \varphi(f)| \leq \sum_{j=1}^{s} |a_j| \cdot |\varphi_n(e_{\lambda_j}) - \varphi(e_{\lambda_j})|$$

et comme chacun des termes de la somme tend vers 0, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} |\varphi_n(f) - \varphi(f)| = 0,$$

d'où le résultat. **(4.)** implique **(5.)** est évident, passons à la réciproque. Soit $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$ de la forme $\lambda = \sum_{j=1}^{m} k_j \omega_j$. On a alors :

$$|\varphi_n(e_\lambda) - \varphi(e_\lambda)| = \left| \prod_{j=1}^{m} \left(\varphi_n(e_{\omega_j})\right)^{k_j} - \prod_{j=1}^{m} \left(\varphi(e_{\omega_j})\right)^{k_j} \right|$$

et comme pour tout j, on a $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(e_{\omega_j}) = \varphi(e_{\omega_j})$, on obtient le résultat voulu.■

Lemme 3.1.2.15 *Muni de la topologie faible-$\star$, $(\Sigma_\omega; \odot)$ est un groupe topologique compact.*

Preuve. Compte tenu du lemme 3.1.2.12, il ne reste qu'à vérifier que l'aspect groupe topologique pour la topologie faible-$\star$.

Continuité de l'application $\odot$. Soit$(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ deux suites à valeurs dans Σ_ω convergeant faiblement-$\star$ respectivement vers φ et ψ (qui sont dans Σ_ω). On a pour tout $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(e_\lambda) = \varphi(e_\lambda)$ et $\lim_{n\to+\infty} \psi_n(e_\lambda) = \psi(e_\lambda)$ de quoi on déduit en utilisant la propriété de morphisme d'algèbres que pour tout

$\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$, $\lim_{n\to+\infty} (\varphi_n \bigodot \psi_n)(e_\lambda) = \varphi \bigodot \psi(e_\lambda)$ ce qui donne le résultat compte tenu du lemme 3.1.2.14.

Continuité du passage à l'inverse. On le vérifie encore sur les e_λ, λ parcourant $\mathbb{Z} < \omega >$. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite à valeurs dans Σ_ω convergeant faiblement-$\star$ vers φ. Les inverses de $\varphi_n(e_\lambda)$ et $\varphi_n(e_\lambda)$ sont donnés par leur conjugués (cf. lemme 3.1.2.12) donc le passage à l'inverse est continu sur les e_λ d'où le résultat attendu.■

Rappel 3.1.2.16 *Muni de la topologie induite par $\mathbb{C}$, le tore $\mathbb{T}$ est un groupe multiplicatif abélien compact. Le groupe $\mathbb{T}^m$ est donc abélien compact comme produit cartésien de groupes compacts. Les opérations de groupe sur $\mathbb{T}^m$ sont données par :*

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \cdot (\beta_1, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_m\beta_m)$$

et

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)^{-1} = (\overline{\alpha_1}, \cdots, \overline{\alpha_m}).$$

Lemme 3.1.2.17 *Les deux groupes abéliens compacts $\mathbb{T}^m$et $(\Sigma_\omega; \bigodot)$ sont isomorphes.*

Preuve. Soit $\varphi \in \Sigma_\omega$. Par le lemme 3.1.2.16, on lui associe $\phi_\varphi : \mathbb{Z} < \omega > \longrightarrow \mathbb{C}$ en posant $\phi_\varphi(\lambda) = \varphi(e_\lambda)$, et alors $\phi_\varphi(\lambda) \in \mathbb{T}$. On définit alors l'application $\Theta : \Sigma_\omega \to \mathbb{T}^m$ par :

$$\Theta(\varphi) = (\phi_\varphi(\omega_1), \cdots, \phi_\varphi(\omega_m)).$$

Compte tenu du rappel 3.1.2.16, il est immédiat que Θ est un morphisme de groupes. Sa continuité s'obtient en raisonnant avec des suites ce qui est légitime puisque les groupes sont métrisables. Montrons maintenant que Θ est injective. A ce titre, il suffit de montrer que $\Theta^{-1}(1, \cdots, 1) = \{e\}$. Soit donc $\varphi \in \Theta^{-1}(1, \cdots, 1)$. On a pour tout j, $\varphi(e_{\omega_j}) = 1$ et donc si $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$, $\varphi(e_\lambda) = 1$. On en conclut que $\varphi = e$. Montrons enfin que Θ est surjective. Fixons $(\theta_1, \cdots, \theta_m) \in \mathbb{T}^m$. On note $\sigma : TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ l'unique application linéaire telle que si $\lambda = \sum_{j=1}^m k_j\omega_j \in \mathbb{Z} < \omega >$, $\sigma(e_\lambda) = \prod_{j=1}^m \theta_j^{k_j}$. En particulier, $\sigma(e_{\omega_j}) = \theta_j$. Suivant le lemme 3.1.2.10, on considère $\phi_\sigma : \mathbb{Z} < \omega > \to \mathbb{C}$ telle que $\phi_\sigma(\lambda) = \sigma(e_\lambda)$. On montre que ϕ_σ est un caractère du groupe abélien $\mathbb{Z} < \omega >$ donc via le lemme 3.1.2.10, on peut conclure que $\sigma \in S_\omega$. Par continuité uniforme, σ se prolonge en une application $\varphi \in \Sigma_\omega$ qui vérifie :

$$\Theta(\varphi) = (\varphi(e_{\omega_1}), \cdots, \varphi(e_{\omega_m})) = (\sigma(e_{\omega_1}), \cdots, \sigma(e_{\omega_m})) = (\theta_1, \cdots, \theta_m)$$

Concluons : Θ est un isomorphisme continu entre deux groupes compacts, il est donc bicontinu en raison de la compacité.■

Proposition 3.1.2.18 *$QP^0_\omega(\mathbb{C})$ et $C^0(\Sigma_\omega, \mathbb{C})$ sont deux algèbres de Banach isomorphes et isométriques.*

Démonstration. Comme Σ_ω est le spectre de l'algèbre $QP^0_\omega(\mathbb{C})$, on peut considérer la transformation de Gelfand $\mathcal{G} : QP^0_\omega(\mathbb{C}) \to C^0(\Sigma_\omega, \mathbb{C})$ qui est un morphisme d'algèbres de Banach vérifiant en outre $\forall f \in QP^0_\omega(\mathbb{C}), \|\mathcal{G}(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ (cf. rappel 3.1.2.6). On va montrer qu'ici :

$$\forall f \in QP^0_\omega(\mathbb{C}), \quad \|\mathcal{G}(f)\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

En effet, soit $f \in QP^0_\omega(\mathbb{C})$ fixé. Par définition de la norme uniforme, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, un réel t_n tel que $|f(t_n)| \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f\|_\infty$. Mais $|f(t_n)| = |\underline{t_n}(f)| \leq \sup_{\varphi \in \Sigma_\omega} |\varphi(f)|$. Donc on a : $\|\mathcal{G}(f)\|_\infty \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f\|_\infty$ d'où le résultat souhaité. Ainsi, $\mathcal{G}$ est un morphisme isométrique (donc injectif) d'algèbres de Banach.

Pour la surjectivité, on va démontrer que $\mathcal{G}(QP^0_\omega(\mathbb{C}))$ est dense et fermé dans $C^0(\Sigma_\omega, \mathbb{C})$. Tout d'abord, comme $\mathcal{G}$ est une isométrie linéaire et comme $QP^0_\omega(\mathbb{C})$ est complète, $\mathcal{G}(QP^0_\omega(\mathbb{C}))$ est complète donc fermée. Pour la densité, on va utiliser le théorème de Stone-Weierstrass. Vérifions-en les différentes hypothèses :

- $\mathcal{G}(QP^0_\omega(\mathbb{C}))$ est une sous-algèbre de $C^0(\Sigma_\omega, \mathbb{C})$ avec unité, puisque $\mathcal{G}(1)$ est la fonction constante égale à 1 sur Σ_ω.

- Si ϕ, ψ sont deux éléments distincts de Σ_ω, il existe $f \in QP^0_\omega(\mathbb{C})$ tel que $\phi(f) \neq \psi(f)$, c'est-à-dire $\mathcal{G}(f)(\phi) \neq \mathcal{G}(f)(\psi)$, donc il existe $\mathcal{G}(f) \in \mathcal{G}(QP^0_\omega(\mathbb{C}))$ séparant ϕ de ψ.

- Soit $F \in \mathcal{G}(QP^0_\omega(\mathbb{C}))$. Il reste à vérifier que $\overline{F} \in \mathcal{G}(QP^0_\omega(\mathbb{C}))$, où $\overline{F}$ vérifie :

  $$\forall \varphi \in \Sigma_\omega, \quad \overline{F}(\varphi) := \overline{F(\varphi)} = \overline{\mathcal{G}(f)(\varphi)} = \overline{\varphi(f)}.$$

  Il existe une suite de polynômes trigonométriques $(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>} a_{\lambda,n} e_\lambda)_n$ (la famille $(a_{\lambda,n})_\lambda$ étant presque-nulle pour tout n) convergeant vers F uniformément. La suite $(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>} \overline{a_{\lambda,n}} e_{-\lambda})_n$ converge alors uniformément vers une fonction $g \in QP^0_\omega(\mathbb{C})$. Pour tout $\varphi \in \Sigma_\omega$, on a :

  $$\mathcal{G}(g)(\varphi) = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{G}\left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>} \overline{a_{\lambda,n}} e_{-\lambda}\right)(\varphi) = \lim_{n \to +\infty} \varphi\left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>} \overline{a_{\lambda,n}} e_{-\lambda}\right) =$$

  $$\lim_{n \to +\infty} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>} \overline{a_{\lambda,n}} \varphi(e_{-\lambda}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>} \overline{a_{\lambda,n}} \overline{\varphi(e_\lambda)} = \overline{\varphi(f)} = \overline{F}(f).$$

Ainsi, le théorème de Stone-Weierstrass conclut à la densité de $\mathcal{G}(QP^0_\omega(\mathbb{C}))$ dans $C^0(\Sigma_\omega, \mathbb{C})$, ce qui termine la démonstration.■

Rappel 3.1.2.19 *(***Théorème du relèvement***) pour toute $u \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^N)$ $2\pi-$périodique en chaque variable, il existe une unique $U \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^N)$ telle que :*

$$\forall (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m, u(x_1, \cdots, x_m) = U(e^{ix_1}, \cdots, e^{ix_m}).$$

Remarque 3.1.2.20 *Lorsque dans le rappel la fonction u est :* $u(x_1, \cdots, x_m) = e^{ik\cdot x}$*, avec* $k \in \mathbb{Z}^m$*, on a* $U(\theta_1, \cdots, \theta_m) = \prod_{j=1}^m \theta_j^{k_j}$*.*

Théorème 3.1.2.21 *Les deux algèbres de Banach* $QP^0_\omega(\mathbb{C})$ *et* $C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{C})$ *sont isomorphes et isométriques.*

Démonstration. D'après la proposition 3.1.2.18, $\mathcal{G} : QP^0_\omega(\mathbb{C}) \to C^0(\Sigma_\omega, \mathbb{C})$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach. Par le lemme 3.1.2.17, $\Theta : \Sigma_\omega \to \mathbb{T}^m$ est un isomorphisme de groupes abéliens compacts. On en déduit que $\tilde{\Theta} : C^0(\Sigma_\omega, \mathbb{C}) \to C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{C})$ défini par $\tilde{\Theta} : F \to F \circ \Theta$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach. L'application $\tilde{\Theta} \circ \mathcal{G}$ est alors un isomorphisme isométriques entre les algèbres de Banach $QP^0_\omega(\mathbb{C})$ et $C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{C})$.$\blacksquare$

Le théorème annoncé au début est donc démontré. On va expliciter cet isomorphisme pour le relier à $\mathcal{Q}_\omega$.

EXPLICITATION DE L'ISOMORPHISME.
Première étape. Pour $\lambda \in \mathbb{Z} < \omega >$ de la forme $\lambda = \sum_{j=1}^m k_j \omega_j$, $e_\lambda \in TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc $\mathcal{G}(e_\lambda) \in C^0(\Sigma_\omega, \mathbb{C})$. On calcule alors $\mathcal{G}(e_\lambda) \circ \Theta^{-1} : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ et l'on trouve :

$$\forall (\theta_1; \cdots; \theta_m) \in \mathbb{T}^m, \quad \mathcal{G}(e_\lambda) \circ \Theta^{-1}(\theta_1; \cdots; \theta_m) = \prod_{j=1}^m \theta_j^{k_j},$$

d'où finalement :

$$\forall (x_1; \cdots; x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \mathcal{G}(e_\lambda) \circ \Theta^{-1}(e^{ix_1}; \cdots; e^{ix_m}) = e^{i\sum_{j=1}^m k_j x_j}.$$

Seconde étape. Par linéarité, on calcule $\mathcal{G}(P) \circ \Theta^{-1}$ pour $P \in TP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On trouve immédiatement :

$$\mathcal{G}\left(\sum_{l=1}^L a_l e_{k^{(l)}\cdot\omega}\right) \circ \Theta^{-1}(e^{ix_1}; \cdots; e^{ix_m}) = \sum_{j=1}^L a_l e^{ik^{(l)}\cdot x}.$$

Troisième étape. Par densité, on étend la formule à $QP^0_\omega(\mathbb{C})$. Soit $f \in QP^0_\omega(\mathbb{C})$. f est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_n$. On pose, pour tout n, $P_n = \sum_{l\geq 0} a_{n,l} e_{k^{(n,l)}\cdot\omega}$, la somme étant finie. On a alors :

$$\mathcal{G}(f) \circ \Theta^{-1}(e^{ix_1}; \cdots; e^{ix_m}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{l\geq 0} a_{n,l} e^{ik^{(n,l)}\cdot x}.$$

Ainsi, par simple relecture, on voit que la fonction $u \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{C})$ associée à f vérifie (et est la seule à vérifier) :

$$u(t\omega) = f(t).$$

Ainsi, $\mathcal{Q}_\omega$ est inversible et vérifie :

$$\mathcal{Q}_\omega^{-1}(f) = u,$$

les notations étant celles précédemment définies. Notant

$$\mathcal{S} : QP_\omega^0(\mathbb{C}) \to \{u \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \quad ; \quad 2\pi\mathbb{Z}^m \subset Per(u)\}$$

l'isomorphisme isométrique déduit du théorème 3.1.2.21 et de la remarque 3.1.2.20, on a ainsi :

$$\mathcal{Q}_\omega = \mathcal{S}^{-1}.$$

3.2 Autres théorèmes d'isomorphisme

3.2.1 Extension du résultat précédent aux fonctions dérivables

Proposition 3.2.1.1 *Pour tout $r \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on a $\mathcal{Q}_\omega(C_\omega^r(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})) = QP_\omega^r(\mathbb{E})$ et de plus pour tout $u \in C_\omega^r(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$:*

$$\mathcal{Q}_\omega(\vec{D}u(\cdot; \omega)) = \frac{d}{dt}\mathcal{Q}_\omega(u).$$

Démonstration. Il suffit de faire la démonstration lorsque $r = 1$. Soit $u \in C_\omega^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(d_\omega u)(t\omega) = \frac{d}{dt}\mathcal{Q}_\omega(u)(t)$, donc $\mathcal{Q}_\omega(d_\omega u) = \frac{d}{dt}\mathcal{Q}_\omega(u)$ soit $\mathcal{Q}_\omega(u) \in QP_\omega^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $\rho \in QP_\omega^1(\mathbb{E})$. Par le théorème 3.1.0.5, on sait qu'il existe $u, v \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ tels que $\mathcal{Q}_\omega(u) = \rho$ et $\mathcal{Q}_\omega(v) = \rho'$. Il s'agit donc de montrer que $u \in C_\omega^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$ en montrant que $d_\omega u = v$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Par le lemme 3.0.4.4, on sait qu'il existe $(t_n)_n$ telle que $t_n\omega \to x$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a par continuité de $u(t\omega + .)$:

$$\lim_{n \to +\infty} u(t\omega + t_n\omega) = u(t\omega + x).$$

Pour tout entier n, on a :

$$u(t\omega + t_n\omega) - u(t_n\omega) = \int_{t_n}^{t_n+t} \frac{d}{ds}(u(s\omega))ds = \int_{t_n}^{t_n+t} v(s\omega)ds$$

la dernière égalité résultant du fait que pour tout t, on a $\frac{d}{dt}(u(t\omega)) = (d_\omega u)(t\omega) = v(t\omega)$. On a alors :

$$\frac{u(t\omega + t_n\omega) - u(t_n\omega)}{t} - v(x) = \frac{1}{t}\int_{t_n}^{t_n+t} [v(s\omega) - v(x)]\, ds.$$

Mais comme v est continue, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe N tel que si $n \geq N$,on ait :

$$|v(x) - v(t_n\omega)|_{\mathbb{E}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quand t parcourt $[-1, 1]$, l'ensemble des $(t_n, t)_n$ parcourt un compact K de $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, donc en vertu du lemme de Heine appliqué à v, on a :

$$\exists \alpha \in]0, 1[, \quad \forall (x, y) \in K^2, \quad (|x - y| \leq \alpha|\omega|) \Rightarrow \left(|v(x) - v(y)|_{\mathbb{E}} \leq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Si $|t| \leq \alpha$ et $s \in [t_n, t_n + t]$, on a alors : $|v(s\omega) - v(t_n\omega)|_{\mathbb{E}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. A l'aide de l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\left|\frac{u(t\omega + t_n\omega) - u(t_n\omega)}{t} - v(x)\right|_{\mathbb{E}} \leq \frac{1}{t}\int_{t_n}^{t_n+t} [|v(s\omega) - v(t_n\omega)|_{\mathbb{E}} + |v(t_n\omega) - v(x)|_{\mathbb{E}}]\, ds \leq$$

$$|v(x) - v(t_n\omega)|_{\mathbb{E}} + \frac{1}{t}\int_{t_n}^{t_n+t} |v(t_n\omega) - v(s\omega)|_{\mathbb{E}} ds \leq \frac{\varepsilon}{2}\left[1 + \frac{1}{t}\int_{t_n}^{t_n+t} ds\right] = \varepsilon.$$

Finalement, on obtient :

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x + t\omega) - u(x)}{t} = v(x).$$

La proposition est donc établie.■

3.2.2 Extensions aux espaces de Lebesgue et de Sobolev

L'opérateur $\mathcal{Q}_\omega$ ne se prolonge pas immédiatement aux fonctions de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ en regardant sur $\{t\omega; t \in \mathbb{R}\}$ qui est négligeable. On va faire le prolongement par les séries de Fourier pour obtenir un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert entre $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ et $B^2_\omega(\mathbb{H})$. C'est le but de la proposition suivante.

Proposition 3.2.2.1 *Notons $\mathcal{Q}_\omega : L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H}) \longrightarrow B^2_\omega(\mathbb{H})$ l'opérateur défini par :*

$$\mathcal{Q}_\omega\left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} a_\nu e_\nu\right) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} a_\nu e_{\nu \cdot \omega}.$$

Alors $\mathcal{Q}_\omega$ est bien défini, est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert entre $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ et $B^2_\omega(\mathbb{H})$, et prolonge l'opérateur $\mathcal{Q}_\omega$ précédemment défini.

Démonstration.
1. Par l'indépendance $\mathbb{Z}$-linéaire des composantes du vecteur ω, on sait que l'application $k \mapsto k \cdot \omega$ est un isomorphisme de modules de $\mathbb{Z}^m$ sur $\mathbb{Z} < \omega >$. Par conséquent il existe un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert $\mathcal{F}_2$: $\ell^2(\mathbb{Z}^m, \mathbb{H}) \to \ell^2(\mathbb{Z} < \omega >, \mathbb{H})$.
2. De plus, l'application $\mathcal{F}_1$ de $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ vers $\ell^2(\mathbb{Z}^m, \mathbb{H})$ qui à u associe ses coefficients de Fourier est un isomorphisme isométrique (cf. [87] p.248, aussi 2.4.0.11).

3. Par ailleurs, le théorème de Riesz-Fisher-Besicovitch ([7] p.110) indique que l'application $\mathcal{F}_3$ de $B^2_\omega(\mathbb{E})$ vers $\ell^2(\mathbb{Z} < \omega >, \mathbb{E})$ qui à f associe $(a(f,\lambda))_{\lambda \in \mathbb{Z}<\omega>}$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert.
4. On conclut des trois premiers points que $\mathcal{F}_3^{-1} \circ \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert entre $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ et $B^2_\omega(\mathbb{H})$. On vérifie immédiatement que c'est celui donné dans l'énoncé, et qu'il coïncide avec l'opérateur usuel.■

Proposition 3.2.2.2 *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_\omega$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert entre $H^j_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ sur $B^{j,2}_\omega(\mathbb{H})$, et $\mathcal{Q}_\omega(\nabla^j_\omega u) = \nabla^j (\mathcal{Q}_\omega(u))$.*

Démonstration. Le cas de $j = 0$ a été réglé dans la proposition précédente.

Démontrons l'énoncé quand $j = 1$. Soit tout d'abord $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$. Par la proposition précédente, on sait que $\mathcal{Q}_\omega(u)$ et $\mathcal{Q}_\omega(\nabla_\omega u)$ dans des éléments de $B^2_\omega(\mathbb{H})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\|t^{-1}(\tau_{t\omega} u - u) - \nabla_\omega u\| = \left\|\mathcal{Q}_\omega\left(t^{-1}(\tau_{t\omega} u - u) - \nabla_\omega u\right)\right\|_{B^2} =$$

$$\left\|t^{-1}(\tau_{t\omega}\mathcal{Q}_\omega(u) - \mathcal{Q}_\omega(u)) - \mathcal{Q}_\omega(\nabla_\omega u)\right\|_{B^2}.$$

Mais comme $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$, on en déduit que :

$$\lim_{t\to 0}\left\|t^{-1}(\tau_{t\omega}\mathcal{Q}_\omega(u) - \mathcal{Q}_\omega(u)) - \mathcal{Q}_\omega(\nabla_\omega u)\right\|_{B^2} = 0,$$

donc que $\mathcal{Q}_\omega(u) \in B^{1,2}(\mathbb{H})$ et $\nabla\mathcal{Q}_\omega(u) = \mathcal{Q}_\omega(\nabla_\omega u)$. Comme $B^{1,2}_\omega(\mathbb{H}) = B^{1,2}(\mathbb{H}) \cap B^2_\omega(\mathbb{H})$, la première étape est démontrée. Réciproquement, soit $f \in B^{1,2}_\omega(\mathbb{H})$. Il existe u et v dans $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ tels que $\mathcal{Q}_\omega(u) = f$ et $\mathcal{Q}_\omega(v) = \nabla f$. Reprenant un calcul précédant, on a :

$$\|t^{-1}(\tau_{t\omega} u - u) - v\| = \left\|\mathcal{Q}_\omega\left(t^{-1}(\tau_{t\omega} u - u) - v\right)\right\|_{B^2} =$$

$$\left\|t^{-1}(\tau_{t\omega}\mathcal{Q}_\omega(u) - \mathcal{Q}_\omega(u)) - \mathcal{Q}_\omega(v)\right\|_{B^2} = \left\|t^{-1}(\tau_t f - f) - \nabla f\right\|_{B^2}.$$

Mais lorsque $t \to 0$, le dernier terme tend vers 0, donc le premier aussi, c'est-à-dire que $v = \nabla_\omega u$, soit $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$. L'égalité $\|u\|_{1,\omega} = \|\mathcal{Q}_\omega(u)\|_{B^{1,2}}$ est alors claire.

Soit $j \geq 2$, et supposons le résultat acquis pour 1 et $j-1$. Prenons tout d'abord $u \in H^j_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$. Alors $u \in H^{j-1}_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ et $\nabla^{j-1}_\omega u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{H})$ donc par hypothèse de récurrence, on peut trouver $f \in B^{j-1,2}(\mathbb{H})$ et $g \in B^{1,2}(\mathbb{H})$ tels que $\mathcal{Q}_\omega(\nabla^k_\omega u) = \nabla^k f$ si $k \leq j-1$, et $\mathcal{Q}_\omega(\nabla^l_\omega u) = \nabla^{l-j+1} g$ si $l \in \{j-1, j\}$. Prenant $k = j-1$ et $l = 0$, on voit que $\nabla^{j-1} f = g$, donc finalement $f \in B^{j,2}(\mathbb{H})$, et $\mathcal{Q}_\omega(\nabla^j_\omega u) = \nabla^j(\mathcal{Q}_\omega(u))$. Le sens réciproque se démontre de la même manière.■

3.3 Le cas des fonctions quasi-périodiques à paramètres

Soit X un espace de Banach et P une partie de X compacte ou dénombrable à l'infini.

3.3.1 Le cas P compact

On commence par un lemme :

Lemme 3.3.1.1 *L'application $\Lambda_K : C^0(\mathbb{T}^m \times K, \mathbb{E}) \to C^0(\mathbb{T}^m, C^0(K, \mathbb{E}))$ définie par :*

$$\Lambda_K(u) := [x \longmapsto u(x, .)]$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach.

Preuve. Existence de Λ_K.
Soit $u \in C^0(\mathbb{T}^m \times K, \mathbb{E})$. Il est uniformément continu, donc continu, et donc $u(x, .) \in C^0(K, \mathbb{E})$ pour tout $x \in \mathbb{T}^m$. De plus, comme u est uniformément continue, étant donné $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta > 0, \quad [\max\{|x - x'|; |\alpha - \alpha'|\} \leq \eta] \Longrightarrow |u(x, \alpha) - u(x', \alpha')|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon$$

et en prenant $\alpha' = \alpha$, puis en passant au sup sur α, il vient :

$$(|x - x'| \leq \eta) \Longrightarrow \|u(x, .) - u(x', .)\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\Lambda_K(f) \in C^0(\mathbb{T}^m, C^0(K, \mathbb{E}))$, et Λ_K est bien défini.
Λ_K est linéaire et isométrique (donc injective et continue).
Ces deux points sont évidents.
Λ_K est surjective (donc bijective, et donc bicontinue puisque isométrique).
Soit $\lambda \in C^0(\mathbb{T}^m, C^0(K, \mathbb{E}))$. Pour alléger l'écriture, on note λ_t au lieu de $\lambda(t)$, et c'est alors un élément de $C^0(K, \mathbb{E})$. Le candidat naturel à vérifier $\Lambda_K(u) = \lambda$ est $u(x, \alpha) := \lambda_x(\alpha)$. Il y a juste à vérifier que l'on a bien un élément de $C^0(\mathbb{T}^m \times K, \mathbb{E})$. Fixons $(x_0, \alpha_0) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{K}$. On a :

$$|u(x, \alpha) - u(x_0, \alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq |u(x, \alpha) - u(x_0, \alpha)|_{\mathbb{E}} + |u(x_0, \alpha) - u(x_0, \alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq$$

$$\|\lambda_t - \lambda_{t_0}\|_{C^0(K,\mathbb{E})} + |\lambda_{t_0}(\alpha) - \lambda_{t_0}(\alpha_0)|_{\mathbb{E}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ est continue :

$$\exists \delta, \quad (|x - x_0| \leq \delta) \Longrightarrow (\|\lambda_x - \lambda_{x_0}\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon/2)$$

et comme λ_{x_0} est continue :

$$\exists \delta', \quad (|\alpha - \alpha_0| \leq \delta') \Longrightarrow (|\lambda_{x_0}(\alpha) - \lambda_{x_0}(\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon/2).$$

Finalement, pour $(x, \alpha) \in \mathbb{T}^m \times K$ suffisamment voisin de (x_0, α_0), on a $|u(x, \alpha) - u(x_0, \alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon$, d'où la continuité.■

On en arrive au résultat principal :

Théorème 3.3.1.2 *L'application $\Psi_K : C^0(\mathbb{T}^m \times K, \mathbb{E}) \to QPU_\omega(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ définie par :*

$$\forall \alpha \in K, \quad \Psi_K(u(., \alpha)) := (\mathcal{Q}_\omega u)(., \alpha)$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach.

Preuve. On peut décomposer Ψ_K sous la forme :

$$\Psi_K = \Phi_K^{-1} \circ \mathcal{Q}_\omega \circ \Lambda_K$$

où $\mathcal{Q}_\omega$ applique $C^0(\mathbb{T}^m, C^0(K, \mathbb{E}))$ dans $QP^0_\omega(C^0(K, \mathbb{E}))$. A l'aide du lemme précédent, du théorème 3.1.0.5 et de la proposition 1.2.4.3, on sait que chacun des trois termes de la composition est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach. Il en est donc de même pour Ψ_K.■

3.3.2 Le cas P dénombrable à l'infini

Comme avant, on étend la proposition précédente :

Proposition 3.3.2.1 *L'application $\Psi_P : C^0(\mathbb{T}^m \times P, \mathbb{E}) \to QPU_\omega(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ définie par :*

$$\forall \alpha \in P, \quad \Psi_P(u(., \alpha)) = (\mathcal{Q}_\omega u)(., \alpha)$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Fréchet.

On donne maintenant une version différentiable par rapport au paramètre. Pour cela, introduisons :

- $C^{0,j}(\mathbb{T}^m \times P, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions $u \in C^0(\mathbb{T}^m \times P, \mathbb{E})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{T}^m$, $u(x, .) \in C^j(P, \mathbb{E})$ et pour tout $k \leq j$, $\partial_2^k u \in C^0(\mathbb{T}^m \times P, \mathbb{E})$.
- $QPU^{0,j}_\omega(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions $f \in QPU_\omega(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t, .) \in C^j(P, \mathbb{E})$ et pour tout $k \leq j$, $\partial_2^k f \in QPU_\omega(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$.

Lemme 3.3.2.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\partial_2 u$ existe et est un élément de $C^0(\mathbb{T}^m \times P, \mathbb{E})$.*
2. *$\partial_2 f$ existe et est un élément de $QPU_\omega(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$.*

De plus, si ces assertions sont vraies, on a :

$$\Psi_P(\partial_2 u) = \partial_2 f.$$

Preuve.
Démontrons l'implication [1. $\Rightarrow$ 2.].
Par hypothèse, étant donné $\alpha \in P$ fixé, on a pour tout h rentrant dans P assez petit :

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{u(., \alpha + th) - u(., \alpha)}{t} - \partial_2(., \alpha).h \right) = 0.$$

Comme Ψ_P est linéaire continue et que $\Psi_P(u) = f$, en appliquant Ψ_P et en intervertissant la limite et cet opérateur, on obtient :

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(.,\alpha+th)-f(.,\alpha)}{t} - \Psi_P(\partial_2(.,\alpha).h)\right) = 0$$

ce qui montre que $\partial_2 f$ existe et que de plus :

$$\partial_2 f = \Psi_P(\partial_2 u)$$

et cette égalité montre au passage que $\partial_2 f \in QPU_\omega(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$.
Le sens réciproque est analogue (Ψ_P^{-1} est aussi un opérateur linéaire continu).■
Démonstration de la proposition 3.3.2.1.
A $u \in C^{0,j}(\mathbb{T}^m \times P, \mathbb{E})$, on associe $f = \Psi_P(u)$.
Pour tout $k \leq j$, $\partial_2^k u \in C^{0,j}(\mathbb{T}^m \times P, \mathbb{E})$, donc par une application répétée du lemme, on voit que $QPU_\omega^{0,j}(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ et que :

$$\Psi_K(\partial_2^k u) = \partial_2^k f.$$

On en déduit que l'application

$$\Psi_P^j : C^{0,j}(\mathbb{R}, P, \mathbb{E}) \longrightarrow QPU_\omega^{0,j}(\mathbb{T}^m \times P; \mathbb{E})$$

$$u \longmapsto \Psi_P(u)$$

est bien définie. Elle est visiblement linéaire et isométrique. Elle est surjective puisque Ψ_P l'est, et en raison du résultat du lemme.■

Remarque 3.3.2.3 *En plus d'une version à paramètre du théorème 3.1.0.5, cet énoncé a l'avantage de mettre en valeur la raison de la définition des fonctions quasi-périodiques à paramètres pour que l'opérateur de Nemytskii envoie bien $QP_\omega^0(\mathbb{E})$ dans lui-même.*
En effet, en lecture sur le tore, pour assurer que $\mathcal{N}_u(C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})) \subset C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$, il est naturel de supposer que $u \in C^0(\mathbb{T}^m \times P, \mathbb{E})$, et la définition proposée pour les fonctions quasi-périodiques à paramètres revêt bien, en un certain sens, un caractère minimal.

Chapitre 4

Equations quasi-périodiques et équations de Percival

Dans ce chapitre, on utilise pleinement les liens explicites pour transformer la recherche des solutions q.p. d'une EDO en la recherche des solutions périodiques en chaque variable d'une EDP. Ceci a été fait pour la première fois par Percival de façon purement heuristique. On définit des notions de solutions faibles (comme dans le cadre usuel) et des notions de solutions variationnelles faibles (qui sont *a priori* plus faibles que les premières). Dans l'un des cas, ces notions sont identiques alors que dans l'autre elles sont distinctes. Grâce à une ré-écriture du problème et à la méthode de Newton, on obtient des théorèmes d'existence de solutions variationnelles faibles dans chacun des deux cadres. On montre enfin comment, à partir d'une solution faible, obtenir un ensemble dense de solutions régulières de problèmes perturbés de façons particulières, puis lorsque la solution faible est L^∞, on démontre qu'elle est elle-même régulière.

4.1 Le principe

Soit p un entier au moins égal à 1, $F \in QPU_\omega(\mathbb{R}, (\mathbb{R}^N)^{1+p}, \mathbb{R}^N)$.

Par la bijection $\Psi^{-1}_{\mathbb{R}^{N(1+p)}}$ de la proposition 3.3.2.1, on définit $X \in C^0(\mathbb{T}^m \times (\mathbb{R}^N)^{p+1}, \mathbb{R}^N)$ vérifiant :

$$\forall (t, \alpha) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N)^p, \quad X(t\omega, \alpha) = F(t, \alpha).$$

On fera dans tout ce chapitre l'hypothèse **(H0)** suivante :

(H0) pour tout t fixé, la fonction $F(t, \cdot)$ est deux fois continûment dérivable, et les $\partial^k_{ij} F$ sont des éléments bornés de $QPU_\omega(\mathbb{R}, (\mathbb{R}^N)^{p+1}, \mathbb{R}^N)$ pour tous $2 \leq i, j \leq N$ et $k \in \mathbb{N}_2$.

De manière, plus courte, on suppose que $F \in QPU^{0,2}_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{(1+p)N}, \mathbb{R}^N)$, et que toutes les dérivées sont bornées. Compte tenu de la proposition 3.3.2.1, cette hypothèse revient à dire sur X que pour tout $x \in \mathbb{T}^m$, $X(x,\cdot)$ est deux fois continûment dérivable, et que les $\partial_{ij}^k X$ $(i,j > m+1)$ sont dans $BC^0(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{N(1+p)} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

On est intéressé par la recherche de solutions q quasi-périodiques de l'équation :

$$q^{(p+1)}(t) = F(t, q(t), ..., q^{(p)}(t)) \tag{4.1}$$

ce que l'on va faire via la recherche de fonctions u définies sur le tore solutions de :

$$\partial_\omega^{p+1} u(x) = X(x, u(x), ..., \partial_\omega^p u(x)). \tag{4.2}$$

Précisons maintenant une notion de solution faible pour chaque équation.

Définitions 4.1.0.4 **1.** *On appelle solution faible de (4.1) toute $q \in B_\omega^{p+1,2}(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie :*

$$\nabla^{p+1} q \sim_2 F(., q, ..., \nabla^p q).$$

2. *On appelle solution faible de (4.2) toute $u \in H_\omega^{p+1}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ qui vérifie au sens des distributions sur le tore :*

$$\partial_\omega^{p+1} u = X(., u, ..., \partial_\omega^p u).$$

La correspondance entre solutions faibles est la suivante :

Proposition 4.1.0.5 *Soit u une solution faible de (4.2). Alors $\mathcal{Q}_\omega(u)$ est solution faible de (4.1). Réciproquement, soit q une solution faible de (4.1). Alors $\mathcal{Q}_\omega^{-1}(u)$ est une solution faible de (4.2).*

Démonstration.
Soit u une solution faible de (4.2). On a alors $u \in H_\omega^{p+1}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ donc $q := \mathcal{Q}_\omega(u) \in B_\omega^{p+1,2}(\mathbb{R}^N)$ et de plus u vérifie :

$$\partial_\omega^{p+1} u = X(., u, ..., \partial_\omega^p u).$$

Appliquons $\mathcal{Q}_\omega$ à cette équation. Le premier membre est égal à $\nabla^{p+1} q$, quant au premier, nous allons démontrer qu'il vaut $F(., q, ..., \nabla^p q)$.
Soit en effet une suite $(u_n)_n$ de fonctions C^p tendant vers u dans $H_\omega^p(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, et posons $q_n := \mathcal{Q}_\omega(u_n)$. Dans $H_\omega^p(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, $(q_n)_n$ tend vers q. De plus, q_n vérifie notoirement :

$$\mathcal{Q}_\omega \left(X(., u_n, \partial_\omega^p u_n) \right) = F(., q_n, ..., \nabla^p q_n).$$

Passant à la limite à l'aide de la continuité des opérateurs de Nemytskii, on a bien :

$$\mathcal{Q}_\omega \left(X(., u, ..., \partial_\omega^p u) \right) = F(., q, ..., \nabla^p q)$$

ce qui montre que q est une solution faible de (4.1). Le sens réciproque se démontre de la même manière.■

4.2 Notion de solution variationnelle faible

Dans toute cette section, nous supposerons que $p = 1$.

4.2.1 Solution $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelle faible

Définition 4.2.1.1 *On dit que $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ est une solution $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelle faible de (4.2) si :*

$$\forall v \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N), \quad \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + X(., u, \partial_\omega u) \cdot v = 0.$$

L'intérêt de cette notion est que nous obtiendrons facilement des théorèmes d'existence de telles solutions, et qu'elles sont reliées aux solutions faibles de (4.2) :

Proposition 4.2.1.2 *Soit u une solution $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelle faible de (4.2). Alors $u \in H^2_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ et est une solution faible de (4.2).*

Démonstration. On a pour tout $v \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$:

$$\int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + X(., u, \partial_\omega u) \cdot v = 0.$$

Comme $C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N) \subset H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, on en déduit que :

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N), \quad \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega \varphi + X(., u, \partial_\omega u) \cdot \varphi = 0.$$

Au sens des distributions périodiques, les termes de bords se simplifient, par conséquent on a :

$$\int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega \varphi = - < \partial^2_\omega u; \varphi >,$$

il vient, au sens des distributions périodiques :

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N), \quad < -\partial^2_\omega u + X(., u, \partial_\omega u); \varphi >= 0$$

d'où l'égalité suivante dans $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$:

$$\partial^2_\omega u = X(., u, \partial_\omega u).$$

Mais comme u et $\partial_\omega u$ sont dans $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, le membre de droite est dans $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ et l'égalité est vraie dans $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$.

Cela signifie bien que $u \in H^2_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ et que u est une solution faible de (4.2).$\blacksquare$

4.2.2 Solution $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$ variationnelle faible

Similairement, on va étudier le cas des solutions $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$ variationnelle faibles.

Définition 4.2.2.1 *On dit que $u \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$ est une solution $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$ variationnelle faible de (4.2) si :*

$$\forall v \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N), \qquad \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + X(.,u,\partial_\omega u)\cdot v = 0.$$

Ici en revanche, on ne peut pas dire qu'une telle solution est une solution faible de (4.2).

Un contre-exemple
Prenons le cas particulier de l'équation $\ddot{q}(t) = 1$ ($m = 1$), qui évidemment n'a pas de solution périodique (forte). Cherchons en les solutions $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ variationnelles faibles.
Prenons pour normalisation $\omega = 1$. Il s'agit de trouver $u \in H^1(]-\pi,\pi[,\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall v \in H^1_0(]-\pi,\pi[,\mathbb{R}), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \dot{u}\dot{v} + v = 0$$

et

$$u(-\pi) = u(\pi) = 0.$$

Un calcul montre que u est la fonction 2π-périodique telle que :

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \quad u(x) = \frac{x^2-\pi^2}{2}.$$

On voit que u n'est pas dans $H^2(\mathbb{T},\mathbb{R})$, car sa dérivée seconde au sens des distributions est :

$$\ddot{u} = 1 - 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}$$

qui n'est pas dans $L^2(\mathbb{T},\mathbb{R})$. On peut retrouver ces résultats à l'aide du développement en série de Fourier de u, qui est :

$$-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx).$$

Notons qu'en dimension 1,

$$H^1(]-\pi,\pi[,\mathbb{R}) = H^1_0(]-\pi,\pi[,\mathbb{R}) \oplus \{1\}$$

de sorte que s'il existait une solution $H^1(]-\pi,\pi[,\mathbb{R})$ variationnelle faible, notée u, en prenant pour v la fonction constante 1 dans l'équation variationnelle, on aurait $\int_{-\pi}^{\pi} dt = 0$, ce qui est une contradiction notoire !■

En fait, l'obstacle à la démonstration précédente dans ce cadre est que les fonctions régulières incluses dans $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ sont les éléments de $C_0^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, et ne forment pas un espace de fonctions tests pour les distributions périodiques. On peut toutefois énoncer :

Proposition 4.2.2.2 *Soit u une solution $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelle faible qui vérifie aussi :*

$$\forall v \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)^\perp, \qquad \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + X(., u, \partial_\omega u) \cdot v = 0.$$

Alors u est une solution faible de (4.2).

L'argument est que l'équation variationnelle est encore vraie sur tout $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ donc la démonstration précédente marche encore.

4.3 Théorème d'existence de solutions variationnelles faibles

4.3.1 Préliminaires

On commence par un énoncé sur la méthode de Newton-Kantorovitch pour des fonctions Gâteaux-dérivables (énoncé et démonstration adaptés de [38]). L'énoncé proposé a nullement la prétention d'être minimal.

Théorème 4.3.1.1 *Soit E, F deux espaces de Banach, $f : E \to F$ continue et Gâteaux-dérivable telle que $D_G f(x)$ soit inversible pour tout $x \in E$. On suppose qu'existent $x_0 \in E, \beta \in]0,1[, r > 0$ tels que, si $B := \overline{B_E(x_0, r)}$, on ait :*

1. *pour tout $x \in B$* $\qquad \|D_G f(x)^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)} \leq M.$
2. $\sup_{(x,x') \in B^2} \|D_G f(x) - D_G f(x')\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\beta}{M}.$
3. $|f(x_0)|_F \leq \frac{r(1-\beta)}{M}.$

Alors la suite récurrente $(x_n)_n$ issue de x_0 définie par :

$$x_{n+1} = x_n - D_G f(x_n)^{-1} f(x_n)$$

converge(au moins) géométriquement au taux β vers l'unique racine de f dans B.

Preuve. *Première étape :* on démontre par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$:

(1_k) $\qquad |x_k - x_{k-1}|_E \leq |f(x_{k-1})|_F.$

(2_k) $\qquad |x_k - x_0|_E \leq r$ (*i.e.* $x_k \in B$).

(3_k) $\qquad |f(x_k)|_F \leq \frac{\beta}{M}|x_k - x_{k-1}|_E.$

pour $k = 1$ **:** $x_1 - x_0 = -D_G f(x_0)^{-1} f(x_0)$ d'où (1_1) en utilisant (**1.**).
A l'aide de (**3.**), on a alors : $|x_1 - x_0|_E \leq r(1-\beta) \leq r$ d'où (2_1).
Par définition de x_1, on a :

$$|f(x_1)|_F = |f(x_1) - f(x_0) - D_G f(x_0)(x_1 - x_0)|_F \leq$$

$$\sup_{\xi \in [x_0;x_1]} |D_G f(\xi) - D_G f(x_0)|_{\mathcal{L}(E,F)} |x_1 - x_0|_E \leq \frac{\beta}{M}|x_1 - x_0|_E$$

d'où (3_1).
supposons les énoncés vrais jusqu'à $k-1$
$x_k - x_{k-1} = -D_G f(x_{k-1})^{-1} f(x_{k-1})$ d'où (1_k) en utilisant (**1.**).
Al'aide de (3_{k-1}), on a alors : $|x_k - x_{k-1}|_E \leq \beta |x_{k-1} - x_{k-2}|_E$.
Par récurrence, on a donc pour tout $j \leq k$, $|x_j - x_{j-1}|_E \leq \beta^{j-1}|x_1 - x_0|_E$, puis par l'inégalité triangulaire :

$$|x_k - x_0|_E \leq \sum_{j=1}^{k-1} |x_j - x_{j-1}|_E \leq \sum_{j=1}^{k-1} \beta^{j-1}|x_1 - x_0|_E \leq \frac{1}{1-\beta} r(1-\beta) \leq r$$

d'où l'assertion (2_k).
Par définition de x_k, on a :

$$|f(x_k)|_F = |f(x_k) - f(x_{k-1}) - D_G f(x_k)(x_k - x_{k-1})|_F \leq$$

$$\sup_{\xi \in [x_{k-1};x_k]} |D_G f(\xi) - D_G f(x_{k-1})|_{\mathcal{L}(E,F)} |x_k - x_{k-1}|_E \leq \frac{\beta}{M}|x_k - x_{k-1}|_E$$

d'où (3_k). La première étape est donc achevée.

Seconde étape : conclusion. En reprenant le résultat d'un calcul déjà vu, on a pour tout entier n :

$$|x_{n+1} - x_n|_E \leq \beta^n |x_1 - x_0|_E.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on aboutit donc à la majoration :

$$|x_{n+p} - x_n|_E \leq \beta^n \frac{1-\beta^p}{1-\beta}|x_1 - x_0|_E \leq \beta^n \frac{1}{1-\beta}|x_1 - x_0|_E.$$

La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy à valeurs dans B qui est complète (fermée d'un complet), elle a donc une limite $a \in B$. Passant à la limite dans (3_k), par

continuité de f, on a $f(a) = 0$.
Il reste à montrer l'unicité de la racine. Soit $b \in B$ tel que $f(b) = 0$. On a :

$$|b - a|_E \leq \left| D_G f(x_0)^{-1} . [f(b) - f(a) - D_G f(x_0)(b - a)] \right|_E$$

$$\leq M \frac{\beta}{M} |b - a|_E \leq \beta |b - a|_E$$

donc $b = a$. ■

Etant donnée une matrice carrée d'ordre N, $A = (a_{ij})_{ij}$, on définit :

- $A \geq_2 B$ (ou $A \geq B$) si pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a $x^T(A - B)x \geq 0$.
- $\|A\|_2 := \sup\limits_{|x|=1} |x^T A x|$.
- $A \geq_\infty B$ si pour tout i, j, on a $a_{ij} \geq b_{ij}$.
- $\|A\|_\infty := \max\limits_{(i,j)} |a_{ij}|$.

Identifiant $\partial_2 X$ et $\partial_3 X$ à des matrices au moyen de la base canonique de $\mathbb{R}^N$, on pose alors :

- $m_2 := \sup\{\mu \in \mathbb{R} \;\; : \;\; \forall (x, u, v) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\ \partial_2 X(x, u, v) \geq_2 \mu I_N\}$
- $M_{1,2} := \sup_{(x,u,v) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \|\partial_2 X(x, u, v)\|_\infty$.
- $M_{1,3} := \sup_{(x,u,v) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \|\partial_3 X(x, u, v)\|_\infty$.

4.3.2 Existence de solutions $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelles faibles

Fixons une fonction $B \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$. Pour des raisons de méthode qui apparaîtront plus tard, on cherche à résoudre l'équation variationnelle faible avec X_B tel que :

$$\forall (x, u, v) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \qquad X_B(x, u, v) := X(x, u, v) + B(x)$$

au lieu de X.

Définissons l'opérateur $\Phi_B : H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N) \to \left(H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)\right)'$ par :

$$\Phi_B(u) := \left[v \longmapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + (X(., u, \partial_\omega u) + B(.)) \cdot v \right].$$

L'équation à résoudre s'écrit simplement :

$$\Phi_B(u) = 0.$$

On va donc chercher les zéros de notre opérateur. Commençons par un lemme.

Lemme 4.3.2.1 Φ_B *a bien un sens, est continu, deux fois Gâteaux-dérivable, et les expressions des dérivées sont :*

$$D_G\Phi_B(u) \cdot h = \left[v \longmapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega h \cdot \partial_\omega v + (\partial_2 X(., u, \partial_\omega u)h + \partial_3 X(., u, \partial_\omega u)\partial_\omega h) \cdot v \right]$$

et

$$D_G^2\Phi_B(u) \cdot (h, k) = \left[v \longmapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega h \cdot \partial_\omega k + \left(D^2 X(., u, \partial_\omega u)(h, k)\right) \cdot v \right]$$

où l'on a posé pour simplifier :

$$D^2X(., u, \partial_\omega u)(h, k) := \partial_{22}^2 X(., u, \partial_\omega u)(h, k) + \partial_{23}^2 X(., u, \partial_\omega u)(h, \partial_\omega k) +$$

$$\partial_{32}^2 X(., u, \partial_\omega u)(\partial_\omega h, k) + \partial_{33}^2 X(., u, \partial_\omega u)(\partial_\omega h, \partial_\omega k).$$

Démonstration. Démontrons en premier que Φ_B est bien défini. $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ étant fixé, $X(., u, \partial_\omega u) \in L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ donc l'intégrale définissant $\Phi_B(u)$ a un sens. De plus, l'application $v \mapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + X(., u, \partial_\omega u) \cdot v$ est linéaire, continue puisque :

$$\left| \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + X(., u, \partial_\omega u) \cdot v \right| \leq$$

$$\|\partial_\omega u\|.\|\partial_\omega v\| + \|X(., u, \partial_\omega u)\|.\|v\| \leq \max\{\|\partial_\omega u\|; \|X(., u, \partial_\omega u)\|\}\|v\|_{1,\omega}$$

donc Φ_B est bien défini.

Démontrons maintenant que Φ_B est continu. Φ_B est la somme de l'application $u \mapsto [v \mapsto b(u, v)]$ avec :

$$b(u, v) := \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + B(.) \cdot v$$

qui est bilinéaire continue, et de :

$$n(u) := [v \mapsto \int_{\mathbb{T}^m} X(., u, \partial_\omega u) \cdot v]$$

qui est continue par continuité du Nemytskii. En effet, l'application $u \mapsto X(., u, \partial_\omega u)$ est continue de $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ vers $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ par continuité du Nemytskii, puis on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski :

$$|n(u_2) - n(u_1)| \leq \sup_{\|v\|_{1,\omega}=1} \int_{\mathbb{T}^m} |X(., u_2, \partial_\omega u_2) - X(., u_1, \partial_\omega u_1)| \quad |v| \leq$$

$$\left(\int_{\mathbb{T}^m} |X(.,u_2,\partial_\omega u_2) - X(.,u_1,\partial_\omega u_1)|^2\right)^{1/2}.$$

Passons à sa Gâteaux-dérivabilité. Fixons $u \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$.
Notons β_u la forme bilinéaire :

$$\beta_u(h,v) := \left[v \longmapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega h \cdot \partial_\omega v + (\partial_2 X(.,u,\partial_\omega u)h + \partial_3 X(.,u,\partial_\omega u)\partial_\omega h) \cdot v\right].$$

β_u est visiblement une forme bilinéaire continue, car :

$$|\beta_u(h,v)| \leq \|\partial_\omega h\|.\|\partial_\omega v\| + \max\{M_{1,2}; M_{1,3}\}\|h\|_{1,\omega}\|v\|$$

d'où :

$$|\beta_u(h,v)| \leq \max\{1; M_{1,2}; M_{1,3}\}\|h\|_{1,\omega}\|v\|_{1,\omega}$$

et le majorant $\max\{1; M_{1,2}; M_{1,3}\}$ pour la norme de β_u.

La proposition énonce que $D_G\Phi_B(u) \cdot h = \beta_u(h,.)$. Comme β_u est continue, $h \mapsto \beta_u(h,.)$ est continue, il suffit donc de montrer que $\beta_u(h,.)$ est la dérivée directionnelle de Φ_B en u dans la direction h. Formons alors, pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\phi(t) := \left\|\frac{\Phi_B(u+th) - \Phi_B(u)}{t} - \beta_u(h,.)\right\|_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)'}.$$

On a :

$$\phi(t) = \sup_{\|v\|_{1,\omega}=1}\left|\frac{\Phi_B(u+th)(v) - \Phi_B(u)(v)}{t} - \beta_u(h,v)\right|$$

que l'on peut majorer par Cauchy-Schwarz :

$$\phi(t)^2 \leq$$

$$\int_{\mathbb{T}^m}\left[\frac{X(.,u+th,\partial_\omega u + t\partial_\omega h) - X(.,u,\partial_\omega u)}{t} - \partial_2 X(.,u,\partial_\omega u).h - \partial_3 X(.,u,\partial_\omega u).\partial_\omega h\right]^2.$$

Quand $t \to 0$, l'intégrande converge simplement (donc presque-partout) vers 0. Par ailleurs, on a en vertu de l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ et de l'inégalité de la moyenne :

$$\left[\frac{X(.,u+th,\partial_\omega u + t\partial_\omega h) - X(.,u,\partial_\omega u)}{t} - \partial_2 X(.,u,\partial_\omega u).h - \partial_3 X(.,u,\partial_\omega u).\partial_\omega h\right]^2$$

$$\leq 2\left[\sup_{\xi\in[0;1]}\|\partial_2 X(.,u+t\xi h,\partial_\omega u + t\xi\partial_\omega h) - \partial_2 X(.,u,\partial_\omega u)\|^2_\infty |h|^2 + \right.$$

$$\left. + \sup_{\xi\in[0;1]}\|\partial_3 X(.,u+t\xi h,\partial_\omega u + t\xi\partial_\omega h) - \partial_3 X(.,u,\partial_\omega u)\|^2_\infty |\partial_\omega h|^2\right]$$

que l'on peut majorer par :

$$8\left(M_{1,2}|h|^2 + M_{1,3}|\partial_\omega h|^2\right) \in L^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}).$$

Le théorème de Lebesgue permet de conclure. Les arguments pour la Gâteaux-seconde différentiabilité sont les mêmes.■

Remarque 4.3.2.2 *L'application Φ_B n'est pas nécessairement Fréchet-dérivable, comme va le montrer l'exemple suivant. Par conséquent, notre méthode ne relève pas du théorème des fonctions implicites.*

Exemple 4.3.2.3 (Exemple d'opérateur Φ_B non Fréchet-dérivable.) *Soit $\varphi \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = x$ sur [0,1]. On pose $B := 0$ et :*

$$X(x, u, v) := \int_0^u \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$h_n(x) := \left(\prod_{j=1}^m \sin\left(\frac{x_j - \pi}{2}\right)\right)^{2n}.$$

Alors $h_n \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, tend vers 0 dans $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, mais :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|\Phi_B(h_n) - \Phi_B(0) - D_G\Phi_B(0).h_n\|_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)'}}{\|h_n\|_{1,\omega}} \in \mathbb{R}^+_*.$$

Rappelons en premier que lorsque $\alpha \to +\infty$,

$$W_\alpha := \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|^\alpha dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}.$$

On a

$$\|h_n\|^2 = \int_{\mathbb{T}^m} \prod_{j=1}^m \sin^{4n}\left(\frac{x_j - \pi}{2}\right) dx = W^m_{4n}$$

et

$$\|\partial_\omega h_n\|^2 =$$

$$\int_{\mathbb{T}^m} \left[\sum_{i=1}^m \omega_i n \sin^{2(2n-1)}\left(\frac{x_i - \pi}{2}\right) . \cos^2\left(\frac{x_i - \pi}{2}\right) \prod_{j\neq i} \sin^{4n}\left(\frac{x_j - \pi}{2}\right)\right] dx + 2\int_{\mathbb{T}^m}$$

$$\left[\sum_{1\leq i<j\leq m} n^2\omega_i\omega_j \sin^{4n-1}\left(\frac{x_i - \pi}{2}\right) . \cos\left(\frac{x_i - \pi}{2}\right) \sin^{4n-1}\left(\frac{x_j - \pi}{2}\right) \cos\left(\frac{x_j - \pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.\prod_{k\notin\{i,j\}} \sin^{4n}\left(\frac{x_k - \pi}{2}\right)\right] dx.$$

Par imparité, la seconde intégrale est nulle. La première intégrale vaut :

$$n^2 W_{4n}^{m-1} |\omega|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2(2n-1)}\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right).\cos^2\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right) d\theta = 2n^2 W_{4n}^{m-1} \frac{\Gamma(2n-1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(2n+1)}$$

Compte tenu de $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ et de l'équivalent de la fonction Γ en $+\infty$, on a l'équivalent, lorsque $n \to +\infty$:

$$\|h_n\|_{1,\omega}^2 \sim \frac{C}{n^{m/2}}$$

où $C = \pi^{m/2}\left(1 + \frac{|\omega|^2}{2\sqrt{2}}\right) > 0$.

On calcule :

$$\|\Phi_B(h_n) - \Phi_B(0) - D_G\Phi_B(0).h_n\|_{H_\omega^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)'}^2 = \sup_{\|v\|_{1,\omega}=1} \left| \int_{\mathbb{T}^m} (h_n^2/2 - h_n)v \right|^2 =$$

$$\|h_n^2/2 - h_n\|^2.$$

Mais ce terme vaut :

$$\int_{\mathbb{T}^m} h_n^4/4 - h_n^3 + h_n^2 = W_{8n}^m - W_{6n}^m + W_{4n}^m \sim \frac{C'}{n^{m/2}}$$

où $C' = (2\sqrt{\pi})^m(\frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{3^{m/2}} + \frac{1}{2^{m/2}}) > 0$. On a ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|\Phi_B(h_n) - \Phi_B(0) - D_G\Phi_B(0).h_n\|_{H_\omega^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)'}}{\|h_n\|_{1,\omega}} = \sqrt{\frac{C'}{C}} \in \mathbb{R}_*^+.\blacksquare$$

On suppose désormais dans cette section l'hypothèse suivante vérifiée :

(H1) $\quad m_2 > \frac{M_{1,3}}{4}$.

Proposition 4.3.2.4 *$D_G\Phi_B(u)$ est inversible, et il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\forall u \in H_\omega^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N), \quad \|D_G\Phi_B(u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_\omega^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)';H_\omega^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N))} \leq M.$$

Démonstration. Soit u fixé, $\Lambda \in H_\omega^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)'$, et cherchons à résoudre l'équation d'inconnue h :

$$D_G\Phi_B(u).h = \Lambda.$$

Cette équation s'écrit :

$$\forall v \in H_\omega^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N), \quad \beta_u(h,v) = \Lambda(v).$$

Λ étant linéaire continue, et β_u étant bilinéaire continue, on peut utiliser le lemme de Lax-Milgram, dès que β_u est elliptique. Mais on a :

$$\beta_u(v,v) = \int_{\mathbb{T}^m} \left[|\partial_\omega v|^2 + v^T(\partial_2 X)v + v^T(\partial_2 X)\partial_\omega v \right] \geq$$

$$\|\partial_\omega v\|^2 + m_2\|v\|^2 - M_{1,3}\|v\|.\|\partial_\omega v\|.$$

Cherchons s'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que :

$$\forall v \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N), \quad \beta_u(v,v) \geq \alpha\|v\|^2_{1,\omega}.$$

Il suffit pour cela que :

$$\forall v \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N), \ \ \|\partial_\omega v\|^2 + m_2\|v\|^2 - M_{1,3}\|v\|.\|\partial_\omega v\| \geq \alpha\|v\|^2_{1,\omega}$$

ce qui sécrit :

$$\forall v \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N), \ \ (1-\alpha)\|\partial_\omega v\|^2 + (m_2 - \alpha)\|v\|^2 - M_{1,3}\|v\|.\|\partial_\omega v\| \geq 0$$

Pour que ce dernier terme soit positif pour toute $v \in H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, il suffit que l'on ait :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (1-\alpha)t^2 - M_{1,3}t + (m_2 - \alpha) \geq 0.$$

Sur $\mathbb{R}$, ce trinôme prend sa valeur minimale en $t^* = \frac{M_{1,3}}{2(1-\alpha)} > 0$, et celle-ci vaut :

$$(m_2 - \alpha) - \frac{M^2_{1,3}}{4(1-\alpha)}.$$

Celle-ci est strictement positive si $\alpha = 0$ en vertu de **(H1)** donc le reste sur un voisinage, d'où l'ellipticité de la forme bilinéaire. Le coefficient "optimal" d'ellipticité est :

$$\alpha^* := \frac{m_2 + 1 - \sqrt{(m_2-1)^2 + M^2_{1,3}}}{2}.$$

L'inversibilité de $D_G\Phi_B(u)$ est donc acquise.

Passons à l'existence de M. Soit h_Λ tel que :

$$D_G\Phi_B(u).h_\Lambda = \Lambda$$

et estimons sa norme en fonction de celle de Λ.
Appliquant l'égalité de définition de h_Λ en h_Λ, on a :

$$\beta_u(h_\Lambda, h_\Lambda) = \Lambda(h_\Lambda).$$

Mais

$$\Lambda(h_\Lambda) \leq \|\Lambda\|_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)'}\|h_\Lambda\|_{1,\omega}$$

et par l'ellipticité de β_u :

$$\beta_u(h_\Lambda, h_\Lambda) \geq \alpha^* \|h_\Lambda\|^2_{1,\omega}.$$

Finalement, ceci donne :

$$\|h_\Lambda\|_{1,\omega} \leq \frac{1}{\alpha^*} \|\Lambda\|_{H^1_\omega(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)'}$$

et donc on peut prendre $M := 1/\alpha^*$.■
Utilisant la méthode de Newton-Kantorovitch, nous allons démontrer un premier résultat :

Proposition 4.3.2.5 *Soit $B \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ telle que $\Phi_B(u) = 0$ ait une solution. Il existe une constante C indépendante de B telle que pour tout $B' \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ telle que $\|B' - B\| \leq C$, alors $\Phi_{B'}(u) = 0$ a aussi une solution.*

Démonstration. Réalisons les différentes conditions du théorème de Newton-Kantorovitch, en prenant pour x_0 une racine de l'équation $\Phi_B(u) = 0$.

- En vertu de la proposition 4.3.2.4, on peut prendre $M := 1/\alpha^*$ pour assurer la condition **1.** sans hypothèse sur B.
- Désignant par M_2 un majorant de la seconde Gâteaux-dérivée de Φ_B, la seconde condition est satisfaite dès que :

$$(\mathbf{2'}) \quad 2M_2 r \leq \frac{\beta}{M}.$$

- Notant $\phi_0 := \|\Phi_{B'}(x_0)\|$, la troisième condition est satisfaite lorsque :

$$(\mathbf{3'}) \quad \beta \leq 1 - \frac{M\phi_0}{r}.$$

Les conditions **(2')** et **(3')** sont simultanément réalisables si et seulement si :

$$\exists r > 0, \qquad 2MM_2r^2 - r + M\phi_0 \leq 0.$$

L'étude de ce trinôme nous montre que ceci n'est possible que si :

$$\phi_0 \leq C := \frac{(\alpha^*)^2}{8M_2}$$

où cette constante C dépend de X et non de B. Mais :

$$\phi_0 := \Phi_{B'}(x_0) = \sup_{\|v\|_{1,\omega}=1} \left| \int_{\mathbb{T}^m} (B - B')v \right| \leq \|B - B'\|$$

donc il suffit que $\|B - B'\| \leq C$ pour que la méthode converge vers une racine de $\Phi_{B'}$.■
A l'aide de la proposition précédente, on va démontrer :

Théorème 4.3.2.6 *Sous* **(H0)** *et* **(H1)***, l'équation (4.2) admet une solution faible.*

Démonstration. **Première étape.** Démontrons que $\Phi_0(u) = 0$ admet une solution.

Comme $C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, il existe une suite finie $(B_j)_{0\leq j\leq n}$ de fonctions continues telle que $B_0 := -X(., 0, 0)$, $\|B_{j+1} - B_j\| \leq C$ et $B_n = 0$. Soit (E_j) l'équation :

$$(E_j) \qquad \Phi_{B_j}(u) = 0.$$

L'équation (E_0) a la solution triviale 0, et si (E_j) a une solution, alors (E_{j+1}) a une solution en vertu de la proposition précédente.
On en conclut que (E_n) a une solution, ce qu'il fallait démontrer.

Seconde étape. Concluons. La solution de l'équation $\Phi_0(u) = 0$ est une solution $H^1_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelle faible, donc en vertu de la proposition 4.2.1.2, c'est une solution faible de (4.2).■

Exemple (N=1). Considérons l'équation :

$$\ddot{q} + f_1(\dot{q}) + f_2(q) = e$$

avec e p.p., $f_i \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f_i' \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si on a :

$$4 \inf_x f_2'(x) > \sup_x |f_1'(x)|$$

alors l'équation admet une solution faible.

4.3.3 Existence de solutions $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$ variationnelles faibles

Nous allons suivre de très près la section précédente, les arguments étant les mêmes. Le seul changement est dû au fait que l'inégalité de Poincaré-Wirtinger permet d'avoir l'ellipticité de β_u sous une autre hypothèse.

Fixons une fonction $B \in C^0(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$. Comme auparavant, on cherche à résoudre l'équation variationnelle faible avec X_B au lieu de X.

Définissons l'opérateur $\Psi_B : H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N) \to \left(H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)\right)'$ par :

$$\Psi_B(u) := \left[v \longmapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + (X(., u, \partial_\omega u) + B(.)) \cdot v \right].$$

L'équation à résoudre s'écrit simplement :

$$\Psi_B(u) = 0.$$

On va donc chercher les zéros de notre opérateur. Commençons par un lemme.

Lemme 4.3.3.1 Ψ_B *a bien un sens, est continu, deux fois Gâteaux-dérivable, et les expressions des dérivées sont :*

$$D_G\Psi_B(u) \cdot h = \left[v \longmapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega h \cdot \partial_\omega v + (\partial_2 X(.,u,\partial_\omega u)h + \partial_3 X(.,u,\partial_\omega u)\partial_\omega h) \cdot v \right]$$

et

$$D_G^2\Psi_B(u) \cdot (h,k) = \left[v \longmapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega h \cdot \partial_\omega k + \big(D^2 X(.,u,\partial_\omega u)(h,k)\big) \cdot v \right]$$

où l'on a posé pour simplifier :

$$D^2X(.,u,\partial_\omega u)(h,k) := \partial^2_{22}X(.,u,\partial_\omega u)(h,k) + \partial^2_{23}X(.,u,\partial_\omega u)(h,\partial_\omega k) +$$

$$\partial^2_{32}X(.,u,\partial_\omega u)(\partial_\omega h,k) + \partial^2_{33}X(.,u,\partial_\omega u)(\partial_\omega h,\partial_\omega k).$$

Démonstration. Démontrons en premier que Ψ_B est bien défini. $u \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$ étant fixé, $X(.,u,\partial_\omega u) \in L^2(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$ donc l'intégrale définissant $\Psi_B(u)$ a un sens. De plus, l'application $v \mapsto \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + X(.,u,\partial_\omega u)\cdot v$ est linéaire, continue puisque :

$$\left| \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega u \cdot \partial_\omega v + X(.,u,\partial_\omega u) \cdot v \right| \leq$$

$$\|\partial_\omega u\|.\|\partial_\omega v\| + \|X(.,u,\partial_\omega u)\|.\|v\| \leq \max\{\|\partial_\omega u\|;\|X(.,u,\partial_\omega u)\|\}\|v\|_{1,\omega}$$

donc Ψ_B est bien défini. La continuité est identique que pour Φ_B.

Passons à sa Gâteaux-dérivabilité. Fixons $u \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$.
Notons γ_u la forme bilinéaire :

$$\gamma_u(h,v) := \left[v \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^m} \partial_\omega h \cdot \partial_\omega v + (\partial_2 X(.,u,\partial_\omega u)h + \partial_3 X(.,u,\partial_\omega u)\partial_\omega h) \cdot v \right].$$

γ_u est visiblement une forme bilinéaire continue, car :

$$|\gamma_u(h,v)| \leq \|\partial_\omega h\|.\|\partial_\omega v\| + \max\{M_{1,2};M_{1,3}\}\|h\|_{1,\omega}\|v\|$$

d'où :

$$|\gamma_u(h,v)| \leq \left(1 + \frac{M_{1,3}}{\alpha_{PW}} + \frac{M_{1,2}}{\alpha^2_{PW}}\right)\|h\|_{1,\omega,0}\|v\|_{1,\omega,0}$$

et le majorant $\left(1 + \frac{M_{1,3}}{\alpha_{PW}} + \frac{M_{1,2}}{\alpha^2_{PW}}\right)$ pour la norme de γ_u.

La proposition énonce que $D_G\Psi_B(u)\cdot h = \gamma_u(h,.)$. Comme γ_u est continue, $h\mapsto\gamma_u(h,.)$ est continue, il suffit donc de montrer que $\gamma_u(h,.)$ est la dérivée directionnelle de Ψ_B en u dans la direction h. Formons alors, pour $t\in\mathbb{R}^*$:

$$\psi(t) := \left\| \frac{\Psi_B(u+th)-\Psi_B(u)}{t} - \gamma_u(h,.)\right\|_{H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)'}.$$

On a :

$$\psi(t) = \sup_{\|v\|_{1,\omega}=1}\left|\frac{\Psi_B(u+th)(v)-\Psi_B(u)(v)}{t} - \gamma_u(h,v)\right|$$

que l'on peut majorer par Cauchy-Schwarz :

$$\psi(t)^2 \leq$$

$$\int_{\mathbb{T}^m}\left[\frac{X(.,u+th,\partial_\omega u+t\partial_\omega h)-X(.,u,\partial_\omega u)}{t} - \partial_2 X(.,u,\partial_\omega u).h - \partial_3 X(.,u,\partial_\omega u).\partial_\omega h\right]^2.$$

Quand $t\to 0$, l'intégrande converge simplement (donc presque-partout) vers 0. Par ailleurs, on a en vertu de l'inégalité $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ et de l'inégalité de la moyenne :

$$\left[\frac{X(.,u+th,\partial_\omega u+t\partial_\omega h)-X(.,u,\partial_\omega u)}{t} - \partial_2 X(.,u,\partial_\omega u).h - \partial_3 X(.,u,\partial_\omega u).\partial_\omega h\right]^2$$

$$\leq 2\left[\sup_{\xi\in[0;1]}\|\partial_2 X(.,u+t\xi h,\partial_\omega u+t\xi\partial_\omega h)-\partial_2 X(.,u,\partial_\omega u)\|_\infty^2|h|^2+\right.$$

$$\left.+\sup_{\xi\in[0;1]}\|\partial_3 X(.,u+t\xi h,\partial_\omega u+t\xi\partial_\omega h)-\partial_3 X(.,u,\partial_\omega u)\|_\infty^2|\partial_\omega h|^2\right]$$

que l'on peut majorer par :

$$8\left(M_{1,2}|h|^2+M_{1,3}|\partial_\omega h|^2\right)\in L^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}).$$

Le théorème de Lebesgue permet de conclure. Les arguments pour la Gâteaux-seconde différentiabilité sont les mêmes.■

Remarque 4.3.3.2 *L'application Ψ_B n'est pas nécessairement Fréchet-dérivable.*

Soit l'hypothèse :

(H1') $\quad \frac{M_{1,3}}{2} < \alpha_{PW} \quad$ et $\quad m_2 > \alpha_{PW}(M_{1,3}-\alpha_{PW})$.

On suppose désormais dans cette section que l'une des hypothèses **(H1)** ou **(H1')** est vérifiée.

Proposition 4.3.3.3 *$D_G\Psi_B(u)$ est inversible, et il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\forall u \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N), \quad \|D_G\Psi_B(u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)';H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N))} \leq M.$$

Démonstration. On va encore utiliser le lemme de Lax-Milgram, l'existence de M résultant encore une fois de l'ellipticité.
Lorsque l'hypothèse **(H1)** est vérifiée, la démonstration déjà faite est encore valide, on se place donc dans le cadre de l'hypothèse **(H1')**.
Soit u fixé. On a :

$$\gamma_u(v,v) = \int_{\mathbb{T}^m} \left[|\partial_\omega v|^2 + v^T(\partial_2 X)v + v^T(\partial_2 X)\partial_\omega v\right] \geq$$

$$\|\partial_\omega v\|^2 + m_2\|v\|^2 - M_{1,3}\|v\|.\|\partial_\omega v\|.$$

Cherchons s'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que :

$$\forall v \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N), \quad \gamma_u(v,v) \geq \alpha\|v\|^2_{1,\omega,0}.$$

Il suffit pour cela que :

$$\forall v \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N), \quad (1-\alpha)\|\partial_\omega v\|^2 + m_2\|v\|^2 - M_{1,3}\|v\|.\|\partial_\omega v\| \geq 0$$

Pour que ce dernier terme soit positif pour toute $v \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$, il suffit que l'on ait :

$$\forall t \geq \alpha_{PW}, \quad (1-\alpha)t^2 - M_{1,3}t + m_2 \geq 0$$

puisqu'en raison de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$\left(v \in H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)\right) \Rightarrow \left(\frac{\|\partial_\omega v\|}{\|v\|} \geq \alpha_{PW}\right).$$

Sur $\mathbb{R}$, ce trinôme prend sa valeur minimale en $t^* = \frac{M_{1,3}}{2(1-\alpha)} > 0$, qui est strictement inférieur à α_{PW} si $\alpha = 0$, donc c'est encore vrai sur un voisinage.
De plus, la valeur de ce trinôme en α_{PW} est :

$$(1-\alpha)\alpha_{PW}^2 - M_{1,3}\alpha_{PW} + m_2$$

qui est strictement positif en $\alpha = 0$, donc sur un voisinage. L'ellipticité est acquise. On notera α^* un coefficient d'ellipticité.■
Reprenant les mêmes arguments que dans la section précédente, on démontre que :

Théorème 4.3.3.4 *Sous* **(H0)** *et* **(H1')***, l'équation (4.2) a une solution $H^1_{\omega,0}(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$ variationnelle faible.*

Remarque 4.3.3.5 *Le contre-exemple signalé page 94 satisfait l'ensemble d'hypothèses* **(H0)** *et* **(H1')***, mais pas* **(H0)** *et* **(H1)***.*

4.4 Régularisation des solutions faibles

On indique dans cette section comment, à partir d'une solution faible de (4.2), obtenir une solution régulière.

Formulons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H2) $\quad \forall K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N), \qquad M_K := \sup_{(x,u,v)\in\mathbb{T}^m\times K\times\mathbb{R}^{pN}} |X(x,u,v)| < +\infty.$

On a alors l'énoncé :

Théorème 4.4.0.6 *Soit u une solution faible de (4.2). Alors :*

1. *Pour presque tout $\xi \in \omega^\perp$,*

$$[t \mapsto u(t\omega+\xi)] \in AC^{p+1}_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \cap B^{p+1,2}_\omega(\mathbb{R}^N)$$

et vérifie :

$$\frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}}[u(t\omega+\xi)] = X(t\omega+\xi, u(t\omega+\xi), ..., \partial^p_\omega u(t\omega+\xi))$$

2. *Si de plus $u \in L^\infty(\mathbb{T}^m,\mathbb{R}^N)$, sous l'hypothèse* **(H2)**, *alors*

$$q := [t \longmapsto u(t\omega)] \in AC^{p+1}_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap B^{p+1,2}_\omega(\mathbb{R})$$

et vérifie :

$$q^{(p+1)}(t) = F(t, q(t), ..., q^{(p)}(t)).$$

Démonstration.
Première assertion. Soit :

$$q_\xi := \mathcal{Q}_\omega \circ \tau_\xi \circ u$$

$$X_\xi := [(x,u,v) \longmapsto X(x+\xi,u,v)]$$
$$F_\xi := \Psi^{-1}(X_\xi).$$

Par la proposition 2.8.0.14, il existe N_1 négligeable dans $\omega^\perp$ tel que pour tout $\xi \in \omega^\perp \setminus N_1$, q_ξ soit $p+1$ fois dérivable en presque tout t, et pour tout $j \in \{0,...,p+1\}$, on ait : $q^{(j)}_\xi(t) = \partial^j_\omega u(t\omega+\xi)$ et de plus les $q^{(j)}_\xi$ sont absolument continues pour $j \in \{0,...,p\}$.
Pour presque tout x on a :

$$H(x) := \partial^{p+1}_\omega u(x) - X(x, u(x), ..., \partial^p_\omega u(x)) = 0.$$

Soit N l'ensemble des x où $H(x) \neq 0$. On a $\int_{\mathbb{R}^m} \chi_N(x)dx = 0$, donc en prenant une base $(b_1 = \omega/|\omega|, b_2, ..., b_m)$ orthogonale et $(y_1, ..., y_m)$ sa duale, on a en appliquant le théorème de Fubini pour presque tout y_{-1}, $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\chi 1(N)}(y_1, y_{-1})dy_1 = 0$, c'est-à-dire qu'il existe N_2 négligeable dans $\omega^\perp$ tel que si $\xi \in \omega^\perp \setminus N_2$ on a pour presque tout t :

$$\partial_\omega^{p+1} u(t\omega + \xi) = X(t\omega + \xi, u(t\omega + \xi), ..., \partial_\omega^p u(t\omega + \xi)).$$

Posons $N := N_1 \cup N_2$. C'est un ensemble négligeable dans $\omega^\perp$, et si $\xi \in \omega^\perp \setminus N$, on a pour presque tout t :

$$q_\xi^{(p)}(t) = q_\xi^{(p)}(0) + \int_0^t F_\xi(s, q_\xi(s), ..., q_\xi^{(p)}(s))ds.$$

Comme l'intégrande est absolument continu, $q_\xi^{(p)}$ est donc $AC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ et ainsi q_ξ est de classe C^{p+1} et vérifie dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$:

$$q_\xi^{(p+1)} = F_\xi(., q_\xi, ..., q_\xi^{(p)}).$$

Seconde assertion. On note $\Xi = \omega^\perp \setminus N$. On sait, via la proposition 2.8.0.14, qu'il existe Ξ_1 de mesure pleine dans Ξ tel que si $\xi \in \Xi_1$, on ait pour presque tout t :

$$|u(t\omega + \xi)| \leq \|u\|_\infty.$$

Comme Ξ_1 est de mesure pleine, il est dense, donc il existe une suite $(\xi_n)_n$ à valeurs dans Ξ_1 de limite nulle. On pose $q_n := \mathcal{Q}_\omega \circ \tau_{\xi_n} \circ u$.
Par hypothèse, $\|q_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. On utilise l'hypothèse **(H2)** avec le compact $K = [-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$. Il existe alors une constante M_K telle que $\|q_n^{(p+1)}\|_\infty \leq M_K$. Grâce aux inégalités de Kolmogorov ([3] 1 p.265 ex. 2), on en déduit qu'il existe une constante C indépendante de n et j telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \{0, ..., p+1\}, \quad \|q_n^{(j)}\|_\infty \leq C.$$

Par le théorème d'Ascoli, quitte à extraire une sous-suite, il existe $\varrho \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ tel que la suite $(q_n, ..., q_n^{(p)})_n$ converge uniformément sur tout compact vers $(\varrho, ..., \varrho^{(p)})$. Mais comme $(u(\cdot\omega + \xi_n))_n$ converge simplement vers q, on a $\varrho^{(j)} = q^{(j)}$ pour tout j, et finalement $q \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. On a :

$$q_n^{(p)}(t) - q_n^{(p)}(s) = \int_s^t F_{\xi_n}(\sigma, q_n(\sigma), ..., q_n^{(p)}(\sigma))d\sigma$$

en passant à la limite, par convergence uniforme sur $[s, t]$, comme

$$|F_{\xi_n}(\sigma, q_n(\sigma), ..., q_n^{(p)}(\sigma)) - F(\sigma, q(\sigma), ..., q^{(p)}(\sigma))| \leq$$

$$|F_{\xi_n}(\sigma, q_n(\sigma), ..., q_n^{(p)}(\sigma)) - F(\sigma, q_n(\sigma), ..., q_n^{(p)}(\sigma))| +$$

$$|F(\sigma, q_n(\sigma), ..., q_n^{(p)}(\sigma)) - F(\sigma, q(\sigma), ..., q^{(p)}(\sigma))|$$

comme $(q_n, ..., q_n^{(p)}) \to (q, ..., q^{(p)})$ uniformément sur $[s,t]$, le second terme tend vers 0 par uniforme continuité. Désignons par K_0 le compact de $\mathbb{R}^{(p+1)N}$:

$$K_0 := (B_{\mathbb{R}^N}(0; C))^{p+1} ,$$

le premier terme est majoré par :

$$\sup_{(u,v)\in K_0} |F_{\xi_n}(\sigma, u, v) - F(\sigma, u, v)| = \sup_{(u,v)\in K_0} |X(\sigma + \xi_n, u, v) - X(\sigma, u, v)|$$

qui tend vers 0 uniformément en σ par uniforme continuité de X. Ainsi, on obtient :

$$q^{(p)}(t) - q^{(p)}(s) = \int_s^t F(\sigma, q(\sigma), ..., q^{(p)}(\sigma))d\sigma$$

ce qui montre que $q \in C^{p+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ et vérifie :

$$q^{(p+1)}(t) = F(t, q(t), ..., q^{(p)}(t)).$$

■

Remarques 4.4.0.7 **1.** *La solution q obtenue est en fait de classe C^{p+1} et quasi-périodique au sens de Besicovitch jusqu'à l'ordre $p+1$. C'est donc une notion de solution régulière satisfaisante, même si cette fonction n'est pas nécessairement dans $QP_\omega^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. D'ailleurs, être dans $QP_\omega^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ impose des conditions à la frontière. En effet, u est alors $C_\omega^{p+1}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^N)$, et donc u, $\partial_\omega u$, ... $\partial_\omega^{p+1} u$ vérifient la condition* **(CF)***.*

2. *On remarquera que même sans supposer que $u \in L^\infty$, on obtient ici un théorème de densité de fonctions régulières qui sont des translatées de u dans des directions orthogonales de ω.*

Exemples 4.4.0.8 *Voici des exemples d'applicabilité.*

1. *Pour l'équation du pendule forcé :*

$$\ddot{q} + \sin(q) = e$$

J. Blot a démontré sous certaines hypothèses l'existence de solutions faibles L^∞. Elles sont donc régulières. Mais pour cet exemple, J. Mawhin a démontré une régularité encore plus forte indépendamment de nous.

2. *Dans l'exemple donné page 104, si de plus f_1 est bornée (donc $f_1 \in BC^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), alors les solutions faibles L^∞ de l'équation sont régulières.*

Chapitre 5

Théorèmes relatifs aux solutions presque-périodiques de systèmes dynamiques discrets

Ce chapitre 5 s'intéresse au cadre des suites p.p. Après avoir comparé différentes notions existant dans la littérature et adapté ces notions au cadre à paramètre, nous démontrons des principes variationnels analogues à ceux de Blot en temps continu. Ceux-ci sont utilisés pour obtenir des résultats de structure ainsi que, dans un cadre hilbertien, des théorèmes d'existence. On donne une version discrète du critère d'Amerio, et l'on adapte la méthode du chapitre 4 au temps discret pour obtenir, dans un cadre hilbertien, un théorème d'existence ; la condition obtenue redonne une condition classique dans le cas où le système est linéaire à coefficients constants. Pour les suites presque-périodiques, la notion de régularisation ne se posera pas.

5.1 Espaces de suites p.p.

$\mathbb{L}$ désigne $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{Z}$. On pourrait plus généralement considérer pour $\mathbb{L}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{Z}$ satisfaisant à la condition :

$$(t \in \mathbb{L}) \Rightarrow (t + 1 \in \mathbb{L}).$$

5.1.1 Suites p.p. : définition arithmétique

On trouve dans [41] p.45 la définition suivante (pour $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$) :

Définition 5.1.1.1 *Une suite* $\underline{x} := (x_t)_t \in \mathbb{E}^{\mathbb{L}}$ *est dite p.p. si l'on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{L},\ \exists p \in \{m, \cdots, m+N\},\ \forall t \in \mathbb{L},$$

$$|x_{t+p} - x_t| \leq \varepsilon.$$

Notation 5.1.1.2 *On note $AP(\mathbb{L},\mathbb{E})$ l'espace des suites p.p.*

$\mathbb{Z}$ est un groupe topologique, et lorsque $\mathbb{L}=\mathbb{Z}$ et $\mathbb{E}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une définition de suite p.p. sur un groupe ([92] p.133) qui est :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists s_1,\cdots,s_p\in\mathbb{Z},\ \forall m'\in\mathbb{Z},\ \exists i,\ \forall t\in\mathbb{L},|x_{t-m'}-x_{t-s_i}|\leq\varepsilon. \tag{5.1}$$

Proposition 5.1.1.3 *Ces deux définitions sont équivalentes.*

Démonstration. On peut tout d'abord supposer que $s_1\leq\cdots\leq s_p$. Changeant m' en $-m'$ et t en $t-s_i$, on voit tout d'abord que (5.1) est équivalent à :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists s_1\leq\cdots\leq s_p\in\mathbb{Z},\ \forall m'\in\mathbb{Z},\ \exists i,\ \forall t\in\mathbb{L},$$

$$|x_{t+m'+s_i}-x_t|\leq\varepsilon.$$

Définissons $\sigma_i:=s_i-s_1+1$ et posons $m:=m'+s_1$. Cette propriété s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma_1=1\leq\cdots\leq\sigma_p\in\mathbb{N}^*,\ \forall m\in\mathbb{Z},\ \exists i,\ \forall t\in\mathbb{L},$$

$$|x_{t+m+\sigma_i}-x_t|\leq\varepsilon$$

qui s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma_1=1\leq\cdots\leq\sigma_p\in\mathbb{N}^*,\ \forall m\in\mathbb{Z},\ \exists\tau\in\{m+1,m+\sigma_2,\cdots,m+\sigma_p\},$$

$$\forall t\in\mathbb{L},\quad |x_{t+\tau}-x_t|\leq\varepsilon.$$

Posant $N:=\sigma_p$, on voit sous cette forme que les deux définitions sont équivalentes.■

Si $\underline{x}=(x_t)_t$, on note $f_{\underline{x}}$ la fonction $f_{\underline{x}}:\mathrm{conv}(\mathbb{L})\to\mathbb{E}$ (où conv dénote l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}$) définie par :

$$\forall t\in\mathbb{L},\ \forall u\in[0,1],\quad f_{\underline{x}}(t+u):=x_t+u(x_{t+1}-x_t). \tag{5.2}$$

Proposition 5.1.1.4

$$\underline{x}\in AP(\mathbb{L},\mathbb{E})\Longleftrightarrow\exists f\in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}),\quad f\mid_{\mathrm{conv}(\mathbb{L})}=f_{\underline{x}}.$$

Démonstration. Si $\mathbb{L}=\mathbb{Z}$, le résultat est connu (cf. [41] p.47). Dans le cas général, $\underline{x}\in AP(\mathbb{L},\mathbb{E})$ est équivalent au fait que $f_{\underline{x}}$ vérifie la condition de p.p. sur $\mathrm{conv}(\mathbb{L})$, ce qui est équivalent au fait qu'elle soit la restriction d'une fonction $f\in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$.■

Remarquons qu'un tel prolongement est donc unique, et il est donc possible, lorque $\underline{x}$ est p.p., de noter encore $f_{\underline{x}}$ ce prolongement à $\mathbb{R}$.
En outre, cette unicité montre que les trois espaces vectoriels $AP(\mathbb{Z},\mathbb{E})$, $AP(\mathbb{N},\mathbb{E})$

et $AP(\mathbb{N}^*, \mathbb{E})$ sont isomorphes. Il est évident qu'ils sont aussi isomorphes en tant qu'e.v.n., puisque :

$$\|\underline{x}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \|\underline{x}\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} = \|\underline{x}\|_{\ell^\infty(\mathbb{N}^*)} = \|f_{\underline{x}}\|_\infty.$$

Dans la suite de cette sous-section, on se limitera donc à $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$.

On se propose de préciser encore davantage le lien entre les suites p.p. et les fonctions p.p. A ce titre, on introduit sur $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ la relation d'équivalence :

$$(f \sim g) \Leftrightarrow ((f - g) \mid_{\mathbb{Z}} = 0)$$

la semi-norme p suivante :

$$p(f) := \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|f(t)\|$$

et l'ensemble :

$$\mathcal{N} := p^{-1}(0) = \{f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \quad : \quad f \sim 0\}$$

de sorte que p passe au quotient en une norme $\dot{p}$.
L'ensemble des fonctions $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ interpolant $\underline{x}$ est :

$$\mathcal{C}(\underline{x}) = f_{\underline{x}} + \mathcal{N}.$$

Proposition 5.1.1.5 *$(AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})/\sim, \dot{p})$ et $(AP(\mathbb{Z}, \mathbb{E}), \|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})})$ sont deux espaces de Banach isomorphes et isométriques.*

Démonstration. L'application $\Phi := [f \mapsto (f(t))_t]$ est un morphisme (surjectif) entre $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$, et :

$$(\Phi(f) = \Phi(g)) \Leftrightarrow (f \sim g)$$

donc Φ passe au quotient en un isomorphisme $\hat{\Phi}$ d'espaces de Banach. Il reste à voir qu'il est isométrique. Or si $\dot{f} \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})/\sim$, on a :

$$\|\hat{\Phi}(\dot{f})\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{t \in \mathbb{Z}} |\dot{f}(t)|.$$

De plus, on a immédiatement :

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} |\dot{f}(t)| \leq \inf_{f \in \dot{f}} p(f) = \dot{p}(\dot{f})$$

avec égalité pour la fonction interpolant affinement, et donc :

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} |\dot{f}(t)| = \dot{p}(\dot{f})$$

ce qui montre que $\hat{\Phi}$ est une isométrie.■

Remarque 5.1.1.6 *p étant continue, $\mathcal{N}$ est fermée, ce qui montre que $AP(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ est complet puisque isométrique à un espace complet quotienté par une relation fermée.*

Traduisons maintenant ce lien sur les exponentielles. On a $e_\alpha \sim e_{\{\alpha\}}$, où[1] $\{\alpha\}$ est l'unique élément de $[0,2\pi[$ satisfaisant $\alpha-\{\alpha\}\in 2\pi\mathbb{Z}$. On peut donc, pour l'étude des suites p.p., se ramener à l'étude de $\{\hat{e}_\alpha \ : \ \alpha\in[0,2\pi[\}$, où $\hat{e}_\alpha := (e_\alpha(t))_t$. Notons

$$PT(\mathbb{Z},\mathbb{E}) := \left\{ \sum_{j=1}^{p} a_j \hat{e}_{\alpha_j} \quad : \quad p\in\mathbb{N}^*, a_j\in\mathbb{E},\ \alpha_j\in[0,2\pi[\right\}$$

l'ensemble des polynômes trigonométriques de $AP(\mathbb{Z},\mathbb{E})$. On a :

Proposition 5.1.1.7 *Soit $\underline{x}\in\mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$. $\underline{x}$ est p.p. si et seulement si elle est limite dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Démonstration. $\Leftarrow$ est vraie car $AP(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ est fermée. Réciproquement, considérons $\underline{x}\in AP(\mathbb{Z},\mathbb{E})$. $f_{\underline{x}}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_n$ de $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$. Notons $\Pi_n := (P_n(t))_{t\in\mathbb{Z}}$. Π_n est un polynôme trigonométrique de $AP(\mathbb{Z},\mathbb{E})$, où chaque terme e_α est remplacé par $\hat{e}_\alpha$. La suite $(\Pi_n)_n$ vérifie la majoration :

$$\|\underline{x}-\Pi_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \le \|f_{\underline{x}}-P_n\|_\infty$$

de sorte qu'elle converge vers $\underline{x}$, ce qui démontre la proposition.■

Passons maintenant à l'existence des moyennes. Chaque $\underline{x}\in AP(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ a une valeur moyenne [41] p.48) :

$$\mathcal{M}\{\underline{x}\} := \mathcal{M}\{x_t\}_t := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T+1}\sum_{t=-T}^{T} x_t$$

La moyenne jouit des propriétés (évidentes) suivantes :

(P1) $\mathcal{M}\{\hat{e}_\alpha\}=1$ si $\alpha\in]0,2\pi[$, et vaut 0 si $\alpha=0$.

(P2) $\mathcal{M}$ est une application linéaire continue de $AP(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ vers $\mathbb{E}$.

(P3) $\mathcal{M}\{\underline{x}\}=\mathcal{M}\{f_{\underline{x}}\}$.

[1] Cette définition diffère légèrement de la partie fractionnaire au sens où elle est prise ici modulo 2π.

Dans la suite de cette sous-section, on suppose $\mathbb{E} = \mathbb{H}$ hilbertien. Passons maintenant à la description d'un espace hilbertien du type Besicovitch pour les suites p.p. On munit $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$ du produit scalaire suivant :

$$\langle \underline{x} \mid \underline{y} \rangle_2 := \mathcal{M}\{x_t \cdot \overline{y_t}\}_t.$$

La norme associée se note $\|.\|_2$. La complétion hilbertienne de $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$ se note $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$.
Cet espace peut aussi être vu comme sous-espace d'un espace de Marcinkiewicz discret. $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$ est un sous-espace de l'espace de Marcinkiewicz :

$$\mathcal{M}^2(\mathbb{Z}, \mathbb{H}) := \left\{ (x_t)_t \quad : \quad \lim \sup_{T \to +\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{t=-T}^{T} \|x_t\|^2 < +\infty \right\}$$

que l'on munit de la semi-norme p_2 définie par :

$$p_2(\underline{x}) := \sqrt{\lim \sup_{T \to +\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{t=-T}^{T} \|x_t\|^2}.$$

Soit $\mathcal{B}^2(\mathbb{Z}; \mathbb{H})$ la complétion de $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$ par rapport à cette semi-norme, et soit $\sim_2$ la relation d'équivalence induite par la semi-norme. On a alors :

Proposition 5.1.1.8 *On a* $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{H}) = \mathcal{B}^2(\mathbb{Z}, \mathbb{H}) / \sim_2$.

Démonstration. Supposons que $\underline{x}$ soit dans $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$. Il est limite d'une suite $(\underline{x}^{(n)})_n$ d'élements de $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$ pour la norme $\| \cdot \|_2$, donc aussi au sens de la semi-norme p_2.
Réciproquement, supposons que $p_2(\underline{x}^{(n)} - \underline{x}) \to 0$, la suite $(\underline{x}^{(n)})_n$ est alors de Cauchy donc il existe $(\varepsilon_n)_n$ de limite nulle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad p_2(\underline{x}^{(n+p)} - \underline{x}^{(n)}) \leq \varepsilon_n.$$

Comme les $\underline{x}^{(n)}$ sont dans $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$, cette moyenne supérieure est en fait une moyenne, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|\underline{x}^{(n+p)} - \underline{x}^{(n)}\|_2 \leq \varepsilon_n$$

ce qui prouve que $(\underline{x}^{(n)})_n$ converge dans $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$ vers une limite $\underline{y}$. Faisant tendre p vers l'infini, puis n, on a successivement :

$$p_2(\underline{y} - \underline{x}^{(n)}) \leq \varepsilon_n$$

puis

$$p_2(\underline{y} - \underline{x}) = 0$$

ce qui prouve bien que $\underline{x} \sim_2 \underline{y} \in B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$.■

On peut aussi décrire notre espace à l'aide de la synthèse harmonique :

Proposition 5.1.1.9

$$B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H}) = \left\{ \underline{x} \ : \ \exists(\lambda_\alpha)_\alpha \in \ell^2([0,2\pi[,\mathbb{H}), \ \ \mathcal{M}\left\{ \left\| \underline{x} - \sum_{\alpha\in[0,2\pi[} \lambda_\alpha \hat{e}_\alpha \right\|^2 \right\} = 0. \right\},$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ est bien entendu vraie. Pour le sens réciproque, soit $(\Pi_n)_n$ une suite de polynômes trigonométrique convergeant vers $\underline{x}$. Posons :

$$\epsilon_n := \sup_{p\geq 0} \|\Pi_{n+p} - \Pi_n\|_2^2 \longrightarrow 0.$$

Ecrivons :

$$\Pi_n := \sum_{\alpha\in I_n} \lambda_\alpha^n \hat{e}_\alpha$$

où I_n est fini. Posons $\lambda_\alpha^n = 0$ si $\alpha \notin I_n$. On a :

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{R}} |\lambda_\alpha^{n+p} - \lambda_\alpha^n|^2 = \|\Pi_{n+p} - \Pi_n\|_2^2 \leq \epsilon_n$$

de sorte que, à α fixé, la suite $(\lambda_\alpha^n)_n$ a une limite notée λ_α. Il vient :

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{R}} |\lambda_\alpha|^2 \leq 2\left(\epsilon_1 + \sum_{j\in I_1} |\lambda_\alpha^1|^2\right) < +\infty$$

et $\underline{x} = \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \lambda_\alpha \hat{e}_\alpha$ dans $B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H})$.■

5.1.2 Suites p.p. au sens de Mauclaire

Compactification de Bohr

On rappelle ici rapidement la construction du compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$. Considérons le dual algébrique de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble de ses caractères :

$$\hat{\mathbb{Z}} = \{\chi_\alpha \ : \ \alpha \in [0,2\pi[\}$$

où $\chi_\alpha(n) := e^{in\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$.
On munit $\hat{\mathbb{Z}}$ de la topologie discrète, soit $\hat{\mathbb{Z}}_d$ le groupe topologique obtenu. Son groupe dual (topologique) se note $b\mathbb{Z}$ et est par construction un groupe topologique compact. On a une injection algébrique de $\mathbb{Z}$ dans son bidual, qui se transforme ici en une injection :

$$in : \mathbb{Z} \longrightarrow b\mathbb{Z}$$

qui est celle-ci topologique (*i.e.* continue), ce qui permet d'identifier $\mathbb{Z}$ à un sous-groupe de $b\mathbb{Z}$. De plus, $in(\mathbb{Z})$ est dense dans $b\mathbb{Z}$.

Suites p.p. au sens de Mauclaire

Définition 5.1.2.1 *Une suite* $\underline{x} = (x_t)_t$ *est une suite m.p.p. si il existe* $\varphi \in C^0(b\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ *telle que* $\varphi \circ in(t) = x_t$.

Puisque $in(\mathbb{Z})$ est dense dans $b\mathbb{Z}$ et que φ est continue, une telle fonction est unique et sera notée $\varphi^{\underline{x}}$; de plus, pour les mêmes raisons $\|\varphi^{\underline{x}}\|_\infty = \|\underline{x}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$. $AP_M(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ est l'espace des suites m.p.p. de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{E}$, que l'on munit de la norme du sup.

Proposition 5.1.2.2 $AP_M(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Si $(\underline{x}_n)_n$ est de Cauchy dans $AP_M(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$, il en est de même de $(\varphi^{\underline{x}_n})_n$ dans $C^0(b\mathbb{Z}, \mathbb{E})$. La suite $(\varphi^{\underline{x}_n})_n$ converge donc vers un élément φ qui vérifie les conditions de la définition 5.1.2.1, ce qui conclut la proposition.■

Remarque 5.1.2.3 *Dans Mauclaire ([68]), il est démontré qu'un élément de* $AP_M(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ *est complètement déterminé par ses valeurs sur* $\mathbb{N}^*$.

On retrouve ici une autre définition de fonction p.p. sur le groupe $\mathbb{Z}$: il s'agit des fonctions ayant une extension continue à $b\mathbb{Z}$. On sait que les deux définitions sont équivalentes pour n'importe quel groupe topologique ; retrouvons-le explicitement pour cet exemple :

Proposition 5.1.2.4 *Il existe un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach :*

$$\Theta : AP_M(\mathbb{Z}, \mathbb{E}) \longrightarrow AP(\mathbb{Z}, \mathbb{E}).$$

Démonstration. En premier, on constate que $\Phi : AP_M(\mathbb{Z}, \mathbb{E}) \to C^0(b\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ défini par $\Phi(\underline{x}) = \varphi^{\underline{x}}$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach, il suffit donc d'en exhiber un entre $C^0(b\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ et $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$.
Si $\sum_{j=1}^p a_j \chi_{\alpha_j} \in P(b\mathbb{Z}, \mathbb{E})$, est un polynôme trigonométrique de $b\mathbb{Z}$, on pose :

$$\Xi\left(\sum_{j=1}^p a_j \chi_{\alpha_j}\right) = \sum_{j=1}^p a_j \hat{e}_\alpha.$$

Ξ est une isométrie linéaire, donc est injective et continue et s'étend donc de manière unique en une isométrie linéaire Ξ entre $C^0(b\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ et $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$.
Démontrons maintenant que Ξ surjective. Soit $\underline{x} \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$. Il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes trigonometriques de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_{\underline{x}} - P_n\|_\infty = 0$. Ainsi $(P_n)_n$ est de Cauchy, et puisque :

$$\left\|(P_{n+p}(t))_t - (P_n(t))_t\right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leq \|P_{n+p} - P_n\|_\infty$$

la suite $((P_n(t))_t)_n$ est de Cauchy dans $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$. Si $P_n = \sum_{j\in I_n} a_j^n e_{\alpha_j}$, posons $\Pi_n := \sum_{j\in I_n} a_j^n \chi_{\{\alpha_j\}}$. On a $\Xi(\Pi_n) = (P_n(t))_t$ et puisque Ξ est une isométrie, on

voit que $(\Pi_n)_n$ est de Cauchy dans $C^0(b\mathbb{Z},\mathbb{E})$, donc a une limite f. Par continuité de Ξ, il vient $\Xi(f)=\underline{x}$.
On pose $\Theta := \Xi\circ\Phi^{-1}$ pour conclure.■

Chaque $\underline{x}\in AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ a une valeur moyenne définie comme suit :

$$\mathcal{M}_M\{\underline{x}\} := \mathcal{M}_M\{x_t\}_t := \int_{b\mathbb{Z}} \varphi^{\underline{x}}(\theta)d\mu(\theta)$$

Cette moyenne jouit des propriétés suivantes :

(P1') $\mathcal{M}_M\{\chi_\alpha\}=0$ si $\alpha\in]0,2\pi[$, et vaut 1 si $\alpha=0$.

(P2') $\mathcal{M}_M$ est une application linéaire continue.

(P3') $\mathcal{M}_M\{\underline{x}\}=\mathcal{M}\{\Theta(\underline{x})\}$, où Θ est défini dans 5.1.2.4.

Dans la suite de cette sous-section, on suppose que $\mathbb{E}=\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert. On définit la norme suivante sur $AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$:

$$\|\underline{x}\|_{M,2} := \left(\mathcal{M}_M\{|x_t|^2_{\mathbb{H}}\}_t\right)^{1/2}$$

qui fait de $AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$ un espace préhilbertien.
On définit les deux opérations $C: AP(\mathbb{Z},\mathbb{H})\to AP(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ et $C_M: AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})\to AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ respectivement par :

$$C(\underline{x}) := (|x_t|^2_{\mathbb{H}})_t$$

et :

$$C_M(\underline{x}) := (|x_t|^2_{\mathbb{H}})_t.$$

Lemme 5.1.2.5 *On a $\Theta\circ C_M = C\circ\Theta$.*

Preuve. Si $\underline{x}\in AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$ est un polynôme trigonométrique, disons $\underline{x}=\sum_{j=1}^p a_j\chi_{\alpha_j}$, on a successivement :

$$\Theta\circ C_M(\underline{x}) = \Theta\left(\sum_{j,k} a_j\overline{a_k}\chi_{\alpha_j}\overline{\chi_{\alpha_k}}\right) = \Theta\left(\sum_{j,k} a_j\overline{a_k}\chi_{\alpha_j-\alpha_k}\right) = \sum_{j,k} a_j\overline{a_k}\hat{e}_{\alpha_j-\alpha_k}$$

et :

$$C\circ\Theta(\underline{x}) = C\left(\sum_j a_j\hat{e}_{\alpha_j}\right) = \sum_{j,k} a_j\hat{e}_{\alpha_j}\overline{a_k\hat{e}_{\alpha_k}} = \sum_{j,k} a_j\overline{a_k}\hat{e}_{\alpha_j-\alpha_k}$$

donc la relation est vraie pour les polynômes trigonométriques. Par continuité des différents opérateurs en jeu, la relation est donc vraie sur $AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$.■

Lemme 5.1.2.6 *Si $\underline{x} \in AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$, on a :*

$$\|\underline{x}\|_{M,2} = \|\Theta(\underline{x})\|_2 = \|\varphi^{\underline{x}}\|_{L^2}.$$

Preuve. Constatons tout d'abord que $\varphi^{C_M(\underline{x})} = |\varphi^{\underline{x}}|^2_{\mathbb{H}}$. Par conséquent, on a :

$$\|\underline{x}\|^2_{M,2} = \int_{b\mathbb{Z}} \varphi^{C_M(\underline{x})}(\theta) d\mu(\theta) = \int_{b\mathbb{Z}} |\varphi^{\underline{x}}(\theta)|^2_{\mathbb{H}} d\mu(\theta) = \|\varphi^{\underline{x}}\|^2_{L^2}$$

ce qui donne une première égalité. De plus :

$$\|\Theta(\underline{x})\|_2^2 = \mathcal{M}\{C \circ \Theta(\underline{x})\} = \mathcal{M}\{\Theta \circ C_M(\underline{x})\} \stackrel{(\mathbf{P3'})}{=} \mathcal{M}_M\{C_M(\underline{x})\} = \|\underline{x}\|^2_{M,2}$$

d'où la seconde égalité.■

On définit l'espace de Hilbert suivant :

Définition 5.1.2.7 *On note $B^2_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$ le complété de $AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$ pour la norme $\|.\|_{M,2}$.*

Comme on s'y attend, cet espace est lié aux espaces hilbertiens déjà vus, ce qui est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 5.1.2.8 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\underline{x} \in B^2_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$.
2. $\Theta(\underline{x}) \in B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H})$.

Démonstration. On a vu que l'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Theta : (AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H}), \|.\|_{M,2}) \to (AP(\mathbb{Z},\mathbb{H}), \|.\|_2)$ qui est encore une isométrie (donc un isomorphisme d'e.v.n.) en raison du lemme 5.1.2.6. On note Ξ l'isomorphisme réciproque. Θ est donc un morphisme isométrique de $(AP_M(\mathbb{Z},\mathbb{H}), \|.\|_{M,2})$ vers $B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H})$ (non bijectif) qui par densité s'étend de manière unique en $\Theta : B^2_M(\mathbb{Z},\mathbb{H}) \to B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H})$ qui est isométrique. Il reste à voir que le Θ ainsi étendu est bijectif. Pour cela, on étend de même $\Xi : B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H}) \to B^2_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$, puis l'on constate que l'on a par densité :

$$\Xi \circ \Theta = Id_{B^2_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})} \quad \text{et} \quad \Theta \circ \Xi = Id_{B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H})}$$

ce qui montre bien que Θ est un isomorphisme isométrique de $B^2_M(\mathbb{Z},\mathbb{H})$ sur $B^2(\mathbb{Z},\mathbb{H})$.■

Proposition 5.1.2.9 *L'application $I : L^2(b\mathbb{Z},\mathbb{H}) \to AP(\mathbb{Z},\mathbb{H})$ définie par :*

$$I\left(\sum_\alpha a_\alpha \chi_\alpha\right) = \sum_\alpha a_\alpha \hat{e}_\alpha$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert. C'est l'unique isomorphisme isométrique prolongeant l'application $\varphi \mapsto \varphi \circ in$ définie sur les polynômes trigonométriques.

Démonstration. L'aspect isomorphisme isométrique est une trivialité. Quand $\varphi = \sum_\alpha a_\alpha \chi_\alpha$ est un polynôme trigonométrique (somme finie), on a immédiatement $\varphi \circ in = \sum_\alpha a_\alpha \chi_\alpha \circ in = \sum_\alpha a_\alpha \hat{e}_\alpha = I(\varphi)$ donc I et $\varphi \mapsto \varphi \circ in$ sont identiques sur un sous-ensemble dense et isométriques, donc par l'unicité du prolongement, I est bien le seul prolongement unique.■

Remarques 5.1.2.10 **1.** *Lorsque $\underline{x} \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{H})$, on a $I^{-1}(\underline{x}) = \varphi^{\underline{x}}$, ce qui légitime de définir la notation :*

$$\forall \underline{x} \in B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{H}), \quad \varphi^{\underline{x}} := I^{-1}(\underline{x}).$$

2. *Compte tenu de l'aspect unicité du prolongement, on s'autorisera à écrire, lorsque $\varphi \in L^2(b\mathbb{Z}, \mathbb{H})$, $\varphi \circ in$ au lieu de $I(\varphi)$, étant entendu qu'il s'agit (a priori) d'un abus puisqu'on n'a pas montré que $\varphi \circ in$ avait un sens. Mais cet abus est justifié par les considérations antérieures.*

5.2 Comparaison avec d'autres notions de p.p.

5.2.1 Notion de Bochner

On adapte le classique critère de Bochner aux suites par la proposition suivante.

Proposition 5.2.1.1 *Une suite $\underline{x}$ est presque-périodique si et seulement si pour toute $(h_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(h_{\phi(n)})_n$ telle que $(\tau_{h_{\phi(n)}} \underline{x})_n$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, on utilise le lien entre $f_{\underline{x}}$ et $\underline{x}$: $\underline{x}$ est p.p. si et seulement si $f_{\underline{x}}$ l'est. Montrons en premier le sens direct. Compte tenu du lien que l'on vient de rappeler, il existe une sous-suite $(h_{\phi(n)})_n$ telle que $(\tau_{h_{\phi(n)}} f_{\underline{x}})_n$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Mais si $t \in \mathbb{Z}$, $f_{\underline{x}}(t + h_{\phi(n)}) = x_{t+h_{\phi(n)}}$ puisque $h_{\phi(n)} \in \mathbb{Z}$ et donc on obtient le résultat. Passons à la réciproque. On prouve en premier que $\underline{x}$ est bornée. Si ce n'était pas le cas, pour tout n, il existerait h_n telle que $|x_{h_n}| \geq n$ pour tout n, et donc $(\tau_{h_n} x_0)_n$ n'aurait aucune sous-suite convergente. Ainsi $\underline{x}$ est bornée, montrons maintenant que $f_{\underline{x}}$ est p.p. Etant donnée une suite $(k_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on écrit $k_n = h_n + \zeta_n$ avec $h_n \in \mathbb{Z}$ et $\zeta_n \in [0, 1[$. Quite à faire deux extractions, on peut supposer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{t \in \mathbb{Z}} |f_{\underline{x}}(t + h_n) - f_{\underline{x}}(t)| \leq 1/n$$

et que :

$$\exists \zeta \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\zeta_n - \zeta| \leq \frac{1}{2n\|\underline{x}\|_\infty}.$$

On obtient de ceci :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{\underline{x}}(x + h_n) - f_{\underline{x}}(x)| \leq 1/n$$

et puisque $f_{\underline{x}}$ est Lipschitzien de constante $2\|x\|_\infty$, il vient :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_{\underline{x}}(x+\zeta_n) - f_{\underline{x}}(x+\zeta)| \leq 2\|\underline{x}\|_\infty |\zeta_n - \zeta| \leq 1/n.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_{\underline{x}}(x+k_n)-f_{\underline{x}}(x+\zeta)| \leq |f_{\underline{x}}(x+k_n)-f_{\underline{x}}(x+h_n+\zeta)|+|f_{\underline{x}}(x+h_n+\zeta)-f_{\underline{x}}(x+\zeta)| \leq 2/n$$

et ainsi $(\tau_{k_n} f_{\underline{x}})_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\tau_\zeta f_{\underline{x}}$, donc $f_{\underline{x}}$ est p.p., et donc $\underline{x}$ est également p.p. ∎

5.2.2 Notion de Zaslavski

Ici $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans [94] - [98], Zaslavski propose la notion suivante :

Définition 5.2.2.1 *Une suite $\underline{x}$ est z.p.p. si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \geq 1,\ \forall i, p \in \mathbb{Z},\ |x_i - x_{i+mp}| \leq \varepsilon$$

Proposition 5.2.2.2 *Les suites z.p.p. sont p.p. et la réciproque est fausse.*

Démonstration. z.p.p. $\Rightarrow$ p.p. car si je prends $N := m$, tout ensemble de la forme $\{\ell, \cdots, \ell + N\}$ contient (au moins) un élément de $m\mathbb{Z}$.
La réciproque est fausse, puisque la suite $(\sin(t))_t$ est p.p. mais elle n'est pas z.p.p. car sinon, en faisant $i = 0$ et $\varepsilon = 1/2$, on aurait pour un $m \in \mathbb{Z}$,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad |\sin(mp)| \leq 1/2$$

ce qui contredit la densité de l'orbite de $(mp)_p$ dans le tore.∎

Désormais, nous ne considérerons plus que les autres notions de suites presque-périodiques, que nous identifierons en raison des résultats d'isomorphismes obtenus.

5.3 Fonctions et suites p.p. à paramètres et opérateurs de Nemytskii

Dans ce qui suit, on note G l'un des groupes compacts $b\mathbb{R}$, $b\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T}^m$, dont on note μ_G la mesure de Haar normalisée. Rappelons ([35],TG.II.27) qu'il admet une structure uniforme, dont on note $\mathcal{U}_G$ l'ensemble des entourages. On se donne également un espace métrique (X, d), et P une partie non vide qui est soit compacte, soit dénombrable à l'infini.

Par souci de traiter en un coup des démonstrations semblables, par convention $AP(G, \mathbb{E})$ désignera $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ si $G = b\mathbb{Z}$, $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si $G = b\mathbb{R}$, $QP^0_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$

si $G = \mathbb{T}^m$. On note $PT(G, \mathbb{E})$ l'espace des polynômes trigonométriques de G sur $\mathbb{E}$. Rappelons que du fait que $\mathbb{E}$ est paracompact, $PT(G, \mathbb{E})$ est dense dans $AP(G, \mathbb{E})$. Les considérations faites ici généralisent celles de chapitres antérieurs, et pourraient être adaptées à des fonctions p.p. sur des groupes plus généraux.

5.3.1 Fonctions et suites p.p. uniformément en le paramètre

Définition et représentation comme espaces de fonctions continues

Si $\underline{x} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}\times P}$, on note $f_{\underline{x}}$ la fonction définie par :

$$\forall (t, u, \alpha) \in \mathbb{Z} \times [0, 1] \times P, \qquad f_{\underline{x}}(t + u, \alpha) = (1 - u)x_t(\alpha) + ux_{t+1}(\alpha).$$

Définition 5.3.1.1 *On dit que :*

1. $f : \mathbb{R} \times P \to \mathbb{E}$ *est p.p. en* $t \in \mathbb{R}$*, uniformément en* $\alpha \in P$ *(espace* $APU(b\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$*) si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall K \subset \mathcal{K}(P),\ \exists \ell > 0,\ \forall m \in \mathbb{R},\ \exists \tau \in [m, m + \ell]$$

$$\sup_{(t,\alpha)\in\mathbb{R}\times K} |f(t + \tau, \alpha) - f(t, \alpha)| \le \varepsilon.$$

2. $f : \mathbb{R} \times P \to \mathbb{E}$ *est q.p.-*ω *en* $t \in \mathbb{R}$*, uniformément en* $\alpha \in P$ *(espace* $APU(\mathbb{T}^m, P, \mathbb{E})$*) si* $f \in AP(b\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ *et si de plus, pour tout* $\alpha \in P$*, on a* $f(., \alpha) \in QP^0_\omega(\mathbb{T}^m, \mathbb{E})$*.*

3. $\underline{x} : \mathbb{R} \times P \to \mathbb{E}$ *est p.p. en* $t \in \mathbb{Z}$*, uniformément en* $\alpha \in P$ *(espace* $APU(b\mathbb{Z}, P, \mathbb{E})$*) si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall K \subset \mathcal{K}(P),\ \exists N > 0,\ \forall m \in \mathbb{Z},\ \exists \tau \in \{m, \cdots, m + N\}$$

$$\sup_{(t,\alpha)\in\mathbb{Z}\times K} |x_{t+\tau}(\alpha) - x_t(\alpha)| \le \varepsilon.$$

Remarques 5.3.1.2 *Notons en premier que*

$$(\underline{x} \in APU(b\mathbb{Z}, P, \mathbb{E})) \Leftrightarrow (f_{\underline{x}} \in APU(b\mathbb{R}, P, \mathbb{E})),$$

la démonstration étant identique au cas sans paramètre. Notons aussi que lorsque P *est compact, la définition s'écrit plus simplement :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \ell > 0,\ \forall m \in \mathbb{R},\ \exists \tau \in [m, m + \ell],\ \sup_{(t,\alpha)\in\mathbb{R}\times P} |f(t + \tau, \alpha) - f(t, \alpha)| \le \varepsilon.$$

Théorème 5.3.1.3 *Il existe un isomorphisme isométrique d'espaces de Fréchet*

$$\Theta_{G,P} : APU(G, P, \mathbb{E}) \to C^0(G \times P, \mathbb{E}).$$

Démonstration. On définit $\Theta_{G,P}$ par la formule :

$$\Theta_{G,P}(f) := [(t,\alpha) \mapsto f(t,\alpha)].$$

Justifions.
Première étape : on démontre qu'il suffit d'avoir le résultat pour P compact.
En effet, supposons le résultat vrai pour chaque compact, il l'est donc vrai que pour tout n, $\Theta_{G,K_n} : APU(G, K_n, \mathbb{E}) \to C^0(G \times K_n, \mathbb{E})$ est un isomorphisme isométrique de Banach. Fixons $f \in APU(G, P, E)$, et définissons $\Theta_{G,P}(f) := [(t,\alpha) \mapsto f(t,\alpha)]$. Montrons que l'on obtient un élément continu. Soit $(t_0, \alpha_0) \in G \times P$ fixé. Il existe un entier n tel que $\alpha_0 \in K_{n-1}$, et alors $\alpha_0 \in \mathrm{Int} K_n$ de sorte que $P \times K_n$ est un voisinage de $(t_0; \alpha_0)$. Sur ce voisinage, $\Theta_{G,P}(f) := \Theta_{G,K_n}(f)$ donc la continuité est acquise. C'est visiblement un morphisme isométrique. Passons à sa surjectivité. Si $g \in C^0(G \times P, E)$, on définit sur chaque $G \times K_n$ $F_n := \Theta^{-1}_{G,K_n}(g)$. Comme f_{n+1} est un prolongement de f_n, il est possible de poser $f(t,\alpha) := f_n(t,\alpha)$ où n est tel que $\alpha \in K_n$. f répond clairement à la question. La première étape est achevée. On suppose donc désormais P compact.

Seconde étape. On constate que l'on a un isomorphisme isométrique entre $APU(G, P, \mathbb{E})$ et $AP(G, C^0(P, \mathbb{E}))$. C'est immédiat sur la définition pour 1. (et 3.), puisque l'on peut réécrire la définition comme suit (attendu que P est compact) :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \ell > 0)(\forall m \in \mathbb{R})(\exists \tau \in [m, m+\ell])$$
$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau, .) - f(t, .)\|_{C^0(P,\mathbb{E})} \leq \varepsilon.$$

Troisième étape. On constate que l'on a un isomorphisme isométrique entre $C^0(G, C^0(P, \mathbb{E}))$ et $AP(G, C^0(P, \mathbb{E}))$. Ceci résulte de la théorie générale. Rappelons que le point essentiel est la densité des polynômes trigonométriques.

Dernière étape. On constate que l'on a un isomorphisme isométrique Φ entre $C^0(G \times P, \mathbb{E}))$ et $C^0(G, C^0(P, \mathbb{E}))$. Φ est défini par $\Phi(f) := [t \mapsto f(t, .)]$. Justifions que Φ a un sens. Munissant le compact $G \times P$ de la structure uniforme produit, f étant continue sur ce compact y est uniformément continue, donc étant donné $\varepsilon > 0$, on a :

$$\exists \eta > 0,\ \exists U \in \mathcal{U}_G,\ \forall (x,y) \in K^2,\ \forall (s,t) \in G$$
$$(d(x,y) \leq \eta) \Rightarrow (\|f(s,x) - f(t,y)\| \leq \varepsilon). \tag{5.3}$$

Soit $x_0 \in P$. Dans (5.3), faisons $y = x_0$ et $s = t$. Alors étant donné $\varepsilon > 0$, il existe η tel que :

$$(\forall t \in G)(\forall x \in P) \quad (d(x, x_0) \leq \eta) \Rightarrow (\|f(t,x) - f(t,x_0)\| \leq \varepsilon)$$

d'où la continuité de $f(t,.)$. Reprenant (5.3) en fixant $t_0 \in G$ en faisant $y = x$, on a $\varepsilon > 0$, η et $U(t_0)$ voisinage de t_0 dans G tels que :

$$\forall s \in U(t_0),\ \forall x \in P \quad |f(s,x) - f(t_0,x)| \leq \varepsilon$$

d'où en passant au sup sur x :

$$\forall s \in U(t_0) \quad \|f(s,.) - f(t_0,.)\|_{C^0(P,\mathbb{E})} \leq \varepsilon$$

ce qui prouve l'existence de Φ.

Φ est clairement un isomorphisme isométrique, il reste à voir la surjectivité. Soit $\lambda \in C^0(G \times P, \mathbb{E})$. On définit f par $f(x,\alpha) := (\lambda(x))(\alpha)$, qui est le seul candidat naturel. Reste à voir que $f \in C^0(G \times P, \mathbb{E})$. Soit $(x_0, \alpha_0) \in G \times P$. Soit $\varepsilon > 0$ et V un voisinage de x_0 dans G (resp. W un voisinage de α_0 dans P) tels que si $(x,\alpha) \in V \times W$, on ait $\|\lambda(x) - \lambda(x_0)\|_{C^0(P,\mathbb{E})} \leq \varepsilon/2$ et $\|f(x_0,\alpha) - f(x_0,\alpha_0)\| \leq \varepsilon/2$. Soit $(x,\alpha) \in V \times W$. On a :

$$|f(x,\alpha) - f(x_0,\alpha_0)| \leq |f(x_0,\alpha) - f(x,\alpha)| + |f(x_0,\alpha) - f(x_0,\alpha_0)| \leq$$

$$\leq \|\lambda(x) - \lambda(x_0)\|_{C^0(P,\mathbb{E})} + |f(x_0,\alpha) - f(x_0,\alpha_0)| \leq \varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration.■

Remarque 5.3.1.4 *On suppose que $F \in APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ où K est un compact. Posons pour $i \in K$:*

$$f_i := F(.,i).$$

Alors la famille $(f_i)_i$ est équi-presque-périodique.

On adapte maintenant le critère de Bochner au cadre paramétrique.

Proposition 5.3.1.5 *f est p.p. uniformément en le paramètre si et seulement si pour toute suite $(h_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(h_{\phi(n)})_n$ telle que pour tout compact $K \subset P$, $(f(. + h_{\phi(n)}, .))_n$ converge uniformément sur $\mathbb{Z} \times K$.*

Démonstration. Puisque $APU(\mathbb{Z}, P, \mathbb{R}^N)$ est isomorphe à $AP(\mathbb{Z}, C^0(P, \mathbb{R}^N))$, le résultat est clair si P est compact. Considérons le cas dénombrable à l'infini : $P = \cup_p K_p$ avec K_p compact pour tout p et $K_p \subset Int(K_{p+1})$. Supposons en premier que $f \in APU(\mathbb{Z}, P, \mathbb{R}^N)$. Par récurrence, on peut trouver pour tout p une fonction strictement croissante $\phi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout p, $(f(. + h_{(\phi_0 \circ \ldots \circ \phi_p)(n)}, .))_n$ soit uniformément convergente sur K_p. Si l'on pose $\psi(n) := (\phi_0 \circ \ldots \circ \phi_n)(n)$, on peut donc affirmer que $(f(. + h_{\psi(n)}, .))_n$ converge uniformément sur tout K_p, donc sur tout compact, d'où le résultat. Pour l'implication réciproque, on note que le cas compact donne $f \in APU(\mathbb{Z}, K_p, \mathbb{R}^N)$ pour tout p, et donc on a le résultat.■

Les opérateurs de Nemytskii

On considère $L \in APU(G, \mathbb{R}^k, \mathbb{E})$ et l'on définit un opérateur $\mathcal{N}_L : (\mathbb{R}^k)^G \to (\mathbb{E})^G$ par $\mathcal{N}_L(\varphi) := [t \mapsto L(t, \varphi(t))]$. On note $L_t := L(t, .)$. On introduit $\tilde{L} := \Theta^{-1}_{G,\mathbb{R}^k}(L)$ et $\mathcal{N}_{\tilde{L}}$ l'opérateur associé. On note enfin θ_k l'isomorphisme isométrique de $AP(G, \mathbb{R}^k)$ sur $C^0(G, \mathbb{E})$, et l'on définit analoguement $\theta_{\mathbb{E}}$.
Notons enfin que la première proposition serait valide dans des cadres plus généraux (par exemple en remplaçant $\mathbb{R}^k$ par un espace métrique B.F.C.[2]). En revanche, la seconde nécessite une structure vectorielle, et les seuls espaces vectoriels normés B.F.C. sont ceux de dimension finie, c'est pourquoi on fait directement cette hypothèse.

Proposition 5.3.1.6 *$\mathcal{N}_L(AP(G, \mathbb{R}^k)) \subset AP(G, \mathbb{E})$, et $\mathcal{N}_L$ est un opérateur continu de $AP(G, \mathbb{R}^k)$ vers $AP(G, \mathbb{E})$.*

Démonstration. On a immédiatement $\mathcal{N}_L = \theta_{\mathbb{E}}^{-1} \circ \mathcal{N}_{\tilde{L}} \circ \theta_k$, et puisque $\theta_{\mathbb{E}}$ et θ_k sont continus, il suffit de démontrer que : $\mathcal{N}_{\tilde{L}}(C^0(G, \mathbb{R}^k)) \subset C^0(G, \mathbb{E})$, et $\mathcal{N}_{\tilde{L}} \in C^0(C^0(G, \mathbb{R}^k), C^0(G, \mathbb{E}))$. L'inclusion est quasiment immédiate. Maintenant, prouvons que $\mathcal{N}_{\tilde{L}}$ est continu. Fixons $\varphi_0 \in AP(G, \mathbb{R}^k)$ et soit $K := B_f(0; \|\varphi_0\| + 1)$. $G \times K$ est compact, donc $\tilde{L}$ est uniformément continu sur $b\mathbb{Z} \times K$, et étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $U \in \mathcal{U}_G$ et $\eta \in]0, 1[$ tels que :

$$\Big[(p, q) \in U, (x, y) \in K^2, \mid x - y \mid \leq \eta\Big] \Longrightarrow \Big[\mid \tilde{L}(p, x) - \tilde{L}(q, y) \mid \leq \varepsilon\Big].$$

Posant $x := \varphi_0(p)$, $p = q$ et passant au sup, on obtient :

$$[\|\varphi - \varphi_0\| \leq \eta] \Longrightarrow \big[\|\mathcal{N}_{\tilde{L}}(\varphi_0) - \mathcal{N}_{\tilde{L}}(\varphi)\|_{C^0(G,\mathbb{E})} \leq \varepsilon\big]$$

qui est la continuité. ∎

Dans la suite de ce paragraphe, on fait l'hypothèse supplémentaire **(H1)** selon laquelle pour tout t, $L_t \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{E})$ et que $D_2 L \in APU(G, \mathbb{R}^k, \mathbb{E})$.
Sur $\tilde{L}$, ces hypothèses se traduisent par : pour tout t, $\tilde{L}_t \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{E})$ et que $D_2 \tilde{L} \in C^0(G \times \mathbb{R}^k, \mathbb{E})$.

Proposition 5.3.1.7 *$\mathcal{N}_L$ est C^1 et :*

$$\mathcal{N}_L'(\varphi_0) \cdot h = (D_2 L(t, \varphi_0(t)) \cdot h(t))_t \,.$$

Démonstration. On se ramène au cas de $\tilde{L}$, $\theta_{\mathbb{E}}$ et θ_k étant linéaires continus donc C^1. Fixons φ_0. On a :

$$\mathcal{N}_{\tilde{L}}(\varphi_0 + h) - \mathcal{N}_{\tilde{L}}(\varphi_0) - (D_2 L(t, \varphi_0(t)) \cdot h(t))_t =$$

[2] c'est-à-dire un espace métrique où toutes les boules fermées sont compactes.

$$= (L(t,\varphi_0(t)+h(t)) - L(t,\varphi_0(t)) - D_2L(t,\varphi_0(t))\cdot h(t))_t$$

et par l'inégalité de la moyenne :

$$| L(t,\varphi_0(t)+h(t)) - L(t,\varphi_0(t)) - D_2L(t,\varphi_0(t))\cdot h(t) | \leq$$
$$\leq \sup_{\theta\in[0,1]} |D_2L(t,\varphi_0(t)+\theta h(t)) - D_2L(t,\varphi_0(t))| \; | h(t) | \,.$$

Soit K le même compact que dans la preuve précédente, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in]0,1[$ et un entourage $U \in \mathcal{U}_G$ tel que :

$$\big[(t,s)\in U, (x,y)\in K^2, | x-y | \leq \eta\big] \Longrightarrow [| D_2L(t,x) - D_2L(s,y) | \leq \varepsilon] \,.$$

Posant $x := \varphi_0(t)$, $y := \varphi_0(t)+\theta h(t)$, $s = t$ et passant au sup, on obtient :

$$[\|h\|_{\ell^\infty} \leq \eta] \Longrightarrow \left[\sup_{\theta\in[0,1]} |D_2L(t,\varphi_0(t)+\theta h(t)) - D_2L(t,\varphi_0(t))|\right] \leq \varepsilon$$

d'où :

$$[\|h\|_{\ell^\infty} \leq \eta] \Longrightarrow [|\mathcal{N}_{\tilde L}(\varphi_0+h) - \mathcal{N}_{\tilde L}(\varphi_0) - (D_2L(t,\varphi_0(t))\cdot h(t))_t| \leq \varepsilon \|h\|_{\ell^\infty}]$$

ce qui montre la Fréchet-différentiabilité. La continuité de $\mathcal{N}'_{\tilde L}$ s'obtient en appliquant la proposition précédente à $D_2\mathcal{N}_{\tilde L}$, puisque formellement "$\mathcal{N}'_{\tilde L} = \mathcal{N}_{D_2\tilde L}$."
■

5.3.2 Fonctions et suites p.p. en moyenne à paramètres

On étend ici légèrement la définition donnée dans [41]. On se donne K un compact de $\mathbb{R}^k$.

Définition 5.3.2.1 *On dit que $f : \mathbb{R}\times K \to \mathbb{H}$ est p.p. en moyenne si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p, p fonctions $c_1, \cdots, c_p \in C^0(K,\mathbb{E})$ et p réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_K \left| f(t,s) - \sum_{j=1}^p c_j(s) e_{\lambda_j}(t)\right|^2 ds \leq \varepsilon.$$

Notons que ceci revient à dire que $f \in C^0(b\mathbb{R}, L^2(K,\mathbb{H}))$, avec les identifications déjà introduites. On notera aussi que cette définition s'adapte aussi au cadre des suites p.p. ou des fonctions q.p., ce qui amène à parler de $C^0(G, L^2(K,\mathbb{H}))$.
Il est également important de noter que d'un point de vue hilbertien, il serait loisible de compléter $C^0(G, L^2(K,\mathbb{H}))$ pour le produit scalaire :

$$((f \mid g)) := \int_G < f(t,\cdot); g(t,\cdot) >_{L^2(K,\mathbb{H})} d\mu_G(t)$$

et que l'on obtient alors $L^2(G, L^2(K,\mathbb{H}))$ grâce à la régularité de la mesure μ_G (et par compacité de G). Grâce au théorème de Fubini, il est possible de démontrer que cet espace est isomorphe et isométrique en tant qu'espace de Hilbert à $L^2(G\times K,\mathbb{H})$. En revanche, comme nous le verrons, les bonnes conditions sont celles de Carathéodory, et une fonction de $L^2(G\times K,\mathbb{H})$ ne satisfait pas nécessairement **(C2)**.

Propriétés de mesurabilité

L'étude des opérateurs de Nemytskii qui suit est adaptée de [43]. Par souci de simplification d'exposé, on travaille directement avec $\tilde{L}$ que l'on note L, et sur des sous-espaces de $(\mathbb{R}^\ell)^{G\times\mathbb{R}^k}$. On supposera dans toute la suite que L est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

(C1) $\forall s \in \mathbb{R}^k$, $f(\cdot, s)$ est mesurable.

(C2) Pour presque tout $x \in G$, $f(x, \cdot)$ est continue.

Proposition 5.3.2.2 *Si $u : G \to \mathbb{R}^k$ est mesurable, $\mathcal{N}_L(u)$ est mesurable.*

Démonstration. Il existe une suite de fonctions simples $(u_n)_n$ convergeant presque-partout vers u. $\mathcal{N}_L(u_n)$ est mesurable en raison de **(C1)**, et par **(C2)**, $\mathcal{N}_L(u_n) \to \mathcal{N}_L(u)$ presque-partout. Ainsi, $\mathcal{N}_L(u)$ est mesurable.■

Proposition 5.3.2.3 *Si $u_n \to u$ en mesure, alors $\mathcal{N}_L(u_n) \to \mathcal{N}_L(u)$ en mesure.*

Démonstration. Introduisons la fonction :

$$\hat{L}(x, s) := L(x, s + u(x)) - L(x, u(x)).$$

$\hat{L}$ est de Carathéodory, et notre énoncé revient à montrer que si $v_n \to 0$ en mesure, alors $\mathcal{N}_{\hat{L}}(v_n) \to \mathcal{N}_{\hat{L}}(0) = 0$ en mesure, i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0 \quad \mu_G(\{x \in G \ :\ |\hat{L}(x, v_n(x))| \leq \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Posons $B_k := \{x \in G \ :\ (|s| < 1/k) \Rightarrow (|\hat{L}(x, s)| \leq \varepsilon)\}$. $(B_k)_k$ est une famille croissante de réunion G modulo un négligeable, en raison de **(C2)**. On en déduit que quand $k \to +\infty$, $\mu_G(B_k) \to 1$, et donc il existe k_0 tel que si $k \geq k_0$, $\mu_G(B_k) \geq 1 - \varepsilon/2$.
Soit $A_n := \{x \in G \ :\ |v_n(x)| < 1/k_0\}$. Comme $v_n \to 0$ en mesure, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$, $\mu_G(A_n) \geq 1 - \varepsilon/2$. Soit enfin $D_n := \{x \in G \ :\ |\hat{L}(x, v_n(x)| \leq \varepsilon\}$. On a $A_n \cap B_{k_0} \subset D_n$, donc pour tout $n \geq n_0$, $\mu_G(D_n) \geq 1 - \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\forall n \geq n_0 \qquad \mu_G(D_n^c) \leq \varepsilon$$

ce qui termine la démonstration.■

Continuité des opérateurs de Nemytskii

Considérons l'hypothèse **(H2)** suivante :
il existe $c > 0$, $b \in L^q(G, \mathbb{R})$ et $r > 0$ tels que :

$$\forall (x, s) \in G \times \mathbb{R}^k \qquad |L(x, s)| \leq c|s|^r + b(x).$$

Proposition 5.3.2.4 *Si L est de Carathéodory et vérifie* **(H2)**, *alors $\mathcal{N}_L$ envoie $L^{qr}(G,\mathbb{R}^k)$ dans $L^q(G,\mathbb{R}^\ell)$, et $\mathcal{N}_L$ est continu borné.*

Démonstration. On note déjà que :

$$\|\mathcal{N}_L(u)\|_{L^q(G,\mathbb{R}^\ell)} \leq c\||u|^r\|_{L^q(G,\mathbb{R})} + \|b\|_{L^q(G,\mathbb{R})}$$

ce qui montre à la fois que $\mathcal{N}_L\left(L^{qr}(G,\mathbb{R}^k)\right) \subset L^q(G,\mathbb{R}^\ell)$ et que $\mathcal{N}_L$ est borné. Supposons que $u_n \to u$ dans $L^{qr}(G,\mathbb{R}^k)$. Si $\mathcal{N}_L(u_n)$ ne tend pas vers $\mathcal{N}_L(u)$, il existe une sous-suite n'ayant aucune sous-suite convergeant vers $\mathcal{N}_L(u)$. Comme $(u_n)_n$ converge et que $\mathcal{N}_L$ est borné, quitte à extraire encore une fois, on peut supposer que notre suite est bornée dans L^{qr}. Par souci de simplicité, on note $(u_{\phi(n)})_n$ la dernière sous-suite obtenue, qui vérifie donc $|u_{\phi(n)}| \leq h \in L^{qr}(G,\mathbb{R})$. Alors on a :

$$|\mathcal{N}_L(u_{\phi(n)})| \leq c|h|^r + b \in L^q(G,\mathbb{R})$$

donc par convergence dominée, $\mathcal{N}_L(u_{\phi(n)}) \to \mathcal{N}_L(u)$, ce qui est une contradiction.■

La réciproque est vraie. Plus précisément, on a :

Théorème 5.3.2.5 *On suppose que L est de Carathéodory, et que $\mathcal{N}_L$ envoie $L^p(G,\mathbb{R}^k)$ dans $L^q(G,\mathbb{R}^\ell)$. Alors il existe $c > 0$, $b \in L^q(G,\mathbb{R})$ tels que :*

$$(\forall (x,s) \in G \times \mathbb{R}^k) \qquad |L(x,s)| \leq c|s|^{p/q} + b(x).$$

De plus, $\mathcal{N}_L$ est continu et borné.

Démonstration. On la divise en trois étapes : continuité, bornitude puis estimation de L.

1. Continuité de l'opérateur de Nemytskii. On se ramène en 0 par un argument déjà utilisé. On raisonne par contraposition ; on suppose donc que $u_n \to 0$ dans L^p, mais $\mathcal{N}_L(u_n)$ ne tend pas vers 0 dans L^q.
Quitte à faire deux extractions, on peut supposer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{L^p} < +\infty \quad \text{et} \quad \exists a > 0, \qquad \int_G |L(x,u_n(x))|^q d\mu_G(x) \geq a.$$

Soit $B_n := \{x \in G \quad : \quad |f(x,u_n(x))| > (a/3)^{1/q}\}$. Par la proposition 5.3.2.3, $\mu(B_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On construit récurrement une suite $(\epsilon_j)_j$ et une sous-suite $(u_{n_j})_j$ de la façon suivante :

$$\epsilon_1 = 1, \quad u_{n_1} = u_1$$

et si ϵ_j et $u_{n_{j-1}}$ sont construits, on pose :

$$\epsilon_{j+1} < \epsilon_j/2 \ \text{ et } \ (\forall D \subset G) \ \ (\mu_G(D) \leq 2\epsilon_j) \Rightarrow \int_D |L(x,u_{n_j}(x)|^q d\mu_G(x) < a/3.$$

Soit $D_{n_j} := B_{n_j} \setminus \cup_{i \geq j+1} B_{n_i}$. Les D_{n_j} sont deux à deux disjoints, donc il est légitime de poser :

$$u := \sum_{j=1}^{+\infty} u_{n_j} \chi_{D_{n_j}}.$$

$u \in L^p(G, \mathbb{R}^k)$, puisque $\|u\|_{L^p}^p = \sum_j \|u_{n_j}\|_{L^p}^p \leq \sum_n \|u_n\|_{L^p}^p < +\infty$. On va montrer que $\mathcal{N}_L(u) \notin L^q(G, \mathbb{R}^\ell)$, d'où la contradiction. On a :

$$\int_{D_{n_j}} |L(x, u(x))|^q d\mu_G(x) = \int_{B_{n_j}} |\mathcal{N}_L(u_{n_j})|^q d\mu_G(x) - \int_{B_{n_j} \setminus D_{n_j}} |\mathcal{N}_L(u_{n_j})|^q d\mu_G(x).$$

Or

$$\int_{D_{n_j}} |\mathcal{N}_L(u_{n_j})|^q d\mu_G(x) = \int_G |\mathcal{N}_L(u_{n_j})|^q d\mu_G(x) - \int_{G \setminus D_{n_j}} |\mathcal{N}_L(u_{n_j})|^q d\mu_G(x) \geq a - a/3 = 2a/3$$

et de plus

$$\mu_G(B_{n_j} \setminus D_{n_j}) = \mu_G\left(\cup_{i \geq j+1} B_{n_i}\right) \leq \sum_{i \geq j+1} \epsilon_i \leq 2\epsilon_j$$

de sorte que :

$$\int_{B_{n_j} \setminus D_{n_j}} |\mathcal{N}_L(u_{n_j})|^q d\mu_G(x) \leq a/3.$$

Finalement, $\int_{D_{n_j}} |\mathcal{N}_L(u)|^q d\mu_G(x) \geq a/3$ d'où $\|\mathcal{N}_L(u)\|_{L^q} = +\infty$.

2. Bornitude On peut supposer $L(x, 0) = 0$. $\mathcal{N}_L$ est continu en 0 donc il existe $r > 0$ tel que :

$$(\forall u \in L^p(G, \mathbb{R}^k)) \qquad (\|u\|_{L^p} \leq r) \Rightarrow (\|\mathcal{N}_L(u)\|_{L^q} \leq 1.$$

Fixons $u \in L^p(G, \mathbb{R}^k))$, et soit n tel que $nr^p \leq \|u\|_{L^p}^p \leq (n+1)r^p$. On peut alors écrire $G = \cup_{i=1}^{n+1} G_i$ avec $\int_{G_i} |u|^p d\mu_G \leq r^p$. Alors on a :

$$\int_G |\mathcal{N}_L(u)|^q d\mu_G = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{G_i} |\mathcal{N}_L(u)|^q d\mu_G \leq n + 1 \leq \left(\frac{\|u\|_{L^p}^p}{r} \right)^p + 1$$

ce qui est la bornitude.

3. Estimation de f. Comme $\mathcal{N}_L$ est borné, il existe $c > 0$ tel que :

$$\|u\|_{L^p}^p \leq 1 \quad \Rightarrow \|\mathcal{N}_L(u)\|_{L^q}^q \leq c^q.$$

Soit $H : G \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ défini par :

$$H(x, s) := \max\{|L(x, s)| - c|s|^{p/q}; 0\}.$$

H est de Carathéodory. Constatant que si $\alpha \in [0,1]$, on a $\alpha^q + (1-\alpha)^q \leq 1$, on remarque que si $H(x,s) > 0$, on a $f(x,s) \neq 0$ et :

$$\left(\frac{H(x,s)}{|L(x,s)|}\right)^q + \left(1 - \frac{H(x,s)}{|L(x,s)|}\right)^q \leq 1$$

i.e. :

$$H(x,s)^q + c^q|s|^p \leq |L(x,s)^q|$$

d'où :

$$H(x,s)^q \leq |L(x,s)^q| - c^q|s|^p. \tag{5.4}$$

Soit $u \in L^p(G,\mathbb{R}^k)$ et $D := \{x \in G \ : \ H(x,u(x)) > 0\}$. Soit

$$n := E\left(\int_D |u|^p d\mu_G\right), \quad \epsilon := \int_D |u|^p d\mu_G - n$$

et $D_1, ..., D_{n+1}$ tels que $D = \cup_i D_i$ et pour tout i, $\int_{D_i} |u|^p d\mu_G \leq 1$. Par définition de c, on a :

$$\int_D |\mathcal{N}_L(u)|^q d\mu_G \leq (n+1)c^q$$

donc, en tenant compte de (5.4) :

$$\int_D H(x,u(x))^q d\mu_G(x) \leq (n+1)c^q - (n+\epsilon)c^q \leq c^q. \tag{5.5}$$

On admet le lemme suivant pour lequel on renvoie à [43] p.12 :

Lemme 5.3.2.6 *Soit $f : G \times K \to \mathbb{R}$ de Carathéodory, où K est un compact de $\mathbb{R}^k$, $c(x) := \max_{s\in I} f(x,s)$. Alors c est mesurable, et il existe $\hat{u}$ mesurable t.q. $c(x) = f(x,\hat{u}(x))$ pour presque tout x.*

Modulo le lemme, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver u_m mesurable t.q. :

$$b_m(x) := \sup_{|s|\leq m} H(x,s) = H(x,u_m(x)).$$

Par (5.5), b_m est dans $L^q(G,\mathbb{R}^k)$ et $\|b_m\|_{L^q} \leq c$. Soit $b(x) := \sup_s H(x,s) = \lim_m b_m(x)$. Par Fatou, on a :

$$\int_G \liminf_m |b_m|^q d\mu_G \leq \liminf_m \int_G |b_m|^q d\mu_G \leq c^q$$

donc $b \in L^q(G,\mathbb{R})$ et $\|b\|_{L^q} \leq c$.■

Différentiabilité des opérateurs de Nemytskii

On formule ici l'hypothèse **(H3)** suivante :
D_2L existe, est de Carathéodory, et vérifie une estimation du type :

$$(\forall (x,s) \in G \times \mathbb{R}^k) \quad |D_2L(x,s)| \leq c|s|^\gamma + b(x)$$

où $c > 0$, $\gamma > 0$ et $b \in L^\delta(G, \mathbb{R}^+)$.

Lemme 5.3.2.7 *On suppose* **(H3)** *vérifiée, et l'on pose $p := \gamma\delta$, $q := \frac{\gamma\delta}{\gamma+1}$. On suppose que $L(.,0) \in L^q(G, \mathbb{R}^k)$. Alors :*

1. $\mathcal{N}_L(L^p(G, \mathbb{R}^k)) \subset L^q(G, \mathbb{R}^\ell)$.

2. $\mathcal{N}_{D_2L}(L^p(G, \mathbb{R}^k)) \subset L^\delta(G, \mathbb{R}^\ell)$.

Remarque 5.3.2.8 *Ici, on a $p/q = \gamma + 1 > 1$ donc $p > q$.*

Démonstration. Posons $a(x) := |L(x,0)|$. $a(\cdot) \in L^q$, et de plus, on a :

$$|L(x,s)| \leq \frac{c}{\gamma+1}|s|^{\gamma+1} + b(x)|s| + a(x).$$

Rappelons que si α et β sont des exposants conjugués, on a :

$$|ab| \leq \frac{|a|^\alpha}{\alpha} + \frac{|b|^\beta}{\beta}.$$

Appliquant cette majoration, il vient :

$$b(x)|s| \leq \frac{1}{\gamma+1}|s|^{\gamma+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1} b(x)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

soit :

$$|L(x,s)| \leq \frac{c+1}{\gamma+1}|s|^{\gamma+1} + a(x) + b(x)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

et comme :

$$\|b^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\|_{L^q}^q = \int |b|^\delta < +\infty$$

on a $b^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \in L^q(G, \mathbb{R})$, donc $\mathcal{N}_L(L^p(G, \mathbb{R}^k)) \subset L^q(G, \mathbb{R}^\ell)$. Comme $p/\delta = \gamma$, on a bien $\mathcal{N}_{D_2L}(L^p(G, \mathbb{R}^k)) \subset L^\delta(G, \mathbb{R}^\ell)$.■

Théorème 5.3.2.9 *Avec les notations du lemme, $\mathcal{N}_L$ est différentiable, et :*

$$\mathcal{N}_L'(u).h = \mathcal{N}_{D_2L}(u).h.$$

Démonstration. Soit

$$R(v) := \mathcal{N}_L(u+v) - \mathcal{N}_L(u) - D_2L(.,u).v.$$

Comme on a :

$$\mathcal{N}_L(u+v) - \mathcal{N}_L(u) = \left[x \mapsto \int_0^1 D_2L(x,u(x)+tv(x))v(x)dt\right]$$

il vient :

$$\int_G |R(v)|^q d\mu_G =$$

$$\int_G \left| \int_0^1 \left(D_2L(x,u(x)+tv(x)) - D_2L(x,u(x)+tv(x))\right) v(x)dt\right|^q d\mu_G(x) \leq$$

$$\leq \|v\|_{L^p}^q \left[\int_0^1 \int_G |D_2L(x,u(x)+tv(x))v(x) - D_2L(x,u(x)+tv(x))|^\delta \, d\mu_G(x)dt\right]^{q/\delta}.$$

Comme $\mathcal{N}_{D_2L} \in C^0(L^p, L^\delta)$, le crochet tend vers 0 quand v tend vers 0 dans L^p.■

Il nous reste à étudier les cas où $p = q$. On formule l'hypothèse **(H4)** suivante :

$$(\exists M > 0)(\forall (x,s) \in G \times \mathbb{R}^k) \quad |D_2L(x,s)| \leq M.$$

Lemme 5.3.2.10 *Sous* **(H4)**, *on a pour tout* $p \geq 1$ *:*

1. $\mathcal{N}_{D_2L} : L^p(G,\mathbb{R}^k) \longrightarrow L^\infty(G,\mathbb{R}^\ell)$.
2. *Si* $f(.,0) \in L^p(G,\mathbb{R}^k)$*, alors* $\mathcal{N}_L : L^p(G,\mathbb{R}^k) \longrightarrow L^p(G,\mathbb{R}^\ell)$.

Ce lemme est immédiat. On va montrer que $\mathcal{N}_L$ est toujours Gâteaux-différentiable.

Théorème 5.3.2.11 *Sous* **(H4)**, $\mathcal{N}_L$ *est Gâteaux-différentiable.*

Démonstration. Fixons u et v. Soit :

$$R_t(x) := \frac{L(x,u(x)+tv(x)) - L(x,u(x))}{t} - D_2L(x,u(x)) \cdot v(x).$$

On peut écrire :

$$R_t(x) = \int_0^1 \left[D_2L(x,u(x)+t\tau v(x)) - D_2L(x,u(x))\right] v(x)d\tau$$

donc :

$$\int_G |R_t|^p d\mu_G = \int_G \left|\int_0^1 \left[D_2L(x,u(x)+t\tau v(x)) - D_2L(x,u(x))\right] v(x)d\tau\right|^p d\mu_G(x)$$

qui en raison de l'inégalité de Hölder puis de la version positive du théorème de Fubini est majoré par :

$$\int_0^1 \int_G |D_2L(x, u(x) + t\tau v(x)) - D_2L(x, u(x))|^p |v(x)|^p d\mu_G(x) d\tau.$$

L'intégrande tend presque partout vers 0 lorsque $t \to 0$, et est dominé par $(2M)^p|v|^p \in L^1([0,1] \times G, \mathbb{R})$. Le théorème de convergence dominée assure donc que $\lim_{t\to 0} R_t = 0$ dans $L^p(G, \mathbb{R}^\ell)$, de sorte que $\mathcal{N}_L$ est Gâteaux-différentiable.■

Remarque 5.3.2.12 *En suivant [43], on pourrait montrer que lorsque G est métrisable, la Fréchet-différentiabilité de $\mathcal{N}_L$ n'est possible que lorsque $f(x, s) = a(x)s + b(x)$. Mais j'ignore si ceci est encore vrai si G n'est pas métrisable.*

Exemple 5.3.2.13 *Prenons l'exemple des hypothèses assurant que $\mathcal{N}_L$ envoie $L^2(G, \mathbb{R}^k)$ dans $L^1(G, \mathbb{R}^\ell)$, que nous aurons souvent à traiter.*
Pour L de Carathéodory, l'hypothèse **(H2)**, *qui est nécessaire et suffisante pour assurer que $\mathcal{N}_L$ envoie $L^2(G, \mathbb{R}^k)$ dans $L^1(G, \mathbb{R}^\ell)$ est :*

$$(\forall (x, s) \in G \times \mathbb{R}^k) \qquad |L(x, s)| \leq c|s|^2 + b(x)$$

avec $c, r > 0$ et $b \in L^1(G, \mathbb{R})$.

Pour D_2L de Carathéodory, on aura $\mathcal{N}_{D_2L}$ envoyant L^2 dans L^1, si l'on suppose que :

$$(\forall (x, s) \in G \times \mathbb{R}^k) \qquad |D_2L(x, s)| \leq c|s|^2 + b(x)$$

avec $c > 0$, $b(.) \in L^1(G, \mathbb{R})$. Supposant en outre que $L(\cdot, 0) \in L^2(G, \mathbb{R}^\ell)$, $\mathcal{N}_L$ envoie $L^2(G, \mathbb{R}^k)$ dans $L^2(G, \mathbb{R}^\ell)$ et si G est compact dans $L^1(G, \mathbb{R}^\ell)$ (car G est de mesure finie).

5.4 Théorèmes de structure et d'existence pour des équations d'Euler discrètes

Fixons un entier $N \geq 1$. On se donne un lagrangien L dont la dépendance en t est p.p. suivant précisions ci-après. On associe à L une équation d'Euler :

$$D_1L_t(x_t, x_{t+1}) + D_2L_{t-1}(x_{t-1}, x_t) = 0 \tag{5.6}$$

La première sous-section relie cette équation à des points critiques d'une fonctionnelle J. Nous exploiterons ces liens dans les deux autres sous-sections.

5.4.1 Principes variationnels

On suppose que le Lagrangien L satisfait **(H1)** avec $k = 2N$. A partir de L, on définit une fonctionnelle $J : AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$J(\underline{x}) := \mathcal{M}\{L_t(x_t, x_{t+1})\}_t.$$

Lemme 5.4.1.1 *J est de classe C^1, et :*

$$J'(\underline{x}) \cdot \underline{h} = \mathcal{M}\{(D_1 L_t(x_t, x_{t+1}) + D_2 L_{t-1}(x_{t-1}, x_t)).h_t\}_t.$$

Preuve. Considérons l'opérateur linéaire $T : AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N) \to AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)^2$ défini par : $T((x_t)_t) := (x_t; x_{t+1})_t$. C'est un opérateur continu, donc de classe C^1.
On a :

$$J := \mathcal{M} \circ \mathcal{N}_L \circ T$$

donc J est C^1 comme composé de trois opérateurs C^1, et par la règle de composition, il vient :

$$J'(\underline{x}) \cdot \underline{h} = \mathcal{M}\{D_1 L_t(x_t, x_{t+1}).h_t + D_2 L_t(x_t, x_{t+1}).h_{t+1}\}_t$$

et enfin par l'invariance de la moyenne par rapport aux translations :

$$\mathcal{M}\{D_2 L_t(x_t, x_{t+1}).h_{t+1}\}_t = \mathcal{M}\{D_2 L_{t-1}(x_{t-1}, x_t).h_t\}_t$$

ce qui termine la preuve du lemme.■

Proposition 5.4.1.2 *Sont équivalentes les assertions suivantes :*

1. *$\underline{x}$ est une solution $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ p.p. de (5.6).*
2. *$\underline{x}$ est un point critique de J sur $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Par le lemme (5.4.1.1), on a juste à démontrer que **(1)** implique **(2)**. On prend $(h_t)_t := (D_1 L_t(x_t, x_{t+1}) + D_2 L_{t-1}(x_{t-1}, x_t))_t$ ce qui est loisible puisque $(D_1 L_t(x_t, x_{t+1}) + D_2 L_{t-1}(x_{t-1}, x_t))_t \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$. On a alors : $\mathcal{M}\{\mid h_t \mid^2\}_t = 0$, i.e.:

$$\int_{b\mathbb{Z}} \left(\varphi^{\underline{h}}(\theta)\right)^2 d\mu(\theta) = 0.$$

Comme $\left(\varphi^{\underline{h}}(.)\right)^2$ est continue positive, il vient $\left(\varphi^{\underline{h}}(\theta)\right)^2 = 0$ pour tout θ. Ainsi **(2)** est vraie.■

Considérons maintenant L satisfaisant **(H3)** avec $k = 2N$, $\delta = 1$ et $\gamma = 2$. A partir de L, on définit $J : B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$J(\underline{x}) := \mathcal{M}\{L_t(x_t, x_{t+1})\}_t.$$

Lemme 5.4.1.3 *J est de classe C^1, et :*

$$J'(\underline{x}).\underline{h} = \mathcal{M}\{(D_1L_t(x_t, x_{t+1}) + D_2L_{t-1}(x_{t-1}, x_t)).h_t\}_t.$$

La preuve est identique à celle du lemme 5.4.1.1.

Proposition 5.4.1.4 *Sont équivalentes :*

1. *$\underline{x}$ est une solution $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ p.p. de (5.6).*

2. *$\underline{x}$ est un point critique J de $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition (5.4.1.2), on a juste à démontrer **(1)** implique **(2)**. On pose $(h_t)_t := (D_1L_t(x_t, x_{t+1}) + D_2L_{t-1}(x_{t-1}, x_t))_t$ ce qui est possible puisque $(D_1L_t(x_t, x_{t+1}) + D_2L_{t-1}(x_{t-1}, x_t))_t \in B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$. Il vient : $\mathcal{M}\{\mid h_t \mid^2\}_t = 0$, i.e.:

$$\int_{b\mathbb{Z}} \left(\varphi^{\underline{h}}(\theta)\right)^2 d\mu(\theta) = 0$$

i.e. $\left(\varphi^{\underline{h}}(.)\right)^2 = 0$ dans $L^2(b\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, donc **(2)** est vraie.■

5.4.2 Résultats de structure dans $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$

On donne ici des résultats de structure de l'ensemble des solutions dans $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ de l'équation d'Euler (5.6).
On utilise la structure variationnelle du problème. Quand le lagrangien est concave, cette hypothèse est plus facile à exploiter sur la fonctionnelle J.

Théorème 5.4.2.1

1. *Si L_t est concave (convexe) pour tout t, alors l'ensemble des solutions est un convexe fermé de $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$.*

2. *Si L_t est strictement concave (convexe) pour tout t, l'équation (5.6) a au plus une solution dans $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Supposons par exemple que L_t est concave pour tout t. Grâce au lemme 5.4.1.1, on est ramené à étudier l'ensemble des points critiques de J.
1. Tout d'abord, montrons que J est aussi concave, ce qui montrera aussi que l'ensemble des points critiques de J est identique à l'ensemble des maxima de J, ensemble noté $Argmax(J)$. Si $\underline{x}, \underline{y} \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ et $\lambda \in [0, 1]$, nous avons :

$$J(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) = \mathcal{M}\{L_t(\lambda x_t + (1-\lambda)y_t, \lambda x_{t+1} + (1-\lambda)y_{t+1})\}_t \geq$$

$$\lambda\mathcal{M}\{L_t(x_t, x_{t+1})\}_t + (1-\lambda)\mathcal{M}\{L_t(y_t, y_{t+1})\}_t = \lambda J(\underline{x}) + (1-\lambda)J(\underline{y})$$

donc J est concave. Maintenant, si $\underline{x}, \underline{y} \in Argmax(J)$, il vient :

$$\sup J \geq J(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) \geq \lambda J(\underline{x}) + \lambda J(\underline{y}) = \sup J$$

et $Argmax(J)$ est convexe.
2. Considérons $\underline{x}, \underline{y} \in Argmax(J)$, et montrons que $\underline{x} = \underline{y}$. Soit :

$$z_t := L_t\left(\frac{x_t + y_t}{2}, \frac{x_{t+1} + y_{t+1}}{2}\right) - \frac{L_t(x_t, x_{t+1}) + L_t(y_t, y_{t+1})}{2}$$

Pour tout t, $z_t \geq 0$. Si $\mathcal{M}\{\underline{z}\} = 0$, il vient $\varphi^{\underline{z}} = 0$ puisque cette fonction est continue positive (par **1.**) Par conséquent, il vient $z_t = 0$ pour tout t, et par stricte concavité de L_t pour tout t, $\underline{x} = \underline{y}$. En contraposant, il vient $\underline{x} \neq \underline{y}$, $\mathcal{M}\{\underline{z}\} > 0$, et :

$$J\left(\frac{\underline{x} + \underline{y}}{2}\right) - \frac{J(\underline{x}) + J(\underline{y})}{2} = \mathcal{M}\{\underline{z}\} > 0$$

d'où la contradiction. On notera que l'on peut en fait prouver la stricte concavité de J sous l'hypothèse de celle de L.■

5.4.3 Bornitude et presque-périodicité : extension du critère d'Amerio

La recherche des solutions p.p. peut passer par l'étude des solutions bornées. Outre le fait que les éléments de $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ soient bornés, ceci est aussi justifié par l'étude du cas linéaire basique, i.e. le cas linéaire avec une matrice constante. Dans toute cette sous-section, on cherchera des solutions dans $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$.

Le cas linéaire basique

On commence avec le cas des sommes de suites p.p.:

Lemme 5.4.3.1 *Soit $\underline{x}$ une suite p.p. La suite $(\sum_{j=0}^{t} x_j)_t$ est p.p. si et seulement si elle est bornée.*

Il est connu que pour les fonctions p.p., leurs primitives sont p.p. ssi elles sont bornées. Un calcul immédiat donne :

$$\int_0^{t+1} f_{\underline{x}}(u)du = \frac{x_0 + x_{t+1}}{2} + \sum_{j=0}^{t} x_j.$$

Ainsi, comme $f_{\underline{x}}$ is p.p., le membre de gauche est p.p. ssi il est borné, ce qui termine la démonstration du lemme. ■
Maintenant, on passe au cas linéaire basique. Comme en temps continu, on a :

Proposition 5.4.3.2 *Soit A une matrice carrée d'ordre N, et $\underline{b}$ une suite p.p. à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Alors une solution de :*

$$x_{t+1} = Ax_t + b_t$$

est p.p. si et seulement si elle est bornée. De plus, si A n'a pas de valeur propre de module 1, alors il existe une unique solution p.p.

Démonstration. Comme toute solution p.p. est bornée, on a juste la réciproque à démontrer. Par le théorème de trigonalisation, il existe une matrice triangulaire T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$. Soit $\underline{y}$ défini par $y_t := P^{-1}x_t$. Puisque P est inversible, $\underline{y}$ est p.p. (resp. borné) ssi $\underline{x}$ est p.p. (resp. borné), et $\underline{y}$ est solution du système triangulaire suivant :

$$y_{t+1} = Ty_t.$$

Ainsi, on voit que si la proposition (5.4.3.2) est vraie pour $N = 1$, elle est toujours vraie. On se concentre donc désormais sur le cas scalaire. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\underline{b}$ une suite p.p. On peut se limiter au cas $a \neq 0$ sans quoi le résultat est immédiat. Il y a trois cas.

Cas 1. Si $|a| > 1$, toute solution est de la forme

$$x_t = a^t \left[x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \frac{b_j}{a^{j+1}} \right].$$

Comme $|a^t|$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$, toute solution bornée satisfait nécessairement :

$$x_0 = -\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j}{a^{j+1}}.$$

La série est bien convergente puisque $(b_j)_j$ est bornée et $|a| > 1$. Ainsi une solution bornée est nécessairement de la forme :

$$x_t = a^t \sum_{j=t}^{+\infty} \frac{b_j}{a^{j+1}}.$$

On voit que cette solution est bien bornée, et elle est p.p., puisque :

$$|x_{t+p} - x_t| \leq \frac{\sup_\tau |b_{\tau+p} - b_\tau|}{|a| - 1}$$

de sorte que dans ce cas il n'y a qu'une seule solution bornée et qu'elle est p.p.

Cas 2. Si $|a| < 1$ on raisonne de la même manière, et l'on montrerait que l'unique solution possible est :

$$x_t = a^t \sum_{j=-\infty}^{t-1} \frac{b_j}{a^{j+1}}$$

qui convient.

Cas 3. On considère maintenant le cas où $|a| = 1$. La solution générale peut s'écrire :

$$x_t = a^t \left[x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \frac{b_j}{a^{j+1}} \right].$$

Comme $(a^t)_t$ et bornée et p.p. dans ce cas, on voit qu'il y a une solution bornée (resp. p.p.) ssi la suite $(\sum_{j=0}^{t-1} \frac{b_j}{a^{j+1}})_t$ est bornée (resp. p.p.). Par le lemme précédent, comme $(\frac{b_t}{a^{t+1}})_t$ est p.p., ces faits sont équivalents, et donc la démonstration est complète. Notons que dans ce cas, ou bien aucune solution n'est p.p., ou bien elles le sont toutes.■

Corollaire 5.4.3.3 *Considérons l'équation:*

$$\sum_{j=0}^{p} a_j x_{t+j} = b_t$$

vec $a_j \in \mathbb{R}$, $\underline{b} \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, et on suppose qu'il existe $s \in \{0, ..., p\}$ tel que :

$$|a_s| > \sum_{j \neq s} |a_j|.$$

Alors il existe une unique solution dans $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

Démonstration. Le polynôme caractéristique est $P(z) := \sum_{j=0}^{p} a_j z^j$. Il est suffisant de démontrer que P n'a pas de racine de module 1. S'il existait un tel zéro, z_0, on aurait $a_s z_0^s = -\sum_{j \neq s} a_j z_0^j$ et donc $|a_s| \leq \sum_{j \neq s} |a_j|$, ce qui est impossible. Donc P n'a pas de racine de module 1, d'où le résultat grâce à la proposition précédente.■

Remarque 5.4.3.4 *Si P a une racine de module 1, l'équation peut n'avoir aucune solution p.p. Par exemple :*

$$x_{t+1} + x_t = (-1)^t$$

n'a pas de solution p.p.

Version discrète du critère d'Amerio

On considère maintenant des systèmes non linéaires. On établit une version discrète du critère d'Amerio assurant que toute solution bornée soit presque-périodique.
On considère de manière générale un système :

$$x_{t+1} = A_t(x_t) \tag{5.7}$$

où $A \in APU(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Soit $\mathcal{F}$ l'enveloppe de A, i.e. que $B \in \mathcal{F}$ si et seulement si il existe $(h_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tel que $A(. + h_n, .) \to B$ uniformément sur $\mathbb{R} \times K$ pour tout compact K. A $B \in \mathcal{F}$, on associe le système suivant :

$$y_{t+1} = B_t(y_t) \tag{5.8}$$

On fixe maintenant un compact connexe K, et l'on note $D = \mathbb{R} \times K$. Pour un système tel que (5.7), on dit que $\underline{x}$ est une solution séparée dans D si soit c'est la seule solution vérifiant $Gr(\underline{x}) \subset D$ soit pour toute autre solution $\underline{y}$ satisfaisant la même condition, il existe $\rho = \rho(\underline{y}) > 0$ tel que pour tout t, $\|x_t - y_t\| \geq \rho$. Notez que comme $f_{\underline{x}} - f_{\underline{y}} = f_{\underline{x}-\underline{y}}$, on a aussi $\|f_{\underline{x}}(t) - f_{\underline{y}}(t)\| \geq \rho$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lemme 5.4.3.5 *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Si Φ est un sous-ensemble de toutes les suites $\underline{x}$ p.p. satisfaisant $Gr(\underline{x}) \subset D$, alors l'ensemble $\{f_{\underline{x}}, \underline{x} \in \Phi\}$ is relativement compact dans tout e.v.n. $C^0([a,b], \mathbb{R}^N)$ avec $-\infty < a < b < +\infty$.*

2. *Si (5.7) n'a que des solutions separées, alors il existe un nombre fini de solutions.*

3. *Si (5.7) a une solution $\underline{x}$ telle que $Gr(\underline{x}) \subset D$, alors (5.8) a une solution $\underline{y}$ vérifiant $Gr(\underline{y}) \subset D$.*

4. *Si (5.7) a une solution $\underline{x}$ telle que $x_t \in K$ pour tout $t \geq t_0$, alors (5.8) a une solution $\underline{y}$ telle que $y_t \in K$ pour tout t.*

5. *Si tout système (5.8) a des solutions séparées, alors il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout $B \in \mathcal{F}$, et tous $\underline{y^i}$, $i = 1, 2$ solutions du système (5.8), on ait pour tout t, $\|y_t^1 - y_t^2\| \geq \sigma$.*

Démonstration.
1. Soit $M := \sup_{\zeta \in K} \|\zeta\|$. Puisque pour tout t, $\|x_t\| \leq M$ et $\|x_{t+1} - x_t\| \leq 2M$, on a par construction de $f_{\underline{x}}$, $\|f_{\underline{x}}(t)\| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\|f_{\underline{x}}(u) - f_{\underline{x}}(v)\| \leq 2M\|u - v\|$. Donc cette famille est équicontinue et équibornée, de sorte que le théorème d'Ascoli donne le résultat.
2. Considérons la famille de toutes les solutions séparées. Si elle était infinie, on pourrait choisir une famille infinie $(f_{\underline{x^{(n)}}})_n$ à termes distincts qui convergerait uniformément sur tout compact (cf. 1.). Alors la limite serait une solution du système non séparée, ce qui aboutit à une contradiction.
3. Soit $B \in \mathcal{F}$ quelconque. Soit $(h_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tel que $A(.+h_n, .) \to B$. Par le point 1. de ce lemme, la famille $f_n := f_{\underline{x}}(.+h_n)$ a une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact. La limite est une solution du problème.
4. Considérons $\underline{x}^{(n)} := (x_{t-n})_t$. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $N(\alpha) := t_0 - \alpha$. La famille $\{f_{\underline{x}^{(n)}}; n \geq N(\alpha)\}$ est équibornée et équicontinue, donc il existe une suite $(k_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle qu'ont ait uniformément sur tout compact $f_{\underline{x}}(.+k_n) \to f_{\underline{y}}$ et $A(.+k_n, Y) \to C(., Y)$. Alors $y_{t+1} = C(t, y_t)$, $t \geq \alpha$ pour tout α et l'on peut appliquer le point 3. de ce lemme à cette équation.
5. Soit $\sigma > 0$ tel que la condition de séparation pour (5.7) soit réalisée avec σ. Etant données deux solutions $\underline{z}^i$ $(i = 1, 2)$ de (5.7), il existe une suite commune

$(h_n)_n$ telle que $(z^i(.+h_n))_n$ converges uniformément vers une suite $(y^i_t)_t$. On a :

$$\sigma \leq \inf_{t\in\mathbb{R}} \|f_{\underline{z^1}}(t) - f_{\underline{z^2}}(t)\| \leq \|y^1_t - y^2_t\|$$

donc $\underline{y^1}$ et $\underline{y^2}$ sont distinctes. Ainsi pour tout B, les équations (5.7) et (5.8) ont le même nombre de solutions et le terme σ pour l'équation (5.7) est valable pour (5.8). ■

On en vient à la version discrète du critère d'Amerio.

Théorème 5.4.3.6 *Si tous les systèmes (5.8) ont des solutions séparées dans un compact fixé, alors toutes ces solutions sont p.p.*

Démonstration. Considérons $\underline{x}$ une solution de (5.7) et une suite $(h_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On doit montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_{\underline{x}}(.+h_n))_n$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$. Suivant la preuve du point 3. du lemme 5.4.3.5, on peut supposer que $f_{\underline{x}}(.+h_n) \to f_{\underline{z}}$ uniformément sur les compacts. On suppose que la conclusion est fausse. Puisque l'on a uniformément $A(.+h_n,.) \to B$, on a $z_{t+1} = B(t, z_t)$. Par le point 4. du lemme 5.4.3.5, il existe $\rho > 0$ tel que si $(y^i_t)_t$ sont deux solutions de (5.7), alors $\inf_t \|z^1_t - z^2_t\| \geq 2\rho$. Pour $n < p$, considérons $\phi_{n,p}(t) := \|f_{\underline{x}}(t+h_n) - f_{\underline{x}}(t+h_p)\|$ et $I_{n,p} = \phi^{-1}_{n,p}(\mathrm{cl}(B(0;\rho)))$. $\phi_{n,p}$ est continu, $I_{n,p}$ est fermé, non vide pour (n,p) assez grand (puisque $0 \in I_{n,p}$ pour n,p grands). Considérons $\delta_{n,p} := \sup_{t\in I_{n,p}} \phi_{n,p}(t)$. On a $\delta_{n,p} \leq \rho$ et $\lim_{n,p\to+\infty} \delta_{n,p} \neq 0$ (sinon, $(f_{\underline{x}}(.+h_n))_n$ serait uniformément convergente). Donc $\limsup \delta_{n,p} =: 2\alpha > 0$. Ainsi on a des suites strictement croissantes $(n_r)_r, (p_r)_r$ telles que $\delta_{n_r,p_r} \geq 3\alpha/2$ i.e. il existe pour tout r, t_r tel que : $\phi_{n_r,p_r}(t_r) \geq \alpha$. Alors :

$$\alpha \leq \|f_{\underline{x}}(t_r + h_{n_r}) - f_{\underline{x}}(t_r + h_{p_r})\| \leq \rho$$

et quite à extraire, on peut trouver deux vecteurs U, V tels que $f_{\underline{x}}(t_r + h_{n_r}) \to U$ et $f_{\underline{x}}(t_r + h_{p_r}) \to V$, et ainsi $\alpha \leq \|U - V\| \leq \rho$.
Quite à extraire encore, on peut supposer que $f_{\underline{x}}(.+t_r+h_{n_r})_r \to \underline{z}^1$ et $f_{\underline{x}}(.+t_r+h_{p_r}) \to \underline{z}^2$ qui sont solutions d'équations $z^i_{t+1} = B^i_t(z^i_t)$ avec $\alpha \leq \|z^2_0 - z^1_0\| \leq \rho$. Il est immédiat que $B^2 = B^1$, et puisque $z^2_0 \neq z^1_0$, il vient pour tout t, $\|z^2_t - z^1_t\| \geq 2\rho$, ce qui est contradictoire. ■

Comme conséquence, on obtient une version discrète d'un énoncé de Favard.

Corollaire 5.4.3.7 *Soit le système linéaire*

$$x_{t+1} = A_t x_t + b_t \tag{5.9}$$

où A et b sont p.p. On suppose que pour tout Ξ dans l'enveloppe de A, le système :

$$x_{t+1} = \Xi_t x_t$$

n'a que 0 comme solution bornée. Alors toute solution bornée de (5.9) est p.p.

Démonstration. Il y a au plus une solution bornée, puisque la différence entre deux solutions est une solution du système homogène : $x_{t+1} = A_t x_t$. Soit $(h_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tel que $\tau_{h_n} A \to \Xi$ et $\underline{C} := \lim \tau_{h_n} b$. Chaque systéme

$$x_{t+1} = \Xi_t x_t + C_t$$

a une solution bornée (cf 5.4.3.5, point 3) qui est unique donc séparée. Ainsi, toute solution de (5.9) est p.p.■

5.4.4 Résultats dans $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$

Théorème 5.4.4.1 (Un cas linéaire) *Considérons l'équation d'Euler suivante :*

$$M_t x_{t+1} + \Lambda_t x_t + M_{t-1} x_{t-1} = N_t.$$

On suppose que $(\Lambda_t)_t, (M_t)_t \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ et $(N_t)_t \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ et qu'il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on ait : $\epsilon \Lambda_t \geq \alpha$. Alors (5.6) a une unique solution p.p. $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ dès que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. $\epsilon = 1$ *et* $\|(M_t)_t\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} < \inf_{t \in \mathbb{Z}} \Lambda_t$.

2. $\epsilon = -1$ *et* $\|(M_t)_t\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} < -\sup_{t \in \mathbb{Z}} \Lambda_t$.

Démonstration. Cette équation est associée au Lagrangien :

$$L_t(x, y) := \Lambda_t \mid x \mid^2 + 2M_t x \cdot y + 2N_t \cdot x.$$

Changeant L en $-L$, on peut se ramener au cas où $\epsilon = 1$. Choisissons $\alpha := \inf_t \Lambda_t$. $\underline{x}$ est un point critique s'il satisfait :

$$(\forall \underline{y} \in B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)) \qquad a(\underline{x}, \underline{y}) = \ell(\underline{y})$$

où :

$$a(\underline{x}, \underline{y}) := \mathcal{M}\{\Lambda_t x_t \cdot y_t + M_t(x_t \cdot y_{t+1} + x_{t+1} \cdot y_t)\}_t$$

et :

$$\ell(\underline{y}) := -2\mathcal{M}\{N_t \cdot y_y\}_t.$$

Par l'inégalité de Cauhy-Schwarz, on voit que a (resp. ℓ) est une forme bilinéaire (resp. linéaire) continue. Le lemme de Lax-Milgram prouve qu'il y a une et une seule solution dès que a est elliptique.
On a :

$$a(\underline{x}, \underline{x}) \geq \alpha \mathcal{M}\{\mid x_t \mid^2\}_t - 2m\mathcal{M}\{\mid x_t \cdot x_{t+1} \mid\}_t$$

et puisque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\mathcal{M}\{\mid x_t \cdot x_{t+1} \mid\}_t \leq \|\underline{x}\|_2^2$$

il vient :
$$a(\underline{x}, \underline{x}) \geq (\alpha - m)\|\underline{x}\|_2^2$$
d'où l'ellipticité puisque $\alpha - m > 0$ par hypothèse.■

Considérons maintenant les problèmes concaves coercifs.

Théorème 5.4.4.2 (Le cas concave coercif) *Si le Lagrangien L satisfait* **(H2)** *, et les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, L_t est concave.*
2. *Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta > 0$ et $\gamma \in L^1(b\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$:*
$$L_t(x, y) \leq -\left(\alpha \mid x \mid^2 + \beta \mid y \mid^2\right) + \gamma(t).$$

Alors il existe une solution $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ p.p. de (5.6).

Démonstration. Par la proposition 5.4.1.4, on se ramène à la recherche des maxima de J. Comme $J(\underline{x}) \leq -(\alpha + \beta)\|\underline{x}\|_2^2 + \mathcal{M}\{\mid \gamma_t \mid\}_t$, il vient : $\lim_{\|\underline{x}\|_2 \to +\infty} J(\underline{x}) = -\infty$. Soit $\sigma := \sup_{\underline{x} \in B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)} J(\underline{x})$. Puisque $\lim_{\|\underline{x}\|_2 \to +\infty} J(\underline{x}) = -\infty$ et J est concave, on a $\sigma < +\infty$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $\underline{x}^{(n)}$ tel que $J(\underline{x}^{(n)}) \geq \sigma - 1/n$. Puisque $\lim_{\|\underline{x}\|_2 \to +\infty} J(\underline{x}) = -\infty$, $(\underline{x}^{(n)})_n$ est bornée dans l'espace de Hilbert $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$, elle admet une sous-suite faiblement convergente $(\underline{x}^{(n_k)})_k$. Si $\underline{x}$ est la limite, comme J est concave, on a :
$$J(\underline{x}) \geq \lim_{k \to +\infty} J\left((\underline{x}^{(n_k)})_k\right) = \sigma$$
et donc $\underline{x} \in Argmax(J)$.■

On considère maintenant une équation assez générale avec des conditions de croissance. On démontre un résultat pour une équation non linéaire dont la traduction dans le cas linéaire redonne exactement la condition du corollaire 5.4.3.3. Pour ce faire, on suit les démonstrations des théorèmes d'existence de solutions variationnelles faibles présentées dans le Chapitre 4. On considère désormais l'équation :
$$A_t(x_t, ..., x_{t+p}) = 0 \tag{5.10}$$
où $A : b\mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^N)^{p+1} \to \mathbb{R}^N$ satisfait les hypothèses suivantes :

(H5) $D_2 A$ existe, et A et $D_2 A$ sont de Caratheodory.

(H6) $(A_t(0))_t \in L^2(b\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ et $(DA_t(0))_t \in L^2(b\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

(H7) Il existe $c > 0$ tel que pour tout t, A_t et DA_t sont $c-$Lipschitziens, i.e. :

- $\forall (t,x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $|A(t,x) - A(t,y)| \leq c|x-y|$
- $\forall (t,x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\|DA_t(x) - DA_t(y)\|_{\mathcal{L}} \leq c|x-y|$ où $\|.\|_{\mathcal{L}}$ désigne la norme d'opérateur de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ associée à $|.|$.

(H8) $\exists \gamma > 0$, $\exists s \in \{0,...,p\}$, $\exists \epsilon \in \{-1,1\}$, $\forall v \in \mathbb{R}^N$, $\forall (t,\alpha) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^N)^{p+1}$:

$$\epsilon\, v^T D_{s+1} A_t(\alpha) v \geq \left(\gamma + \sum_{j \neq s} \sup_{(\tau,\beta)} \|D_{j+1} A_\tau(\beta)\|_{\mathcal{L}} \right) |v|^2$$

où v^T est la transposée de v.

Remarque 5.4.4.3 *De* **(H6)** *et* **(H7)**, *on en déduit en particulier qu'il existe $d \in L^2(b\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ tel que :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N, \quad \max\{|A(t,x)|; \|DA_t(x)\|_{\mathcal{L}}\} \leq c|x| + d(t).$$

Dans le reste de cette section, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.4.4.4 *Sous les hypothèses (5.4.4), l'équation (5.10) a une solution dans $B^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$.*

Quite à changer A en $-A$, on peut supposer que $\epsilon = 1$, ce que l'on fait désormais. On considère un $\underline{b} \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ auquel on associe l'équation :

$$A_t(x_t, ..., x_{t+p}) = b_t. \tag{5.11}$$

On définit $\phi_{\underline{b}} : L^2(b\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N) \to (L^2(b\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N))'$ par

$$\phi_{\underline{b}}(\underline{x}) := \left[\underline{v} \mapsto \int_{b\mathbb{Z}} (A_t(x_t, ..., x_{t+p}) - b_t).v_{t+s} d\mu_{b\mathbb{Z}}(t) \right],$$

de sorte que (5.10) s'écrit $\phi_0(\underline{x}) = 0$. On démontre en premier :

Proposition 5.4.4.5 *Il existe $C > 0$ ne dépendant que de A tel que si $\phi_{\underline{b}}(\underline{x}) = 0$ a une solution, alors pour tout $\underline{b'}$ satisfaisant $\|\underline{b'} - \underline{b}\| \leq C$, l'équation $\phi_{\underline{b'}}(\underline{x}) = 0$ a une solution.*

Notons que si cette proposition est vraie, il en est de même du théorème. En effet, soit une chaîne $(\underline{b_j})_{0 \leq j \leq p}$ telle que $\underline{b_0} := (A_t(0))_t$, $\|\underline{b_{j+1}} - \underline{b_j}\| \leq C$ et $\underline{b_p} := 0$. Par récurrence, toute équation $\phi_{\underline{b_j}}(\underline{x}) = 0$ a une solution, donc la dernière aussi.

Prouvons maintenant la proposition 5.4.4.5 ; pour cela, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 5.4.4.6 *$\phi_{\underline{b}}$ est bien défini, continu et Gâteaux-differentiable.*

Démonstration. Puisque les $(A_t)_t$ sont uniformément Lipchiziens, l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_A$ satisfait $\mathcal{N}_A(L^2(b\mathbb{Z},\mathbb{R}^N)^{(p+1)}) \subset L^2(b\mathbb{Z},\mathbb{R}^N)$ et est continu (cf. proposition 5.3.2.4) et donc $\phi_{\underline{b}}$ est bien défini. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, il vient :

$$\|\phi_{\underline{b}}(\underline{x}) - \phi_{\underline{b}}(\underline{y})\|^2_{L^{2\prime}} \leq \int_{b\mathbb{Z}} |A_t(x_t, ...x_{t+p}) - A_t(y_t, ...y_{t+p})|^2 \, d\mu_{b\mathbb{Z}}(t)$$

et puisque l'opérateur de Nemytskii est continu, le membre de droite tend vers 0 lorsque $\underline{y} \to \underline{x}$.
Etudions maintenant la différentiabilité. Fixons $\underline{x}$ et considérons la forme bilinéaire

$$\beta(\underline{h}, \underline{v}) := \int_{b\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{p} (D_{j+1}A_t(x_t, ..., x_{t+p})h_{t+j}).v_{t+s} d\mu_{b\mathbb{Z}}(t).$$

Un candidat naturel à être la différentielle de Gâteaux est $\beta(\underline{h}, .)$. Considérons :

$$\xi(\theta) := \left\| \frac{\phi_{\underline{b}}(\underline{x} + \theta \underline{h}) - \phi_{\underline{b}}(\underline{x})}{\theta} - \beta(\underline{h}, .) \right\|_{L^2(b\mathbb{Z},\mathbb{R}^N)'}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, il vient :

$$\xi(\theta)^2 \leq \int_{b\mathbb{Z}} \psi(\theta, t) d\mu_{b\mathbb{Z}}(t)$$

où :

$$\psi(\theta, t) := \left[\frac{A_t(x_t + \theta h_t) - A_t(x_t)}{\theta} - \sum_{j=0}^{p} D_{j+1}A_t(x_t, ..., x_{t+p})h_{t+j} \right]^2$$

tend vers 0 lorsque $\theta \to 0$, et $\psi(\theta, t)$ est dominé par $8c^2|h_t|^2 \in L^1(b\mathbb{Z},\mathbb{R})$ par l'inégalité de la moyenne. Ainsi, le théorème de Lebesgue permet de conclure. ■

Lemme 5.4.4.7 *La différentielle de Gâteaux $D_G\phi_{\underline{b}}(\underline{x})$ est inversible pour tout $\underline{x}$, et il existe une constante M ne dépendant que de A telle que pour tout $\underline{b}$, $\underline{x}$, on a $\|D_G\phi_{\underline{b}}^{-1}(\underline{x})\| \leq M$.*

Démonstration. Etant donné $L \in (L^2(b\mathbb{Z},\mathbb{R}^N))'$, on cherche les $\underline{h}$ vérifiant pour tout $\underline{v}$ l'équation $\beta(\underline{h}, \underline{v}) = L(\underline{v})$. Puisque L est linéaire continue et β est bilinéaire continue, on peut utiliser le théorème de Lax-Milgram. Notons pour $j \neq s$, $M_j := \sup_{(\tau,\beta)} \|D_{j+1}A_\tau(\beta)\|_{\mathcal{L}}$. On remarque que :

$$\beta(\underline{v}, \underline{v}) = \int_{b\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{p} (D_{j+1}L_t(x_t, ..., x_{t+p})v_{t+j}).v_{t+s} d\mu_{b\mathbb{Z}}(t) \geq$$

$$\int_{b\mathbb{Z}} v_{t+s}^T D_{s+1}A_t(x_t, ..., x_{t+p})v_{t+s} d\mu_{b\mathbb{Z}}(t) - \sum_{j \neq s} M_j \int_{b\mathbb{Z}} |v_{t+j}|.|v_{t+s}| d\mu_{b\mathbb{Z}}(t)$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski dans $\mathbb{R}^N$ et par définition de la norme d'opérateur. Par **(H4)** et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski dans $L^2(b\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$, on obtient :

$$\beta(\underline{v}, \underline{v}) \geq \left(\gamma + \sum_{j \neq s} M_j\right) \int_{b\mathbb{Z}} |v_{t+s}|^2 d\mu_{b\mathbb{Z}}(t) - \sum_{j \neq s} \left[M_j \left(\int_{b\mathbb{Z}} |v_{t+j}|^2 d\mu_{b\mathbb{Z}}(t) \right)^{1/2} \right.$$

$$\left. \left(\int_{b\mathbb{Z}} |v_{t+s}|^2 d\mu_{b\mathbb{Z}}(t) \right)^{1/2} \right] = \gamma \|\underline{v}\|_{\mathcal{L}}^2$$

et puisque $\gamma > 0$, ceci donne l'ellipticité. Ainsi, $D_G\phi_{\underline{b}}(\underline{x})$ est inversible. Maintenant, si $\underline{h} = D_G\phi_{\underline{b}}^{-1}(\underline{x})(L)$, on a :

$$\gamma \|\underline{h}\|^2 \leq \beta(\underline{h}, \underline{h}) = L(\underline{h}) \leq \|L\| \ \ \|\underline{h}\|$$

et donc on peut poser $M := \gamma^{-1}$. ■

Maintenant, on est en mesure de finir la démonstration de la proposition 5.4.4.5. On applique la méthode de Newton comme dans le Chapitre 4. On prend pour initialisation $\underline{x}^{(0)}$ une solution de $\phi_{\underline{b}}(\underline{x}) = 0$, et l'on note $\phi_0 := \|\phi_{\underline{b'}}(\underline{x}^{(0)})\|$. Pour appliquer le théorème il faut trouver $r > 0$ et $\beta \in]0, 1[$ tels que $2cr \leq \beta/M$ et $M\phi_0/r \leq 1 - \beta$. Par un calcul immédiat on voit que c'est possible si et seulement si :

$$\phi_0 \leq C := \frac{\gamma^2}{8c}$$

où C ne dépend que de A. Mais, $\phi_0 \leq \|\underline{b} - \underline{b'}\|$, donc si on a $\|\underline{b} - \underline{b'}\| \leq C$, on peut trouver une solution à l'équation $\phi_{\underline{b'}}(\underline{x}) = 0$.■

Remarque 5.4.4.8 *Considérons à nouveau le cas linéaire basique $N = 1$, i.e. on considère l'équation :*

$$\sum_{j=0}^{p} a_j x_{t+j} = b_t.$$

Alors **(H5)**-**(H7)** *sont vérifiées et* **(H8)** *est exactement la condition donnée dans 5.4.3.3. En particulier, on voit que cette condition ne peut pas être renforcée en supposant que $\gamma \geq 0$ (cf. remarque 5.4.3.4).*

Même si l'équation est une équation d'Euler, **(H8)** n'a *a priori* aucun lien avec la concavité ou la convexité du lagrangien. Par exemple, considérons l'équation avec $N = 1$:

$$bx_{t-1} + (a + c)x_t + bx_{t+1} = d_t$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\underline{d}$ est p.p., qui est une équation d'Euler pour le Lagrangien :

$$L_t(x, y) := \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{2} + d_t x.$$

(H5)-**(H7)** sont vraies. Limitons nous à $a > 0$ et $c > 0$ et $a \neq c$. Si L_t est convexe ou concave, alors $ac - b^2 > 0$, donc pour que L_t soit ni convexe ni concave, on impose $|b| > \sqrt{ac}$. De plus, $D_1 A_t = D_3 A_t = b$ et $D_2 A_t = a + c$, donc on a **(H8)** avec $s = 2$ si l'on impose $a + c > 2|b|$. Puisque $2\sqrt{ac} < a + c$, il est possible de prendre $|b| \in]\sqrt{ac}, \frac{a+c}{2}]$ qui assure ce que l'on cherchait.

Chapitre 6

Liens entre les problèmes de contrôle périodiques et presque-périodiques. Un principe de Pontryagin dans un cadre lagrangien

Dans ce chapitre, on s'intéresse au lien entre les problèmes de Contrôle Périodique et de Contrôle presque-périodique. On s'intéresse en premier lieu au probème suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f_0(t,x(t),u(t))dt \\ \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \end{cases}$$

où l'on cherche des solutions (x,u) périodiques de période τ dans un espace adéquat, et où la période τ est soit fixée (problème **(PPPF)**, ou **(PPPF(**τ**))** si l'on veut préciser la période), soit varie dans $\mathbb{R}_*^+$ (problème **(PPPV)**) ou un de ses sous-ensembles. L'étude de tels problèmes ainsi que leur motivation a fait l'objet de nombreux articles et ouvrages (cf [40], [56], [60], [72] et leurs références).

Notons que le critère peut s'écrire sous une forme ne faisant pas apparaître explicitement τ. En effet, il peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}\{f_0(t,x(t),u(t))\}_t$$

Les problèmes déjà mentionnés rentrent donc dans la catégorie plus générale des problèmes de Contrôle presque-périodiques (ou quasi-périodiques) dont une forme est par exemple :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } \ \mathcal{M}\{f_0(t,x(t),u(t))\}_t \\ \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \end{cases}$$

où l'on cherche des solutions (x,u) presque-périodiques ou quasi-périodiques dans un espace adéquat. Une première étude de ces problèmes, lorsque f est linéaire par rapport au couple (x, u) et f_0 quadratique a déjà été faite par [42]. Ces problèmes englobent les précédents, et l'on s'attend à avoir davantage de structure sur l'ensemble des solutions dans la mesure où l'on travaille désormais dans un espace vectoriel (ce qui n'ést pas le cas de l'ensemble de toutes les fonctions périodiques, même assujeties à certaines conditions de régularité). De plus, l'étude des problèmes périodiques est justifiée par des considérations industrielles d'accroissement de la production (cf [59]), et l'on s'attend naturellement à augmenter encore la valeur de l'optimum en augmentant la production.

Dans la suite, après avoir précisé davantage les problèmes, on étudiera les liens entre les problèmes périodiques et quasi (presque-) périodiques dans le cas où f_0 est concave et f affine par rapport au couple (x, u). Ensuite, on démontrera un principe de Pontryagin dans un cadre hilbertien, comme le font [42] et [65], dans un cas où f_0 et f ne seront plus nécessairement autonomes, et où f_0 sera seulement supposée sous-quadratique. Enfin, on énoncera un théorème d'existence.

6.1 Présentation des problèmes

Dans toute la suite, on supposera que f est affine par rapport au couple (x, u), donc de la forme :

$$f(t, x, u) = A(t).x + B(t).u + b(t)$$

où pour tout t, $A(t)$ est une matrice $N \times N$, $B(t)$ est une matrice $N \times M$ et $b(t)$ est un vecteur $N \times 1$. Des hypothèses plus précises sur A, B et b seront précisées ultérieurement.

6.1.1 Problèmes périodiques

La classe la plus générale que nous considérons est celle des problèmes non autonomes :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f_0(t, x(t), u(t))dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

où la période τ est soit fixée, soit variable ; on appellera ces problèmes **(PPPF)** (problème périodique à période fixée), et **(PPPV)** (problème périodique à période variable). Si l'on veut préciser la période τ dans un problème **(PPPF)**, on appellera le problème **(PPPF(τ))**. Quand f_0 et f ne dépendent pas de t, on parle de problème autonome.

Un premier cadre que nous étudierons est celui des problèmes hilbertiens, où on cherche u dans $L^2([0, \tau], \mathbb{R}^M)$ ou un de ses sous-ensembles, et x dans l'espace des fonctions $H^1([0, \tau], \mathbb{R}^N)$ qui vérifient $x(0) = x(\tau)$ (ce qui a un sens), espace que l'on notera $H^1_\tau([0, \tau], \mathbb{R}^N)$. Cette étude hilbertienne est justifiée par le fait que l'existence et la représentation des multiplicateurs est plus facile, et par le fait que c'est le cadre adopté dans [42] et [65]. Notons que dans ce cadre, nous ferons l'hypothèse que f_0 est de Carathéodory et qu'il existe $c > 0$ et $d \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M, \quad |f_0(t, x, u)| \leq d(t) + c\left(|x|^2 + |u|^2\right)$$

hypothèse qui combinée avec le caractère affine de f assurent l'existence, la continuité et la Fréchet-différentiabilité des opérateurs de Nemytskii construits sur f_0 et f. Le critère est donc lui-même Fréchet-dérivable comme composé de deux tels opérateurs.

Dans la section 2, on se limitera au cas où f_0 est concave et où u varie dans tout L^2. Les considérations que nous ferons sont valables dans d'autres cadres (en fait, pour la plupart d'entre elles, dès que le théorème de Besicovitch est valable dans l'espace de fonctions p.p. naturellement associé). A titre d'exemple, nous donnerons un autre cadre, celui où u varie dans $C^0_\tau([0, \tau], \mathbb{R}^M)$ et x dans $C^1_\tau([0, \tau], \mathbb{R}^M)$.

6.1.2 Problèmes presque-périodiques et quasi-périodiques

On suit de manière très fidèle la discussion précédente. Notant – sous réserve d'existence – J l'opérateur :

$$J(x, u) := \mathcal{M}\{f_0(t, x(t), u(t))\}_t,$$

la classe la plus générale que nous considérons est celle des problèmes non autonomes :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } \ J(x, u) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

dont on cherche des solutions presque-périodiques (problème presque-périodique nommé **(PPP)**) ou des solutions quasi-périodiques (problème quasi-périodique nommé **(PQP)**). Quand f_0 et f ne dépendent pas de t, on parle de problème autonome.

Nous ne parlerons plus que du cadre presque-périodique, le cadre quasi-périodique nous intéressant étant celui où le module de fréquences est fixé, et où l'on remplace les espaces de fonctions p.p. par les espaces q.p. naturellement associés.

Un premier cadre que nous étudierons est celui des problèmes hilbertiens, où on cherche u dans $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ ou un de ses sous-ensembles, et x dans l'espace $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. A nouveau, cette étude hilbertienne est justifiée par le fait que l'existence et la représentation des multiplicateurs est plus facile, et par le fait que c'est le cadre adopté dans [42] et [65]. Notons que dans ce cadre, nous ferons encore l'hypothèse que f_0 est de Carathéodory et qu'il existe $c > 0$ et $d \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M, \quad |f_0(t, x, u)| \leq d(t) + c\left(|x|^2 + |u|^2\right)$$

hypothèse qui combinée avec le caractère affine de f assurent l'existence, la continuité et la Fréchet-différentiabilité des opérateurs de Nemytskii construits sur f_0 et f. Le critère est donc lui-même Fréchet-dérivable comme composé de deux tels opérateurs.

Dans la section 2, on se limitera au cas où des problèmes autonomes, f_0 concave et où u varie dans tout B^2. Toujours en supposant le problème autonome et f_0 concave, en fait les considérations que nous ferons sont valables dans d'autres cadres (en fait, pour la plupart d'entre elles, dès que le théorème de Besicovitch est valable). A titre d'exemple, nous donnerons un autre cadre, celui où u varie dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ et x dans $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

6.1.3 Le problème statique

On appelera problème statique, noté **(PS)**, le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } \ \mathcal{M}\{f_0(t, \bar{x}, \bar{u})\}_t \\ \forall t, \quad A(t)\bar{x} + B(t)\bar{u} + b(t) = 0 \end{cases}$$

qui correspond à la recherche des solutions constantes de **(PPPF)**, **(PPPV)** et **(PPP)**. C'est en fait un problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

6.2 Lien entre Problèmes de Contrôle Périodique et Problèmes de Contrôle Presque-périodique

Dans toute cette section, on ne considère que les problèmes concaves en le critère et rappelons que l'équation d'évolution est linéaire. Si **(P)** est l'un des problèmes précédents, on note Val **(P)** sa valeur, *i.e.* le supremum du critère. On va commencer par donner quelques résultats de structure, puis on étudiera le cas autonome.

Avant tout, considérons un problème particulier pour discussion. Celui-ci montre effectivement que dans le cadre non autonome, la considération de problèmes presque-périodiques est tout à fait pertinente. On se place dans le cadre hilbertien, mais la discussion est analogue pour un problème régulier. Fixons une fonction $\hat{x} \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non périodique, et le problème non autonome suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } \ -\mathcal{M}\{(x - \hat{x})^2\} \\ \dot{x} = u \end{cases}$$

que nous résolvons dans chacun des cadres nous intéressant. L'unique solution du problème presque-périodique est $(\hat{x}, \nabla\hat{x})$ qui réalise la valeur 0. Si l'on cherche les solutions T-périodiques où T est fixé, on trouve $(\hat{x}^T, \nabla\hat{x}^T)$ qui donne la valeur strictement négative :

$$V(T) = -\sum_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}} |a_\lambda(\hat{x})|^2.$$

Du fait que $\hat{x}$ est non périodique, on peut trouver λ et μ vérifiant $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ et $a_\lambda(\hat{x})a_\mu(\hat{x}) \neq 0$. Pour tout $T > 0$, on a au moins l'une des assertions $\lambda \notin T\mathbb{Z}$ ou $\mu \notin T\mathbb{Z}$ de sorte que si l'on note $\kappa := \min\{|a_\lambda(\hat{x})|^2; |a_\mu(\hat{x})|^2\} > 0$, on a :

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}} |a_\lambda(\hat{x})|^2 \geq \kappa$$

et donc :

$$\sup_T V(T) \leq -\kappa < 0$$

ce qui montre que la valeur de **(PPPV)** est strictement inférieure à celle de **(PPP)**.

Lemme 6.2.0.1 *Nous avons pour tout $\tau > 0$:*

$$\mathrm{Val}((\mathbf{PPP})) \geq \mathrm{Val}((\mathbf{PPPV})) \geq \mathrm{Val}((\mathbf{PPPF})(\tau)) \geq \mathrm{Val}((\mathbf{PS}))$$

Démonstration. C'est immédiat en raison des inclusions des ensembles de contraintes.■

Proposition 6.2.0.2 *L'ensemble des solutions de* **(PPP)** *est un convexe fermé.*

Démonstration. Notons que la contrainte est linéaire continue, donc en particulier si (x_n, u_n) satisfont la contrainte pour tout n, $\lambda(x_1, u_1) + (1-\lambda)(x_2, u_2)$ et la limite de la suite (lorsqu'elle existe) satisfait la contrainte. Si de plus il s'agit de maxima de J, f_0 étant concave, il en est de même de J, donc :

$$J(\lambda(x_1, u_1) + (1-\lambda)(x_2, u_2)) \geq \lambda J(x_1, u_1) + (1-\lambda)J(x_2, u_2) = M$$

où M est le maximum de J sur l'ensemble de contraintes. Ainsi, $J(\lambda(x_1, u_1) + (1-\lambda)(x_2, u_2)) = M$, ce qu'il fallait démontrer. Si maintenant $(x_n, u_n)_n$ est une suite de maxima convergeant vers $(\bar{x}, \bar{u})$, par continuité de J, on a :

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \lim_{n \to +\infty} J(x_n, u_n) = M$$

ce qui démontre l'assertion.■

Désormais, nous passons à la considération des problèmes autonomes. Rappelons que dans les cadres considérés, le théorème de Besicovitch est valable : si f est $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ (resp. $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$), alors pour tout $T > 0$, la suite :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tau_{jT} f \right)_{n \geq 1}$$

converge dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ (resp. $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$) vers la T-périodifiée de f notée f^T, qui correspond à la partie $T-$périodique du développement en série de Fourier de f. L'ensemble des résultats à venir est basé sur le lemme suivant :

Lemme 6.2.0.3 *Pour tout (x, u) et tout $T > 0$, nous avons :*

$$J(x^T, u^T) \geq J(x, u).$$

En particulier, si (x, u) est une solution de **(PPP)**, *il en est de même de (x^T, u^T) pour tout $T > 0$.*

Démonstration. Du fait de l'autonomie, nous avons pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$J(\tau_s x, \tau_s u) = J(x, u)$$

ce que l'on applique avec $s = jT$ pour $j = 0$ à $n-1$. Par concavité de J, il vient :

$$J\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \tau_{jT} x \ , \ \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \tau_{jT} u\right) \geq J(x, u)$$

et par continuité de J, quand $n \to +\infty$, le théorème de Besicovitch assure que :

$$J(x^T, u^T) \geq J(x, u)$$

et donc le lemme est valide.■
On utilise un autre lemme :

Lemme 6.2.0.4 *Pour toute fonction $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ (ou $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$), on peut trouver $T > 0$ tel que*

$$T\mathbb{Z} \cap \mathrm{Mod}(f) = \{0\}.$$

Démonstration. Soit M le module des fréquences de f. Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable génératrice de M en tant que $\mathbb{Z}$-module, et soit

$$M_n := \{k_1\omega_1 + ... + k_n\omega_n \ , \ (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

M_n est au plus dénombrable, et comme $M = \cup_{n \geq 1} M_n$, on en déduit que M est au plus dénombrable. Considérons une famille non dénombrable libre sur $\mathbb{Z}$ de réels strictement positifs T_i, $i \in I$. Si la propriété annoncée est fausse, pour tout $i \in I$, on peut trouver $k_i \in \mathbb{Z}^*$ tel que $k_i T_i \in M$. Si maintenant je prends i, j dans I distincts, comme $T_i / T_j \notin \mathbb{Q}$, on a $k_i T_i \neq k_j T_j$, et par conséquent la famille $(k_i T_i)_{i \in I}$ est une famille non dénombrable d'éléments deux à deux distincts de M, et on en déduit que M n'est pas dénombrable, ce qui est une contradiction. Par conséquent, il existe $T > 0$ tel que :

$$T\mathbb{Z} \cap M = \{0\}.■$$

On en déduit la propriété particulière suivante :

Théorème 6.2.0.5 *Pour les problèmes autonomes, nous avons :*

$$\mathrm{Val}((\mathbf{PPP})) = \mathrm{Val}((\mathbf{PPPV})) = \mathrm{Val}((\mathbf{PPPF})(\tau)) = \mathrm{Val}((\mathbf{PS}))$$

pour tout $\tau > 0$. De plus, l'un de ces problèmes a une solution si et seulement si tous en ont une, que l'on peut choisir constante.

Démonstration. Du fait de 6.2.0.1, il suffit de démontrer que :

$$\mathrm{Val}((\mathbf{PS})) \geq \mathrm{Val}((\mathbf{PPP})).$$

Soit (x, u) arbitraire. On peut trouver un $T > 0$ tel que :

$$T\mathbb{Z} \cap \mathrm{Mod}(x, u) = \{0\}$$

et pour un tel T, (x^T, u^T) est constant et vaut $(\mathcal{M}\{x\}, \mathcal{M}\{u\})$. Du lemme 6.2.0.3, on sait que $J(x^T, u^T) \geq J(x, u)$ donc comme $(\mathcal{M}\{x\}, \mathcal{M}\{u\})$ est constant, nous avons bien $\mathrm{Val}((\mathbf{PS})) \geq \mathrm{Val}((\mathbf{PPP}))$. Notre argument montre en outre que si l'un des problèmes a une solution, la moyenne de cette solution est solution de tous les problèmes. Donc un problème a une solution si et seulement si chacun en a une.■

Remarque 6.2.0.6 *Par exemple, lorsque $-b \notin A\mathbb{R}^N + B\mathbb{R}^M$, aucun des problèmes n'a de solution.*

Corollaire 6.2.0.7 *Si Sol*$(\mathbf{P})$ *désigne l'ensemble des solutions d'un problème* $(\mathbf{P})$*, nous avons : Sol*$(\mathbf{PS}) \subset$ *Sol*$(\mathbf{PPPF}(\tau)) \subset$ *Sol*$(\mathbf{PPPV}) \subset$ *Sol*$(\mathbf{PPP})$.

Démonstration. Montrons par exemple la première, les autres étant analogues. Soit $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathrm{Sol}(\mathbf{PS})$. On a :

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \mathrm{Val}((\mathbf{PS})) = \mathrm{Val}((\mathbf{PPPF}(\tau))$$

et comme $(\bar{x}, \bar{u})$ est admissible pour $(\mathbf{PPPF}(\tau))$, c'en est une solution.■

Corollaire 6.2.0.8 *Si f_0 est strictement concave, les seules solutions de* $(\mathbf{PPP})$ *sont les constantes.*

Démonstration. Notons en premier que si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ou $f \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), est positive non identiquement nulle, on a : $\mathcal{M}\{f\} > 0$. Par conséquent, on en déduit que J est strictement concave puisque si $\lambda \in]0, 1[$, on a :

$$\lambda f_0(x_1, u_1) + (1 - \lambda) f_0(x_2, u_2) - f_0(\lambda(x_1, u_1) + (1 - \lambda)(x_2, u_2)) < 0$$

et par conséquent :

$$\mathcal{M}\{\lambda f_0(x_1, u_1) + (1 - \lambda) f_0(x_2, u_2) - f_0(\lambda(x_1, u_1) + (1 - \lambda)(x_2, u_2))\} < 0$$

d'où :

$$J(\lambda(x_1, u_1) + (1 - \lambda)(x_2, u_2)) > \lambda J(x_1, u_1) + (1 - \lambda) J(x_2, u_2).$$

Comme J est strictement convexe, le problème a au plus une solution qui est donc nécessairement constante en vertu du théorème 6.2.0.5.■

Résultat 6.2.0.9 *On suppose que l'un des problèmes* **(PPPV)** *ou* **(PPP)** *a deux solutions* (x_i, u_i) *(*$i = 1, 2$*) avec* (x_i, u_i) T_i-*périodique non constante tel que* $T_2/T_1 \notin \mathbb{Q}$*. Alors, si l'on pose* $\bar{x_i} := \mathcal{M}\{x_i\}$*, pour tout* $\lambda \in [0, 1]$*, les fonctions suivantes sont solutions de tous les problèmes pour lesquels elles sont admissibles :*

- $\lambda(x_1, u_1) + (1 - \lambda)(x_2, u_2)$
- $\lambda(\bar{x_1}, \bar{u_1}) + (1 - \lambda)(x_2, u_2)$
- $\lambda(x_1, u_1) + (1 - \lambda)(\bar{x_2}, \bar{u_2})$
- $\lambda(\bar{x_1}, \bar{u_1}) + (1 - \lambda)(\bar{x_2}, \bar{u_2})$.

En particulier, le problème **(PPP)** *des solutions quasi-périodiques non périodiques.*

Démonstration. Le premier a déjà été vu. Quand $\lambda \in]0, 1[$, il fournit en particulier une solution quasi-périodique non périodique. Pour les suivants, on applique le lemme 6.2.0.3 avec successivement $T = T_2$, $T = T_1$ et $T \notin T_1\mathbb{Q}+T_2\mathbb{Q}$.■

6.3 Conditions nécessaires du premier ordre et existence

On définit le Hamiltonien du problème $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ par :

$$H(t, x, u, \lambda_0, p) := \lambda_0 f_0(t, x, u) + p.f(t, x, u)$$

On considère le problème **(PPP)** dans le cas où (x, u) varie dans $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \times K$, où K est un convexe non vide de $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$. Dans la première sous-section, on se limite au cas où $K = B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$, et l'on étudie le problème général dans la seconde.

6.3.1 Le cas $K = B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$

On énonce un principe sans condition de qualification puis on donne une condition suffisante pour que le multiplicateur du critère soit non nul.

Théorème 6.3.1.1 (Pontryagin faible). *Soit* $(\bar{x}, \bar{u})$ *une solution de* **(PPP)***. Alors il existe* $(\lambda_0, p) \in \mathbb{R} \times B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ *non tous nuls tel que soient satisfaites :*

1. $\nabla\bar{x} \sim_2 H_p(., \bar{x}, \bar{u}, \lambda_0, p)$
2. $\nabla p \sim_2 -H_x(., \bar{x}, \bar{u}, \lambda_0, p)$
3. $H_u(., \bar{x}, \bar{u}, \lambda_0, p) \sim_2 0$

Démonstration. La première condition est en fait l'équation d'évolution. Posons :

$$G(x,u) := f(.,x,u) - \nabla x$$

qui est défini de $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \times B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$ vers $B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$. Compte tenu des hypothèses sur f_0 et f, les résultats de différentiabilité des opérateurs de Nemytskii assurent que J et G sont Fréchet-dérivables et par conséquent la condition nécessaire du premier ordre s'écrit :

$$\exists(\lambda_0,\Lambda) \in (\mathbb{R} \times B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^M)') \setminus \{0\}, \quad \lambda_0 J'(\bar{x},\bar{u}) + \Lambda \circ G'(\bar{x},\bar{u}) = 0.$$

Explicitons. $B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$ étant identifiable à son dual, Λ se représente par un $p \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$ et (λ_0,Λ) non tous nuls équivaut à (λ_0,p) non tous nuls. De plus, on peut calculer les Fréchet-dérivées de J et G. Désignant par (h,k) un élément générique de $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \times B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$, les expressions des dérivées sont :

$$J'(x,u).(h,k) = \mathcal{M}\{D_2 f_0(.,x,u).h + D_3 f_0(.,x,u)k\}$$

$$G'(x,u).(h,k) = D_2 f(.,x,u).h + D_3 f(.,x,u).k - \nabla h.$$

Reportons dans la condition nécessaire du premier ordre. Faisant successivement $k = 0$ puis $h = 0$, on obtient les deux équations :

$$\forall h \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N), \quad \mathcal{M}\{\lambda_0 D_2 f_0(.,\bar{x},\bar{u}).h + p.(D_2 f(.,\bar{x},\bar{u}).h - \nabla h)\} = 0$$

$$\forall k \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^M), \quad \mathcal{M}\{\lambda_0 D_3 f_0(.,\bar{x},\bar{u}).k + p.(D_3 f(.,\bar{x},\bar{u}).k)\} = 0.$$

Introduisant la notation H, ces équations s'écrivent :

$$\forall h \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N), \quad \mathcal{M}\{H_x(.,\bar{x},\bar{u},\lambda_0,p).h - p.\nabla h)\} = 0$$

$$\forall k \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^M), \quad \mathcal{M}\{H_u(.,\bar{x},\bar{u},\lambda_0,p).k)\} = 0.$$

La seconde équation donne $H_u(.,\bar{x},\bar{u},\lambda_0,p) \sim_2 0$ et la première, en utilisant BLOT... montre que $p \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$ et que $\nabla p \sim_2 -H_x(.,\bar{x},\bar{u},\lambda_0,p)$.■

On donne maintenant une condition permettant de prendre $\lambda_0 = 1$.

Proposition 6.3.1.2 *Si de plus l'une des conditions suivantes est satisfaite, on peut prendre $\lambda_0 = 1$ dans le théorème précédent.*

(C1) *L'application $(h,k) \mapsto A(.).h + B(.).k - \nabla h$ est une surjection de $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \times B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^M)$ vers $B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$.*

(C2) *Pour tout $\zeta \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$, il existe $h \in B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ tel que :*

$$-\nabla h + Ah \sim_2 \zeta.$$

(C3) *A est constante et n'a pas de valeur propre imaginaire pure.*

Démonstration. Comme $G'(\bar{x}, \bar{u}).(h,k) = A(.).h + B(.).k - \nabla h$, la condition **(C1)** est en fait la condition habituelle. Montrons que l'on a :

$$(\mathbf{C3}) \Rightarrow (\mathbf{C2}) \Rightarrow (\mathbf{C1})$$

ce qui permettra de conclure.
(**C3**) $\Rightarrow$ (**C2**). Par trigonalisation, on se ramène immédiatement au cas $N = 1$. Notons $(\zeta_\lambda)_\lambda$ la famille des coefficients de Fourier de ζ, et cherchons à résoudre :

$$-\nabla h + \theta h \sim_2 \zeta$$

où $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, $\theta_i \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \neq 0$. Si $(h_\lambda)_\lambda$ sont les coefficients de Fourier de h, ils satisfont nécessairement :

$$h_\lambda = \frac{\zeta_\lambda}{\theta - i\lambda}.$$

Il s'agit de coefficients de Fourier d'une fonction $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ si et seulement si :

$$\sum_\lambda (1 + \lambda^2)|h_\lambda|^2 < +\infty.$$

Or $(1 + \lambda^2)|h_\lambda|^2 = \psi(\lambda)|\zeta_\lambda|^2$ où :

$$\psi(\lambda) = \frac{1 + \lambda^2}{\theta_1^2 + (\theta_2 - \lambda)^2}$$

qui comme $\theta_1 \neq 0$, est une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$ tendant vers 1 à l'infini donc bornée par une constante $C > 0$. Il vient donc :

$$\sum_\lambda (1 + \lambda^2)|h_\lambda|^2 \leq C\|\zeta\|^2$$

d'où le résultat.
(**C2**) $\Rightarrow$ (**C1**). Il suffit de prendre $(h, 0)$.■

6.3.2 Cas où K est convexe quelconque

Dans toute cette sous-section, nous supposons que l'une des conditions de la proposition 6.3.1.2 est satisfaite, ainsi que l'hypothèse suivante :

$$\exists (\hat{x}, \hat{u}) \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \times \mathrm{Int} K, \quad A.\hat{x} + B.\hat{u} + b = 0.$$

Théorème 6.3.2.1 (Pontryagin faible). *Sous cette hypothèse, si $(\bar{x}, \bar{u})$ est une solution optimale, alors il existe $p \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ non nul tel que soient satisfaites :*

1. $\nabla \bar{x} \sim_2 H_p(., \bar{x}, \bar{u}, 1, p)$
2. $\nabla p \sim_2 -H_x(., \bar{x}, \bar{u}, 1, p)$

3. $H_u(., \bar{x}, \bar{u}, 1, p) \in N_K(\bar{u})$

où $N_K(\bar{u})$ *est le cône normal à* K *en* $\bar{u}$*.*

Démonstration. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 6.3.1.1. Grâce à la condition de qualification, nous savons que :

$$0 \in \mathrm{Int}((B^{1,2} \times K) - G^{-1}(0))$$

où nous abrégons un peu les notations. En effet, il existe $r > 0$ tel que si $|\delta u| < r$, on ait $\hat{u} + \delta u \in K$ et alors pour tout δx, on a :

$$(\delta x, \delta u) = (\hat{x} + \delta x, \hat{u} + \delta u) - (\hat{x}, \hat{u}) \in (B^{1,2} \times K) - G^{-1}(0)$$

D'après [4] ((51) p.57), on en déduit que :

$$N_{(B^{1,2} \times K) \cap G^{-1}(0)} = N_{(B^{1,2} \times K)} + N_{G^{-1}(0)}.$$

De plus :

$$N_{(B^{1,2} \times K)} = N_{B^{1,2}} \times N_K = \{0\} \times N_K$$

et comme **(C1)** est valide :

$$N_{G^{-1}(0)}(\bar{x}, \bar{u}) = \mathrm{Ker} G'(\bar{x}, \bar{u}).$$

La condition nécessaire de ce problème est :

$$DJ(\bar{x}, \bar{u}) \in N_{(B^{1,2} \times K) \cap G^{-1}(0)}(\bar{x}, \bar{u})$$

qui devient donc ici :

$$DJ(\bar{x}, \bar{u}) \in N_{B^{1,2} \times K}(\bar{x}, \bar{u}) + N_{G^{-1}(0)}(\bar{x}, \bar{u})$$

c'est-à-dire qu'il existe $\Lambda \in (B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M))'$ tel que :

$$DJ(\bar{x}, \bar{u}) + \Lambda \circ DG(\bar{x}, \bar{u}) \in \{0\} \times N_K(\bar{u})$$

ce qui donne les conditions souhaitées en raisonnant comme dans le théorème 6.3.1.1.■

6.4 Un résultat d'existence

On en vient maintenant à un cadre d'existence d'une solution optimale. On suppose toujours que l'on cherche (x, u) dans $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \times K$, où K est un sous-ensemble convexe non vide de $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ que l'on suppose de plus **fermé.**

Théorème 6.4.0.2 *On suppose qu'il existe $\alpha \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\beta \in \mathbb{R}_*^+$ tels que :*

$$\forall (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M, \quad f_0(t, x, u) \leq \alpha(t) - \beta(|x|^2 + |u|^2).$$

Alors le problème **(PPP)** *admet au moins une solution.*

Démonstration. On note $\Gamma = G^{-1}(0)$. On cherche donc à maximiser J sur Γ qui est fortement et faiblement fermé puisque la contrainte est linéaire continue. Soit $(x_n, u_n)_n$ une suite maximisante, qui vérifie pour tout n, $(x_n, u_n) \in \Gamma \cap K$ et $J(x_n, u_n) \geq M - 1/n$ où M est le supremum de J sur Γ. On vérifie tout d'abord que $(x_n, u_n)_n$ varie dans un borné de $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \times B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait une sous-suite telle que $\|x_{\phi(n)}\|_{1,2}^2 + \|u_{\phi(n)}\|^2 \to +\infty$ quand $n \to \infty$. Ceci implique que $\|x_{\phi(n)}\|^2 + \|u_{\phi(n)}\|^2 \to +\infty$ quand $n \to \infty$ puisque de la contrainte, on a la majoration :

$$\|\nabla x_{\phi(n)}\| \leq \|A\|.\|x_{\phi(n)}\| + \|B\|.\|u_{\phi(n)}\| + \|b\|.$$

On en déduit que :

$$J(x_{\phi(n)}, u_{\phi(n)}) \leq \mathcal{M}\{\alpha\} - \beta\left(\|x_{\phi(n)}\|^2 + \|u_{\phi(n)}\|^2\right)$$

et donc $\lim_{n \to +\infty} J(x_{\phi(n)}, u_{\phi(n)}) = -\infty$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, $(x_n, u_n)_n$ varie dans un borné de $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \times B^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$, et a donc une sous-suite faiblement convergente vers un $(\bar{x}, \bar{u})$. Puisque G est linéaire continue, $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Gamma$ et puisque K est convexe fortement fermé, il est faiblement fermé de sorte que $(\bar{x}, \bar{u}) \in K$ et puisque J est faiblement s.c.s. car concave, $J(\bar{x}, \bar{u}) \geq M$ donc vaut en fait M.■

Chapitre 7

Oscillations en économie

Ce chapitre présente quelques jalons pour l'étude des oscillations en économie. Il s'agit d'un chapitre introductif à une étude ultérieure. Après avoir présenté quelques considérations d'ordre général, nous introduisons un modèle économique simple issu du modèle de Tobin, qui a pour but de montrer que de petites oscillations des exogènes autour de leur tendance peuvent parfois avoir un effet bien précis sur les endogènes indépendant de la forme de l'oscillation.

7.1 Pourquoi s'intéresser aux ocillations et aux phénomènes presque-périodiques ou quasi-périodiques en économie ?

Evolution des séries temporelles. Depuis longtemps, la science économique s'est attachée à décrire et expliquer les évolutions temporelles des grandeurs. Selon [66], une série temporelle (ou série chronologique) est en général composée de plusieurs facteurs parmi lesquels on retrouve :

- une tendance
- un mouvement saisonnier (donc périodique par définition)
- un cycle, qui est un mouvement d'allure *"quasi-périodique"* (au sens courant, et non au sens vu dans cette thèse), lié aux fluctuations de l'activité économique
- des fluctuations accidentelles

Les termes de fluctuations et de cycles sont des concepts non clairement définis en économie. D'ailleurs, certains auteurs les considèrent comme synonymes, alors que d'autres non. Disons simplement qu'il y a fort vaguement l'idée d'évolutions non monotones. Notons que souvent, les méthodes employées pour extraire la saisonnalité d'une série temporelle sont plus ou moins expérimentales. Par exemple, la méthode utilisant les moyennes mobiles couramment utilisées par les

grands organismes de prévision emploie deux moyennes mobiles. Si le choix de la première est justifiée par un critère scientifique, la seconde ne l'est pas et est uniquement employée car on a constaté *empiriquement* qu'elle lisse bien.
Une politique économique, pour être efficace, doit tenir compte, et par conséquent comprendre, les fluctuations. Dans l'exemple tiré de [66] de la série de l'indice trimestriel de la production textile de 1948 à 1967 (série corrigée des variations saisonnières), on constate grâce au périodogramme des fréquences que d'autres périodes que la période annuelle composent la série. Il y a donc superposition de phénomènes périodiques expliquant une grande part des évolutions autour de la tendance. Même si tous les rapports des périodes sont tous rationnels (auquel cas on a en théorie un mouvement périodique), il se peut que la période commune soit très grande par rapport à la longueur de l'intervalle d'étude. Dans ce cas, il pourra être judicieux d'approcher certaines périodes par d'autres de sorte à expliquer très convenablement ces oscillations par une fonction quasi-périodique dont les inverses des fréquences de base sont en rapport avec la longueur de l'intervalle considéré. Un autre cadre analogue est celui de la production de biens agricoles ou se superposent des cycles cours (saisonnalités) avec des mouvements fluctuants de plus grande périodes (très supérieures à l'année). Toujours est il que l'on voit qu'apparaissent naturellement et dans différentes situations des phénomènes périodiques ou quasi-périodiques dans une explication convenable des fluctuations.

Les travaux de M. Allais. On doit à Maurice Allais ([1]) une très profonde réflexion sur le hasard et sa modélisation. Beaucoup de phénomènes paraissent imiter le hasard. Pour autant, leur évolution est-elle due au hasard ? M. Allais apporte de nombreux éléments de réflexion. C'est ainsi que les modèles mathématiques de la théorie des probabilités ne connaissent pas le hasard. Ils sont basés sur la répartition fréquentielles des résultats possibles et sur de l'analyse combinatoire. On est alors en mesure de reformuler le théorème central limite dans une formulation purement déterministe :

Théorème 7.1.0.3 *Considérons des variables fréquentielles x_i de moyenne m_i et d'écart type σ_i. Posons :*

$$M_\ell := x_1 + ... + x_\ell$$

$$\Sigma_\ell := \sqrt{\sigma_1^2 + ... + \sigma_\ell^2}.$$

Si :

$$\lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{\Sigma_\ell} \left(\sum_{j=1}^{\ell} |x_j - m_j|^3 \right)^{1/3} = 0$$

alors

$$\lim_{N,\ell \to +\infty} Freq \left\{ n \in \{0, ..., N\} \quad : \quad \frac{X(n) - M_\ell}{\Sigma_\ell} \leq u \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt.$$

A titre d'application, il donne un théorème central limite où les x_i sont périodiques de périodes incommensurables. Ainsi, X_ℓ est quasi-périodique. Les fonctions p.p. peuvent donc (asymptotiquement) imiter le hasard. Il donne ensuite trois exemples de séries (avec ℓ fini) pour lesquelles on accepterait pourtant l'hypothèse que les valeurs sont issues d'une loi normale. L'une d'entre elles simule de plus un échantillon qui semble non corrélé, tandis qu'une autre est remarquable puisque ℓ vaut 13 (seulement !) et que cet exemple est issu d'un phénomène physique. Certaines de ces séries semblent aussi bien corrélées que celles issues d'un processus autorégressif.
A titre d'illustration est tracée sur $[-100, 100]$ ci-après le graphe de la fonction f définie par : $f(x) :=$

$$\frac{\sin(x-0.12)+\sin(\pi x+0.245)+\sin(\gamma x+0.7813)+\sin(\sqrt{2}x+4.5278)+\sin(\sqrt{17}x)}{5}$$

qui est donc une fonction quasi-périodique. Le rapport de la longueur de l'intervalle divisé par la plus grande période vaut environ 48.5 et est donc très supérieur à 1. En centrant et réduisant les valeurs $f(k)$, pour k entier dans $\{-100, ..., 100\}$, on a effectué un test d'adéquation du χ^2 à une loi $N(0,1)$. Les classes retenues ont pour bornes -1.6, -1, -0.6, -0.2, 0.2, 0.6, 1, 1.6. On accepte au seuil de 5% l'hypothèse selon laquelle cette distribution est normale (12.6¡16.9).

Les théories économiques expliquant les cycles. L'un des premiers modèles dynamiques s'attachant à expliquer l'évolution de certaines variables économiques de manière périodique est dû à Goodwin. Il propose un modèle économique dont l'évolution est régie par les équations de Lotka-Volterra, qui entraînent une évolution périodique. D'autres modèles montre l'existence dans certains cas de telles dynamiques sur des problèmes économiques standards (cf [58]). Les théories dites des cycles proposent des relations qui aboutissent à des équations aux différences ou différentielles linéaires. On sait bien par exemple que pour une équation aux différences linéaire dont les valeurs caractéristiques sont simples, on peut écrire la solution sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{p} e^{\rho_j t} \left(\sum_{k=1}^{n_j} a_k \cos(\omega_{j,k} t) + b_k \sin(\omega_{j,k} t) \right)$$

avec les ρ_j deux à deux distincts. On a donc une somme de p termes qui sont des produits d'exponentielles (qui sont des tendances) par des polynômes trigonométriques (que l'on peut voir comme les oscillations). Si pour un indice j, on a $n_j \geq 2$, il y a toutes les chances (par exemple au sens de la mesure) que le polynôme trigonométrique (décrivant l'oscillation) soit quasi-périodique non périodique. Dans le modèle à générations imbriquées en temps continu présenté dans [44], l'évolution du prix est aussi de cette forme.
D'autres modèles à générations ou à agents à durée de vie infinie en temps discret ou continu se sont attachés à expliquer de manière optimale l'apparition de cycles. A côté de résultats théoriques très forts [30], [69] faisant apparaître n'importe quelle politique optimale h comme solution d'un problème néoclassique (mais où l'utilité dépend fortement de h), d'autres modèles ([6]) ont montré à l'aide du théorème de Hopf que certaines situations monosectorielles font apparaître des dynamiques périodiques. Il est alors très raisonnable d'imaginer que leurs versions multisectorielles pourront faire apparaître des dynamiques quasi-périodiques.

7.2 Oscillations dans le modèle de Tobin

On se place dans le modèle de Tobin (cf. [81]) où le critère à maximiser pour la firme est la valeur actualisée du profit :

$$V(K, N, \dot{K}) := \int_0^{+\infty} e^{-rt} \left[p(t) F_t(K, N) - w(t) N - p(t)(\dot{K} + \delta K) \right] dt$$

où ici exceptionnellement la fonction de production F peut dépendre de t, et où N, K, p, w désignent respectivement le travail employé, le capital employé, le prix du bien produit et la rémunération du travail. On supposera les évolutions de p et w exogènes, ce qui est donc un raisonnement d'équilibre partiel. Les valeurs initiales des stocks de capital et de travail sont fixées et notées respectivement K_0, L_0.

Dans le modèle standard, on suppose qu'il existe trois constantes p_0, w_0, π strictement positives telles que :

$$p(t)/p_0 = w(t)/w_0 = e^{\pi t}.$$

On peut d'ailleurs toujours se ramener au cas où $p_0 = 1$ par le choix du numéraire. Ici, on va par exemple supposer que p_0 peut subir de petites oscillations autour de 1. On postulera une forme :

$$p_0(t) = 1 + \epsilon\phi(t)$$

où $\phi \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de moyenne nulle, de norme 1 (c'est-à -dire que $\|\phi\|_\infty + \|\dot{\phi}\|_\infty = 1$)[1] et ε est petit (précisé plus tard).

Quant à la fonction de production, nous supposerons pour simplifier les calculs et les rendre explicites que c'est une fonction de production de Cobb-Douglas de la forme :

$$F_t(K, L) = \theta(t)K^\alpha N^\beta$$

avec $0 < \alpha, \beta < 1$ et où $t \mapsto \theta(t)$ est une fonction p.p. à valeurs strictement positives de moyenne 1 (ce qui n'est pas resctrictif). On notera $\rho := \alpha + \beta$ le rendement (on parle de rendements décroissants, constants ou croissants selon que $\rho < 1$, $\rho = 1$, $\rho > 1$). Dans le cas usuel, θ est une fonction constante, et ici on s'autorise à modéliser des imperfections du modèle ou une évolution cyclique de la production à capital et travail donnés.

Il est nullement nécessaire pour la suite de ce que l'on va faire de supposer les évolutions de θ et p_0 presque-périodiques. Par exemple, concernant p_0, on a besoin en réalité que p_0 soit BC^1 et que p_0, p_0^2, $\dot{p_0}^2$ admettent une moyenne. Supposer p_0 presque-periodique est bien entendu une condition suffisante non nécessaire qui est ni trop particulière (supposer p_0 périodique serait trop restrictif) ni trop générale (donc ce choix a un sens économique clair).

7.2.1 Les conditions nécessaires du premier ordre

Comme dans [81], on travaille directement sur les conditions nécessaires du premier ordre sans se préoccuper de l'existence d'une solution. Soit $\gamma := r + \delta - \pi$ qui est supposé être strictement positif. Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre donnent :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_t}{\partial N} = \frac{w_0}{p_0(t)} \\ \frac{\partial F_t}{\partial K} = \gamma + \frac{\dot{p}_0(t)}{p_0(t)} \end{cases}$$

Ces équations sont issues des équations d'Euler-Lagrange des problèmes variationnels en horizon infini. Ici, compte tenu de la forme spécifiée de la fonction de production, ces conditions deviennent :

$$\begin{cases} \beta\theta(t)K^\alpha N^{\beta-1} = \frac{w_0}{p_0(t)} \\ \alpha\theta(t)K^{\alpha-1}N^\beta = \gamma + \frac{\dot{p}_0(t)}{p_0(t)} \end{cases}$$

[1]Les raisons du choix de la normalisation en norme 1 apparaîtrons plus tard.

ce qui donne immédiatement le capital par tête :

$$k := K/N = \frac{\alpha w_0}{\beta\gamma}.\frac{1}{p_0 + \gamma^{-1}\dot{p}_0(t)}.$$

Si l'on note $\bar{k} := \frac{\alpha w_0}{\beta\gamma}$ qui est le capital par tête quand il n'y a pas d'oscillations, on a :

$$k = \bar{k}.\frac{1}{p_0 + \gamma^{-1}\dot{p}_0(t)}.$$

L'évolution du capital par tête est donc indépendante de θ. Supposons de plus que les rendements soient non constants ($\rho \neq 1$), on peut déterminer K et N. Désignant par $\bar{N}$ et $\bar{K}$ les valeurs de N et K lorsqu'il n'y a pas d'oscillations, on a :

$$\left(\frac{N}{\bar{N}}\right)^{\rho-1} = \frac{(p_0 + \gamma^{-1}\dot{p}_0)^{\alpha}}{p_0}(t)\frac{1}{\theta(t)}, \quad \bar{N}^{\rho-1} = \left(\frac{w_0}{\beta}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

et :

$$\left(\frac{K}{\bar{K}}\right)^{\rho-1} = \frac{(p_0 + \gamma^{-1}\dot{p}_0)^{1-\beta}}{p_0}(t)\frac{1}{\theta(t)}, \quad \bar{K} = \bar{N}\bar{k}.$$

On voit sur ces formules que dans ce cas explicite, l'évolution des variables est le produit de l'évolution naturelle qui est une tendance par des oscillations, que l'on aurait pu négliger au premier abord.

7.2.2 Evolution quand uniquement p_0 varie

Ici on suppose que $\theta(t) = 1$ pour tout t et $\epsilon > 0$. Par commodité, on introduit $\psi := \phi + \gamma^{-1}\dot{\phi}$, et l'on utilisera que : $\mathcal{M}\{\phi\dot{\phi}\} = 0$, $\mathcal{M}\{\phi\psi\} = \|\phi\|^2$ où $\|..\|$ désigne la norme hilbertienne de $\mathcal{M}^2$. On utilisera enfin que lorsque ϕ parcourt $AP^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors $\|\psi\|/\|\phi\|$ parcourt $[1, +\infty[$. En effet, le numérateur vaut $\sqrt{\|\phi\|^2 + \gamma^{-2}\|\dot{\phi}\|^2}$ d'où la minoration, et toutes les valeurs sont atteintes comme on le voit en considérant les fonctions $\phi_\lambda(t) := \sin(\lambda t)$ ($\lambda > 0$) pour lesquelles le rapport vaut $\sqrt{1 + (\lambda/\gamma)^2}$.

Calculs heuristiques

Sans nous préoccuper pour l'instant de la justification, livrons-nous à un petit calcul heuristique. On a :

$$\frac{k(t)}{\bar{k}} = \frac{1}{1 + \epsilon\psi(t)} \simeq 1 - \epsilon\psi(t) + \epsilon^2\psi^2(t)$$

en considérant comme négligeables les termes d'ordre au moins 3 en ϵ. Si nous prenons la moyenne, nous obtenons :

$$\frac{\mathcal{M}\{k\}}{\bar{k}} - 1 \simeq \epsilon^2\|\psi\|^2 > 0$$

donc ces calculs heuristiques semblent montrer qu'indépendamment de la forme des oscillations, si celles-ci sont suffisamment petites, l'effet sur le capital par tête des oscillations de p_0 est toujours positif. Bien-sûr, cela demande à être précisé, puisque il se peut que la condition de petitesse sur ϵ dépendent de certaines valeurs relatives à ψ.

On passe maintenant à l'étude des variations de $N/\bar{N}$ et $K/\bar{K}$. Dans les deux cas, on est amené à regarder des termes de la forme :

$$(1+\epsilon\psi)^{\frac{\lambda}{\gamma}\rho-1}(1+\epsilon\phi)^{-\frac{1}{\rho-1}}$$

où $\lambda \in]0,1[$ vaut α dans le cas de N et $1-\beta$ dans le cas de K. Le développement d'ordre 2 de cette expression est :

$$1+\frac{\epsilon}{\rho-1}(\lambda\psi-\phi)+\frac{\epsilon^2}{2(1-\rho)^2}\left[\lambda(\lambda-\rho+1)\psi^2+\rho\phi^2-2\lambda\phi\psi\right]+o(\epsilon^2)$$

à t fixé. Prenant la moyenne des deux membres, en négligeant les termes d'ordre au moins égaux à 3 en ϵ, et posant $T := (\|\psi\|/\|\phi\|)^2$, on trouve :

$$\mathcal{M}\{(1+\epsilon\psi)^{\frac{\lambda}{\gamma}\rho-1}(1+\epsilon\phi)^{-\frac{1}{\rho-1}}-1\}=\frac{\epsilon^2}{2(1-\rho)^2}\|\phi\|^2\left[\lambda(\lambda-\rho+1)T+(\rho-2\lambda)\right].$$

Désignons par $\Phi_\lambda(T)$ l'expression entre crochet. Le membre de gauche est du signe de $\Phi_\lambda(T)$, qui est un polynôme du premier degré. Lorsque $\Phi_\lambda(T)$ garde un signe constant quand T parcourt $[1,+\infty[$, on peut dire que le membre de droite à un signe bien déterminé indépendamment de l'oscillation. Dans le cas contraire, nous parlerons *d'effet contrasté.* Tout le problème dans l'interprêtation est de savoir si le signe du second membre est significatif indépendamment de l'oscillation pour l'évolution exacte ; nous y reviendrons plus tard.

Commençons par étudier le cas de N, c'est-à-dire que l'on prend $\lambda=\alpha$. Dans ce cas, le terme devant T vaut $\alpha(1-\beta)>0$ et la valeur en 1 de Φ_α est $\beta(1-\alpha)>0$. On peut donc en conclure que des petites oscillations sur p_0 semblent toujours augmenter le niveau de l'emploi.
Passons maintenant au cas de K, c'est-à-dire que l'on prend $\lambda=1-\beta$. Le terme devant T est $(1-\beta)(2(1-\beta)-\alpha)$, et il est strictement positif si et seulement si $\alpha<2-2\beta$. La valeur en 1 est $\beta(\alpha+2\beta-1)$ et elle est strictement positive si et seulement si $\alpha>1-2\beta$. Puisque $1-2\beta<2-2\beta$, on a en fait une configuration assez simple :

- si $1-2\beta\le\alpha\le 2-2\beta$, le terme du second ordre est toujours positif ou nul.

- sinon, le signe est contrasté.

Justifications des calculs antérieurs

Pour pouvoir en déduire réellement quelque chose sur l'effet sur les endogènes de l'économie, il faut préciser dans quelle mesure la petitesse de ϵ dépend de ϕ. Commençons par k. La formule de Taylor permet d'écrire pour tout $u \in]-1,1[$:

$$\left|(1+u)^{-1} - (1-u+u^2)\right| \leq \frac{u^3}{6} \sup_{\zeta\in[0,u]} \frac{1}{|1+\zeta|^4}.$$

Or $|1+\zeta|^4 \geq (1-|u|)^4 \geq 1/16$ pourvu que $|u| \leq 1/2$. Ainsi, si $\epsilon \in [0, \frac{1}{2\|\psi\|_\infty}]$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left|(1+\epsilon\psi(t))^{-1} - (1-\epsilon\psi(t)+\epsilon^2\psi(t)^2)\right| \leq 8/3 \quad \epsilon^3|\psi(t)|^3$$

Quand on passe aux moyennes, on a donc :

$$\left|\frac{\mathcal{M}\{k\}}{\bar{k}} - 1 - \epsilon^2\|\psi\|^2\right| \leq 8/3 \quad \epsilon^3\mathcal{M}\{|\psi|^3\}$$

et donc le signe obtenu est vrai pourvu que :

$$8/3 \quad \epsilon^3\mathcal{M}\{|\psi|^3\} < \epsilon^2\|\psi\|^2$$

c'est-à-dire pour :

$$\epsilon < \frac{3\|\psi\|^2}{8\mathcal{M}\{|\psi|^3\}}.$$

De plus, comme :

$$\|\psi\|^2 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\psi(t)|^2 dt \geq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\psi(t)|^2 \frac{|\psi(t)|}{\|\psi\|_\infty} dt = \frac{\mathcal{M}\{|\psi|^3\}}{\|\psi\|_\infty},$$

la condition précédente est assurée dès que :

$$\epsilon < \frac{3}{8\|\psi\|_\infty}.$$

Comparant les deux conditions obtenues, on en conclut que le calcul est vrai indépendamment de ψ (ou ϕ) pourvu que :

$$\epsilon < \frac{3}{8\|\psi\|_\infty}.$$

On voit donc dans quelle mesure le résultat est indépendant de la forme de l'oscillation. Comme $\|\phi\|_{C^1} = 1$, on a $\|\psi\|_\infty \leq \frac{1}{\min\{1,\gamma\}}$, donc la condition sur ϵ est impliquée par la suivante :

$$\epsilon \in [0, 3/8 \min\{1,\gamma\}[$$

qui revêt une forme tout à fait agréable ! Une fois choisie la normalisation de ϕ comme étant $\|\phi\|_{C^1} = 1$ (ce qui est toujours possible), la condition de petitesse sur ϵ est indépendante de ϕ.

On passe maintenant au cas de N et K. Pour traiter les deux à la fois, on note : $s_1 := \lambda/(\rho-1)$, $s_2 := -1/(\rho-1)$, $T_1 := (1+\epsilon\psi)^{s_1}$, $T_2 := (1+\epsilon\phi)^{s_2}$. On doit donc comparer le produit $T_1\, T_2$ à son développement limité. On ne cherchera pas à être minimal dans nos calculs.
On se place dans le cas où $\epsilon\|\psi\|_\infty \leq 1/2$, ce qui implique $\epsilon\|\phi\|_\infty \leq 1/2$ puisqu'une application du principe d'Ekeland donne $\|\psi\|_\infty \geq \|\phi\|_\infty$. On note :

$$C_s := \max\{(1/2)^s; (3/2)^s\}, \quad D_s := \frac{|s(s-1)(s-2)|}{6} C_{s-3}.$$

Une application de la formule de Taylor montre que si $|u| \leq 1/2$, on a :

$$\left|(1+u)^s - \left(1 + su + \frac{s(s-1)}{2}u^2\right)\right| \leq \frac{|s(s-1)(s-2)|}{6} \sup_{\zeta\in[0,u]} |1+\zeta|^{s-3}|u|^3 \leq D_s|u|^3.$$

Notons $\hat{T}_i$ le développement limité de T_i. On a, en majorant le dernier $|T_1 - \hat{T}_1|$ par $D_{s_1}/8$:

$$|T_1.T_2 - \hat{T}_1\hat{T}_2| \leq |T_1 - \hat{T}_1|\ |T_2| + |T_2 - \hat{T}_2|(|T_1| + D_{s_1}/8).$$

Utilisant la formule de Taylor et $|T_1| \leq C_{s_1}$, on trouve :

$$|T_1.T_2 - \hat{T}_1\hat{T}_2| \leq \epsilon^3 \left(D_{s_1}C_{s_2}|\psi|^3 + D_{s_2}(C_{s_1} + D_{s_1}/8)|\phi|^3\right).$$

De plus, les termes négligés dans le produit des développements limités sont ceux d'ordre 3 et 4 en ϵ. L'erreur commise en comparant le produit des DL et le DL du produit est donc majorée par :

$$\epsilon^3\left[|s_1s_2(s_2-1)/2|\ |\phi\psi^2| + |s_2s_1(s_1-1)/2|\ |\phi^2\psi| + \epsilon|s_1(s_1-1)s_2(s_2-1)/4|\ |\phi^2\psi^2|\right].$$

On majore le dernier ϵ par $\frac{1}{2\|\psi\|_\infty}$. L'erreur totale en comparant T_1T_2 à son développement limité est donc :

$$\epsilon^3\Big[D_{s_1}C_{s_2}|\psi|^3 + D_{s_2}(C_{s_1} + D_{s_1}/8)|\phi|^3 + |s_1s_2(s_2-1)/2|\ |\phi\psi^2| + |s_2s_1(s_1-1)/2|\ |\phi^2\psi| + \frac{|s_1(s_1-1)s_2(s_2-1)|}{8\|\psi\|_\infty}\ |\phi^2\psi^2|\Big]$$

que l'on peut majorer par :

$$C\epsilon^3\left(|\phi^3| + |\psi^3| + |\phi\psi^2| + \frac{|\psi\phi^2|}{2} + \frac{|\phi^2\psi^2|}{2\|\psi\|}\right) \leq C\epsilon^3\left(|\phi^3| + |\psi^3| + |\phi\psi^2| + |\psi\phi^2|\right)$$

où $C > 0$ est une constante explicite ne dépendant que des s_i (donc de α et β). Rappelons que le terme significatif était de la forme :

$$a\|\psi\|^2 + b\|\phi\|^2$$

avec $a > 0$, $a + b > 0$ (à l'intérieur du domaine). Or :

$$\mathcal{M}\{\epsilon^3 \left(|\phi^3| + |\psi^3| + |\phi\psi^2| + |\psi\phi^2|\right)\} \leq 2\|\psi\|_\infty(\|\psi\|^2 + \|\phi\|^2) \leq 4\|\psi\|_\infty\|\psi\|^2$$

donc notre résultat est significatif pourvu que :

$$\epsilon < \frac{1}{4C\|\psi\|_\infty}(a + bU)$$

où $U := (\|\phi\|/\|\psi\|)^2$ parcourt $]0, 1]$. Or sur $[0, 1]$, $U \mapsto a + bU$ ne s'annule pas, donc est minoré par une constante strictement positive λ. Utilisant encore que $\|\psi\|_\infty^{-1} \geq \min\{1; \gamma\}$, on a finalement la condition :

$$\epsilon < \frac{\min\{1, \lambda/2C\}}{2\|\psi\|_\infty} = \min\{1, \lambda/2C\} \min\{1, \gamma\}/2.$$

A nouveau, cette condition revêt une forme agréable (C, a, b, γ ne dépendent pas de ϕ).

7.2.3 Evolution quand uniquement θ varie

Maintenant on suppose que $\epsilon = 0$ et l'on fait varier θ. On a vu que θ n'influe pas le capital par tête et de plus que :

$$\frac{K}{\bar{K}} = \frac{N}{\bar{N}} = \theta(t)^{-1/(\rho-1)}.$$

On sait que par hypothèse ρ parcourt $]0, 2[\setminus\{1\}$. La fonction $u \mapsto u^{-1/(\rho-1)}$ est strictement convexe lorsque $\rho < 1$ et strictement concave lorsque $\rho > 1$.

Etudions en premier le cas de rendements décroissants ($\rho < 1$). Par l'inégalité de Jensen (ou de Hölder), on a pour tout $T > 0$:

$$\left(\int_0^T \theta(t)\frac{dt}{T}\right)^{-1/(\rho-1)} \leq \int_0^T \theta(t)^{-1/(\rho-1)}\frac{dt}{T}$$

soit, en faisant $T \to +\infty$:

$$\mathcal{M}\left\{\frac{K}{\bar{K}}\right\} = \mathcal{M}\left\{\frac{N}{\bar{N}}\right\} \geq 1$$

et l'étude du cas d'égalité montre que l'inégalité est *stricte* à moins que θ soit la fonction constante 1.
Dans le cas de rendements décroissants, les inégalités sont à inverser.

On notera qu'ici on a obtenu des résultats indépendants de l'oscillation !

7.2.4 Résumé

On notera $\epsilon_0 := \min\{1, \gamma\} \min\{3/2, \lambda C\}/4$. C'est un réel strictement positif explicite qui s'exprime uniquement en fonction des exogènes.
Dans ce qui précède, on a établi :

Théorème 7.2.4.1 *Nous avons les résultats suivants :*

1. *Dans chacun des cas énumérés ci-dessous, l'évolution de chaque endogène est le produit de son évolution sans oscillations par un terme oscillant.*

2. *Des variations sur la fonction de production ne modifient pas le capital par tête. Elles modifient le travail et le capital dans les mêmes proportions, avec une moyenne augmentant en cas de rendements décroissants et diminuant en cas de rendements croissants.*

3. *Pour une évolution du prix de la forme :*

$$p(t) = e^{\pi t}(1 + \epsilon\phi)$$

avec $\phi \in AP^1$ de moyenne nulle, $\|\phi\|_{C^1} = 1$, $\epsilon < \epsilon_0$, on sait qu'en moyenne le capital par tête et le travail augmentent. Le capital augmente en moyenne si $1 - 2\beta < \alpha < 2 - 2\beta$ et les évolutions dépendent de ϕ si $\alpha < 1 - 2\beta$ ou $\alpha > 2 - 2\beta$.

Il serait bien-sûr possible d'étudier des cadres plus généraux (par exemple une fonction de production CES). Ce résultat est l'embryon d'une théorie plus générale qui vise à prendre en compte la présence et le rôle des oscillations (p.p. ou q.p.) dans des modèles dynamiques de l'économie.

Bibliography

[1] ALLAIS M., *Fréquences, probabilité et hasard*, Journal de la Société Statistique de Paris, tome 124, n^{o}2, 1983, pp.70-221.

[2] AMERIO L., PROUSE G., **Almost Periodic Functions and Functional Equations**, van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[3] ARNAUDIÈS J.-M., FRAYSSE H., **Cours de Mathématiques-2 : Analyse**, Dunod, Paris, 1986.

[4] AUBIN J.-P., **L'analyse non linéaire et ses motivations économiques**, Masson, Paris, 1984.

[5] BASS J., **Cours de mathématiques**, tome 3, Masson, Paris, 1971.

[6] BENHABIB J., NISHIMURA K., *The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth*, Journal of Economic Theory, 21, 1979, pp.421-444.

[7] BESICOVITCH A.S., **Almost Periodic Functions**, Cambridge University Press, Cambridge 1932 (Dover, 1954).

[8] BLOT J., *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.134, n^{o}2, 1988, pp.312-321.

[9] BLOT J., *Calcul des Variations en moyenne temporelle*, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t306, Série I, 1988, pp.809-811.

[10] BLOT J., *Une approche variationnelle des orbites quasi-périodiques des systèmes hamiltoniens*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, vol.13, n^{o}2, 1989, pp.7-32.

[11] BLOT J., *Variational Calculus for Quasi-Periodic Geodesics*, Publications du Département de Mathématiques de l'Université de Limoges, fasc.11, 1989, pp.30-44.

[12] BLOT J., *Lagrange Multipliers in Variational Problems in Mean*, Optimization (Mathematische Operations-Forschung und Statistik), vol.20, n^{o}1, 1989, pp.15-25.

[13] Blot J., *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians II*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol.40, n^{o}3, 1989, pp.457-463.

[14] Blot J., *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians III*, Israel Journal of Mathematics, vol.67, n^{o}3, 1989, pp.337-344.

[15] Blot J., *Trajectoires presque-périodiques des systèmes lagrangiens convexes*, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 310, Série I, 1990, pp.761-763.

[16] Blot J., *Le théorème de Markov-Kakutani et la presque-périodicité*, Fixed Point Theory and Applications, M. Théra et J.B. Baillon (Editors), Pitman Research Notes in Mathematical Series, n^{o}252, Longman, Londres, 1991, pp.45-56.

[17] Blot J., *Une méthode Hilbertienne pour les trajectoires presque-périodiques*, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 313, Série I, 1991, pp.487-490.

[18] Blot J., *On Global Implicit Functions*, Nonlinear Analysis, Theory and Applications, vol.17, n^{o}10, 1991, pp.947-959.

[19] Blot J., *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians III*, Israel Journal of Mathematics, vol.67, n^{o}3, 1989, pp.337-344.

[20] Blot J., *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians IV*, Ricerce di Mathematica, vol.XL, n^{o}1, 1991, pp.3-18.

[21] Blot J., *Almost periodic solutions of forced second order hamiltonian systems*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. XIII, n^{o}3, 1991, pp.351-363.

[22] Blot J., *Almost Periodic Forced Pendulum*, Funkcialaj Ekvacioj, vol.36, n^{o}2, 1993, pp.235-250.

[23] Blot J., *Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler-Lagrange*, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol.122, 1994, pp.285-304.

[24] Blot J., *Principe de Moindre Action et presque-périodicité*, dans Les actes du 2ème congrès de mécanique, tome 2 : Mécanique des Solides, organisé par la Société Marocaine des Sciences Mécaniques, 10-13/04/95, Faculté des Sciences Aîn Chok, Casablanca, Maroc, 1995.

[25] Blot J., *Variational Methods for the Almost Periodic Lagrangian Oscillations*, cahiers Eco et Maths n^o 96.44.

[26] Blot J., **Calcul différentiel et optimisation**, polycopié ENSAE, 1994.

[27] Blot J., Cieutat P., Mawhin J., *Almost Periodic Oscillations of Monotone Second-Order Systems*, Advances in Differential Equations, vol 2, n^{o}5, Sept 1997, pp.693-714.

[28] Blot J., Pennequin D., *Spaces of Quasi-periodic Functions and Oscillations in Dynamical Systems*, Preprint Cahiers de la M.S.E., Paris I, n^{o}1999.74.

[29] Blot J., Pennequin D., *Existence and structure results on Almost Periodic solutions of Difference Equations*, Journal of Difference Equations and Applications (à paraître)

[30] Boldrin M., Montrucchio L., *On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths*, Journal of Economic Theory 40, 1986, pp.26-39.

[31] Bohr H., **Almost Periodic Functions**, Julius Springer, Berlin, 1933 (Chelsea Publishing Company, N.Y., 1947).

[32] Bost J.-B. *Tores invariants des systèmes dynamiques Hamiltoniens*, Séminaire Bourbaki, 37ème année, n^{o}639, 1984-1985.

[33] Brezis H., **Analyse Fonctionnelle**, Masson, Paris, 1993.

[34] Broer H.W., Huitemag B., Sevryuk M.B., **Quasi-Periodic Motions in families of Dynamical Systems**, Lecture Notes in Mathematics, n^{o}1645, Springer, Berlin, 1996.

[35] Bourbaki N., **Topologie Générale**, Chap. 1–4, Hermann, Paris, 1971.

[36] Choquet G., **Topologie**, Masson, Paris, 1973.

[37] Chou C.C., **Séries de Fourier et théorie des distributions**, Editions scientifiques, Science Press, Beijing, 1983.

[38] Ciarlet P.G., **Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation**, Masson, Paris, 1982.

[39] Cieutat P., **Solutions presque-périodiques d'équations d'évolution et de systèmes différentiels non linéaires**, Thèse de Doctorat de Mathématiques, Université de Paris 1, 1996.

[40] Colonius F., **Optimal Periodic Control**, Lect. Notes in Maths 1313, Springer, Berlin, 1988.

[41] Corduneanu C., **Almost Periodic Functions**, Chelsea, 1989.

[42] Da Prato G., Ichikawa A., *Optimal Control of Linear Systems with a.p. inputs*, SIAM Journal of Control and Optimization.

[43] De Figueiredo, **Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours**, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.

[44] Demichelis S., Polemarchakis H.M., Overlapping generations in continuous time, Preprint C.O.R.E., 2000.

[45] Diestel J., Uhl J.J., **Vector Measures**, Mathematical surveys n^{o}15, 1977.

[46] Dieudonné J., **Eléments d'analyse**, tome 2, Gauthiers-Villars, Paris, 1969.

[47] Dieudonné J., **Eléments d'analyse**, tome 8, Gauthiers-Villars, Paris, 1978.

[48] Dieudonné J., **Eléments d'analyse**, tome 9, Gauthiers-Villars, Paris, 1982.

[49] Dhombres J., **Moyennes**, *in* Espaces de Marcinkiewicz, Corrélations, Mesures, Systèmes Dynamiques, J. BASS Ed., Masson, Paris, 1985.

[50] Dunford N., Schwartz J.T., **Linear Operators**, tome 1, Interscience Publishers Inc., NY, 1962.

[51] Evans L.C., Gariepy R.F., **Measure Theory and Fine Properties of Functions**, CRC Press, 1992.

[52] Favard J., **Leçons sur les fonctions presque-périodiques**, Gauthiers-Villars, Paris, 1933.

[53] Fink A.M., **Almost Periodic Differential Equations**, Lectures Notes in Mathematics n^{o}377, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[54] Flett T.M., **Differential Analysis : Differentiation, Differential Equations and Differential Inequalities**, Cambridge University Press, 1980.

[55] Hairault J.O., *Présentation et évaluation des courants de cycles réels*, Economie et Prévision, n^{o}106, 1992.

[56] Halanay A., *Optimal Control of Periodic solutions*, Rev. Rouman. Mat. Pure Appl. 19, 1974.

[57] Hardy G.M., Wright E.M., **An Introduction to the Theory of Numbers**, 4th Edition, Oxford Univ. Press, London, 1975.

[58] Hommes C.H., *Periodic, almost periodic and chaotic behaviour in Hick's non-linear trade cycle model*, Econom. Lett. 41, 1993, pp.391-397.

[59] Horn F.J.M., Bailey J.E., *An application of the theorem of relaxed control to the problem of increasing catalyst selectivity*, J. Opt. Theory Appl. 2, 1968, pp.441-449.

[60] Kovaleva A., **Optimal Control of Mechanical Oscillations**, Springer, Berlin, 1999.

[61] Lang S., **Algebra**, Adison-Wiley, 1971.

[62] Lang S., **Real and Functional Analysis**, Springer Verlag, N.Y., 1993.

[63] Leung S.F., *Transversality Condition and Optimality in a Class of Infinite Horizon Continuous Time Economic Problems*, Journal of Economic Theory, 55, 1991, pp.224-233.

[64] Levitan B.M., Zhikov V.V., **Almost periodic functions and differential equations**, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[65] Lions J.L., **Contrôle Optimal de systèmes gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles**, Paris, Dunod Gauthiers-Villars, 1968.

[66] Malinvaud E., **Les méthodes statistiques de l'économétrie**, Dunod, Paris, 1978.

[67] Malinvaud E., **Théorie macro-économique**, tome 2, Dunod, Paris, 1985.

[68] Mauclaire J.L., **Intégration et Théorie des Nombres**, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1986.

[69] Montrucchio L., Sorger G., *Topological Entropy of Policy Functions in Concave Dynamic Optimization Models*, J.M.E. 25, 1996, pp.181-194.

[70] Necas J., **Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques**, Masson, Paris, 1967.

[71] Nishimura K., Sorger G., *Optimal Cycles and Chaos : a survey*, studies in nonlinear dynamics and econometrics, 1996, 1(1), pp.11-28.

[72] Nistri P., *Periodic Control Problems for a class of nonlinear periodic differential systems*, Nonlinear Anal., Theor., Meth. and Appl., vol.7, n^{o}1, 1983, pp.79-90.

[73] Pankov A.A., **Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operators Differential Equations**, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[74] Pennequin D., *Existence Results on Almost Periodic solutions of Discrete Time Equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems (à paraître).

[75] Percival I.C., *Variational Principles for the Invariant Toroids of Classical Dynamics*, J. Phys. A. Math., Nucl. Gen., vol.7, N°7, 1974, pp.794-802.

[76] Percival I.C., *Variational Principles for Invariant Tori and Cantori*, A.I.P. Conference Proceeding 57. pp.302–310, 1979.

[77] Pontryagin L., **Topological Groups**, N.Y.,Gordon and Breach, 1966.

[78] Rohlin V., Fuchs D., **Premier cours de topologie**, traduit du Russe, Mir, Moscou, 1981.

[79] Rebeyrol A., **Les théories néokeynésiennes du cycle**, Polycopié ENSAE, 1996.

[80] Rudin W., **Fourier Analysis on Groups**, Interscience Publishers, N.Y., 1962.

[81] Sargent, T.J., **Macroeconomic Theory**, 2nd Edition, Academic Press, 1987.

[82] Schwartz L., *Distributions à valeurs vectorielles*, Annales de l'Institut Fourier, tome 7, pp.1–141, 1957.

[83] Schwartz L., **Théorie des distributions**, Hermann, Paris, 1966.

[84] Siegel C.L., **Lectures on the Geometry of Numbers**, Springer,1989.

[85] Siegel C.L., Moser J., **Lectures on Celestial Mechanics**, Springer, 1971, Berlin.

[86] Spivak M., **A comprehensive Introduction to Differential Geometry**, vol. 1, Boston : Publish or Perish Inc., 1970.

[87] Stein E.M., Weiss G., **Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces**, Princeton University Press, Princeton, 1971.

[88] Vo-Khac K., **Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles**, tome 1, Vuibert, Paris, 1971.

[89] Vo-Khac K., **Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles**, tome 2, Vuibert, Paris, 1972.

[90] Vo-Khac K., **Etude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles**, Bulletin de la Société Mathématique de France, Mémoire 6, 1966.

[91] Vo-Khac K., **Fonctions et distributions stationnaires, applications à l'étude de solutions stationnaires d'E.D.P.**, *in* Espaces de Marcinkiewicz, Corrélations, Mesures, Systèmes Dynamiques, J. BASS Ed., Masson, Paris, 1985.

[92] WEIL A., **L'intégration dans les Groupes Topologiques**, Hermann, Paris, 1940.

[93] YOSHIZAWA T., **Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions**, Springer-Verlag, N.Y., 1975.

[94] ZASLAVSKI A.J., *The Existence and Structure of Extremals for a Class of Second Order Infinite Horizon Variational Problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 194, pp.660-696, 1995.

[95] ZASLAVSKI A.J., *Optimal Programs on Infinite Horizon 1*, S.I.A.M. Journal of Control and Optimization, vol. 33, n^o6, pp.1643-1660, 1995.

[96] ZASLAVSKI A.J., *Optimal Programs on Infinite Horizon 2*, S.I.A.M. Journal of Control and Optimization, vol. 33, n^o6, pp.1661-1686, 1995.

[97] ZASLAVSKI A.J., *Dynamic Properties of Optimal Solutions of Variational Problems*, Nonlinear Analysis, Methods and Applications, vol. 27, n^o8, pp.895-931, 1996.

[98] ZASLAVSKI A.J., *Existence and Structure of Extremals for One-Dimensional Nonautonomous Variational Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 97, n^o3, pp.731-757, 1998.