AJ

Statistiques et Probabilités, L2 MIASHS, Interrogation 1

09/11/2017, Durée : deux heures

Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées.

Écrivez "Sujet AJ/BJ" sur votre copie et la rendez avec LE SUJET s.v.p. !

Exercice 1. Variables aléatoires discrètes *(8 points)*

Une personne a investi durant 6 jours sur une action en bourse et a eu un résultat journalier égal à la variable aléatoire entière X variant entre -1 et 4. La variable aléatoire X suit la loi uniforme. Les résultats des jours différents sont indépendants.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de jours où cette personne obtient un profit, c.a.d. $X > 0$.

1. Donner la loi de Y.
2. Quelle est la probabilité que cette personne obtient un profit sur 4 jours parmi les 6 ?
3. Sachant que cette personne a eu un profit tous les jours, quelle est la probabilité que la somme de ces gains soit au moins égale à 7 ?

Soit $E = \{\text{Profit}, \text{Neutre}, \text{Perte}\}$ et une chaine de Markov Z_n, tel que $Z_0 = X$ et la matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les états récurrents et transitoires.
5. Calculer la probabilité de la suite $(Z_0, \ldots, Z_4) = (\text{Neutre}, \text{Neutre}, \text{Perte}, \text{Profit}, \text{Profit})$.
6. Déterminer la mesure invariante.
7. Après des centaines d'occurrences, quel est l'état le plus probable de Z_n ?

Exercice 2. Couple d'entiers *(8 points)*

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient, pour un $a \in \mathbb{R}$,

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{j! a^i}.$$

1. Calculer a.
2. Déterminer la loi de X et celle de Y.
3. Donner les noms des lois obtenues dans la question précédente.
4. Les variables X et Y sont elles indépendantes ? Pourquoi ?
5. On note $S = X + Y$. Donner l'espérance et la variance de S.

Rappel des lois usuelles

Loi	$\mathbb{E}$	Var
$\mathcal{U}_n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}er(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}in(n,p)$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

AJ

Écrivez "Sujet AJ/BJ" sur votre copie et la rendez avec LE SUJET s.v.p. !

Exercice 3. Chaîne de Markov *(4 points)*

On considère la suite $X_0, \ldots, X_n, \ldots$ telle que $X_0 = 0$ et qui vérifie l'équation

$$X_{n+1} = ceil\left(\frac{X_n}{2} + e_n\right)$$

où $ceil(\cdot)$ est la fonction entier supérieur ($ceil(x)$ est l'entier supérieur à x le plus proche de x, par exemple, $ceil(0,5) = 1$ et $ceil(1,5) = 2$) et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite des variables aléatoires i.i.d. issues de loi de Bernoulli de paramètre $1/5$.

1. Montrer que $X_0, X_1, X_2, \ldots$ est une chaîne de Markov.
2. Quels sont les états possibles pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Lesquels sont récurrents ? lesquels ne le sont pas ?
3. Calculer la matrice de transition de la chaîne de Markov. Justifier votre réponse.