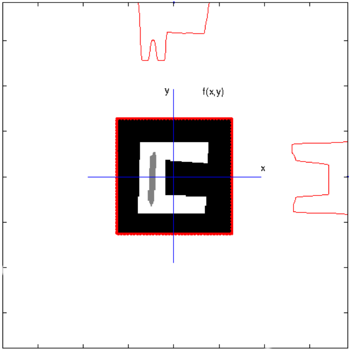
COPULE EN TOMOGRAPHIE

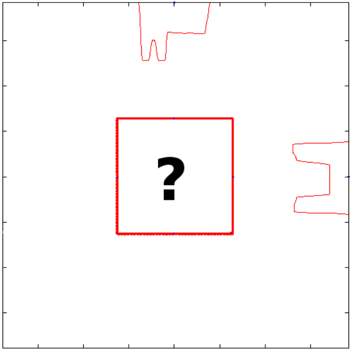
Doriano-Boris Pougaza & Ali Mohammad-Djafari

Laboratoire des Signaux et Systèmes
CNRS UMR 08506
Groupe Problèmes Inverse

23 janvier 2009

PROBLÈME DE RECONSTRUCTION EN TOMOGRAPHIE





Problème Directe :
$f(x, y)$ trouver $f_1(x)$ et $f_2(y)$

Problème Inverse :
$f_1(x)$ et $f_2(y)$ trouver $f(x, y)$

APPROCHE DE SOLUTION AVEC LES COPULES

QU'EST CE QU'UNE COPULE ?

1. EN STATISTIQUE (Abe SKLAR, 1959)

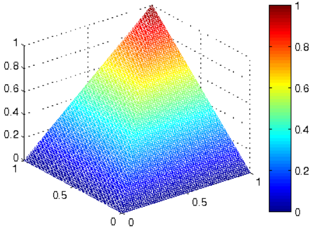
   Une copule est une fonction qui lie une loi multivariée à ses marginales.

2. PUISSANT OUTILS DE MODÉLISATION
3. Offre plusieurs possibilités pour modéliser les lois marginales
4. Solution pour les modèles non-Gaussiens
5. Domaines d'application récents
   - Dans les sciences financières et économiques (C. Genest, P. Embrechts)
   - En hydraulogie et séismologie (Harry Joe, 1994, Roger Cooke)
   - En bioinformatique (Jong-Min Kim, Insuk Sohn, 2008)

DÉFINITION

Une copule bivariée C est une fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C} : [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ (u,v) & \longrightarrow & \mathrm{C}(u,v) \end{array}$$



avec les propriétés :

1. $\mathrm{C}(u,0) = 0 = \mathrm{C}(0,v)$,
2. $\mathrm{C}(u,1) = u \quad \text{et} \quad \mathrm{C}(1,v) = v$,
3. $\mathrm{C}(u_2,v_2) - \mathrm{C}(u_2,v_1) - \mathrm{C}(u_1,v_2) + \mathrm{C}(u_1,v_1) \geq 0$, pour tout $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ et $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$,
4. $\mathrm{C}(u,v) \leq \min\{u,v\}$,
5. $\mathrm{C}(u,v) \geq \max\{u+v-1,0\}$.

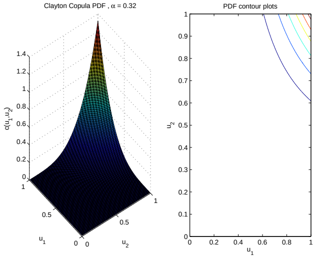
DENSITÉ D'UNE COPULE

La densité c d'une copule bivariée differentiable est :

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v},$$

la densité c est uniforme :

1. $\iint c(u,v)du\,dv = 1$ et de plus
2. $\int c(u,v)du = 1$
3. $\int c(u,v)dv = 1.$



THÉORÈME DE SKLAR (1959)

Si F est une fonction de repartition bivariée dont les marginales sont F_1 et F_2. Alors il **existe** une copule C telle que :

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)). \tag{1}$$

Si de plus les fonctions marginales sont continues, alors la copule C est **unique**, et est donnée par

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)). \tag{2}$$

Autrement C est déterminée sur le produit cartésien $Im\, F_1 \times Im\, F_2$.
Réciproquement, pour des fonctions univariées F_1, F_2 et pour une copule C, la fonction F donnée par (1) est une fonction de répartition bivariée dont les marginales sont précisement F_1 et F_2.

APPLICATION DU THÉORÈME

Si C est une copule à partir du théorème de Sklar, on obtient les relations :

$$\boxed{f(x,y) = f_1(x) f_2(y) c(F_1(x), F_2(y))}$$

$$\boxed{c(u,v) = \frac{f\left[F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)\right]}{f_1\left[F_1^{-1}(u)\right] f_2\left[F_2^{-1}(v)\right]}}$$

COPULES ÉLLIPTIQUES

1. **Copule Gaussienne** : à un paramètre ρ
   - Φ_Σ : fonction de répartition d'une loi gaussienne bivariée,
   - Σ : matrice de covariance, et ρ le coefficient correlation

$$\boxed{C_\rho(u,v) = \Phi_\Sigma\left(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)\right)}$$

2. **copule de Student** à deux paramètres ρ et ν
   - $t_{\Sigma,\nu}$: fonction de répartition d'une loi bivariée de Student,
   - Σ : matrice de covariance, et ρ le coefficient correlation
   - ν : le degré de liberté

$$\boxed{C_{\rho,\nu}(u,v) = t_{\Sigma,\nu}\left(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v)\right)}$$

COPULES ARCHIMÉDIENNES

Pour φ une fonction convexe et décroissante telle que $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(1) = 0$:

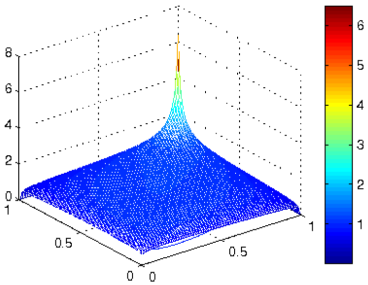
$$\boxed{C(u, v) = \varphi^{-1}\left(\varphi(u) + \varphi(v)\right).}$$

Importance : L'étude de dépendence multivariée est réduite à celle d'une fonction univariée φ.

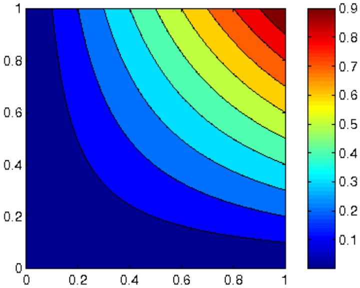
Quelques exemples :

1. **Copule de Clayton** (1978) : à un paramère non nul $\alpha \in [-1, \infty)$
   - Le générateur $\varphi(t) = \frac{1}{\alpha}\left(t^{-\alpha} - 1\right)$
   $$C(u, v; \alpha) = \max\left(\left[u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1\right]^{\frac{-1}{\alpha}}, 0\right)$$
2. **Copule de Gumbel** (1960) : à un paramètre $0 < \alpha \leq 1$.
   - Le générateur $\varphi(t) = \ln(1 - \alpha \ln(t))$
   $$C_\alpha(u, v) = uv \exp\left(-\alpha \ln u \ln v\right).$$

A QUOI RESSEMBLE LES COPULES ?

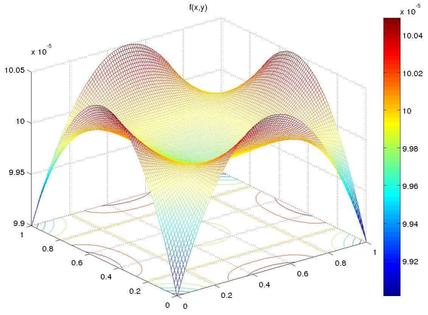


Copule de Gumbel pdf

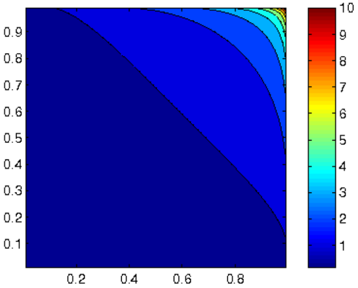


contours Copule de Frank cdf

A QUOI RESSEMBLE LES COPULES ?



Copule cubique pdf



Contours de la copule Gaussienne

ESTIMATION DE PARAMÈTRES D'UNE LOI CONJOINTE

1. Soit un échantillon $\left\{x_1^i, x_2^i\right\}$ pour $i = 1, \ldots, T$
2. Estimation des fonctions marginales $f_1(x_1|\theta_1)$ et $f_2(x_2|\theta_2)$
3. Estimation de la loi jointe $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_c\}$.

$$\boxed{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = c\left(F_1(x_1|\theta_1), F_2(x_2|\theta_2)|\theta_c\right) f_1(x_1|\theta_1) f_2(x_2|\theta_2).}$$

MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

1. La vraisemblance s'écrit :

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{T} c\left(F_1(x_1^i|\theta_1), F_2(x_2^i|\theta_2); \theta_c\right) \prod_{j=1}^{2} f_j(x_j^i; \theta_j),$$

2. La Log-vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{T} \log c\left(F_1(x_1^i|\theta_1), F_2(x_2^i|\theta_2); \theta_c\right) + \sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{2} \log f_j(x_j^i|\theta_j),$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}$$

INFERENCE FUNCTION FOR MARGINS (IFM)

1. **Etape 1** : Estimation séparée des paramètres de chaque fonction marginale

$$\mathrm{V}_j(\theta_j) = \prod_{i=1}^{T} f_j(x_j^i|\theta_j), \quad j = 1, 2$$

$$\mathrm{L}_j(\theta_j) = \log \mathrm{V}_j(\theta_j) = \sum_{i=1}^{T} \log f_j(x_j^i|\theta_j).$$

$$\boxed{\hat{\theta}_j = \arg\max_{\theta_j} \mathrm{L}_j(\theta_j) \quad \text{pour} \quad j = 1, 2,}$$

2. **Etape 2** : Estimation des paramètres de la loi jointe

$$\mathcal{L}(\theta_c, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \sum_{i=1}^{T} \log f(x_1^i, x_2^i; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \theta_c)$$

$$\boxed{\hat{\theta}_c = \arg\max_{\theta_c} \mathcal{L}(\theta_c, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}$$

MESURES DE DÉPENDANCE

1. ρ Spearman :$\rho(X,Y) = 12 \iint uvdC(u,v) - 3$
2. τ Kendall : $\tau(X,Y) = 4 \iint C(u,v)dC(u,v) - 1$

Quelques relations (Schweizer et Wolff, 1981 et R. Nelsen, 2006)

1. $-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1$,
2. $\tau = \frac{2}{\pi}\arcsin(\rho)$ (dans le cas d'une copule gaussienne)
3. $\tau(X,Y) = 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt + 1$ (dans le cas d'une copule archimédienne)

ESTIMATION BAYESIENNE

1. La loi a posteriori est :

$$f(\theta \mid \mathbf{x}) = \frac{\pi(\theta) f(\mathbf{x} \mid \theta)}{\int \pi(\theta) f(\mathbf{x} \mid \theta)\, d\theta}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta} f(\theta \mid \mathbf{x}) = \arg\max_{\theta} \{\mathcal{L}(\theta) + \log \pi(\theta)\}\,.}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_{PM} = \int \theta f(\mathbf{x} \mid \theta)\, d\theta}$$

CONCLUSION PARTIELLE

1. Copule est une notion qui caractérise la dépendence entre plusieurs variables
2. Utilisation pour modéliser le lien entre des grandeurs observées indépendament

BIBLIOGRAPHIE

Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges
Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris 8, 229-231
Abe Sklar,1959

Multivariates Models and Dependence Concepts
Volume 73 of Monographs on Statistics and Applied Probability,Chapman & Hall, London, UK
Harry Joe, 1997

An Introduction to copulas
Lecture notes in statistics (Springer-Verlag).
Roger B. Nelsen, 2006