UNIVERSITÉ de PARIS 1 PANTHÉON-SORBONNE

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité: MATHÉMATIQUES

Auteur: **CIPRIAN A. TUDOR**

Titre: CALCUL STOCHASTIQUE GAUSSIEN ET APPLICATIONS À l'INFÉRENCE STATISTIQUE

Composition du jury:

Peter IMKELLER (HUMBOLDT UNIVERSITÄT)
Annie MILLET (UNIVERSITÉ de PARIS 1)
Nicolas PRIVAULT (UNIVERSITÉ de LA ROCHELLE)
Francesco RUSSO (UNIVERSITÉ de PARIS 13)
Murad TAQQU (BOSTON UNIVERSITY)
Pierre VALLOIS (UNIVERSITÉ de NANCY 1)
Marc YOR (UNIVERSITÉ de PARIS 6)

Remerciements

Je tiens tout d'abord remercier Annie Millet qui a presenté mon dossier d'habilitation à l'Université de Paris 1. J'ai pleinement profité de son soutien et de ses conseils depuis mon arrivée à Paris 1.

Je remercie toute l'équipe du Laboratoire SAMOS au sein de laquelle j'ai pu travailler de la manière la plus agréable qui soit.

J'addresse mes remerciements les plus chaleureux à Peter Imkeller et Pierre Vallois pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon dossier d'habilitation et à Nicolas Privault, Francesco Russo, Murad Taqqu et Marc Yor pour l'honneur qu'ils me font en participant à ce jury.

Je voudrais aussi remercier mes différents co-auteurs qui m'ont beaucoup appris et apporté.

Et à mes chères Carmen et Anna-Maria.

Ciprian TUDOR - Liste de publications

Né le 14/09/73
Nationalité Roumaine
Marié

11, rue de Thionville
75019 Paris
Tel. 0142382696

SAMOS-MATISSE
Université de Paris 1
90, rue de Tolbiac, 75634 Paris Cedex 13
Tel. 0144078707

tudor@univ-paris1.fr

TRAVAUX PUBLIES OU ACCEPTES POUR PUBLICATION

[24] (avec Francesco Russo) "On the bifractional Brownian motion", 2005, **Stochastic Processes and their Applications**, à paraître.

[23] (avec Tommi Sottinen) "On the equivalence of multiparameter Gaussian processes", 2005, **Journal of Theoretical Probability**, à paraître.

[22] "Itô formula for the infinite-dimensional fractional Brownian motion", 2005, **Journal of Mathematics of Kyoto University,** à paraître.

[21] (avec Giovanni Peccati et Michèle Thieullen) "Martingale structure for Skorohod integral processes", 2005, **The Annals of Probability,** à paraître.

[20] (avec Brahim Boufoussi) "Kramers-Smoluchowski approximation for stochastic equations with fractional Brownian motion", **Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées,** 2005, Tome 50 (2), p. 125-136.

[19] (avec Giovanni Peccati) "Gaussian limits for vectors valued multiple stochastic integrals", **Séminaire de Probabilités XXXVIII,** Lecture Notes in Mathematics, 2004, p. 247-262.

[18] (avec Nathalie Eisenbaum) "A question on squared fractional Brownian motions", **Séminaire de Probabilités XXXVIII,** Lecture Notes in Mathematics, 2004, p. 282-289.

[17] " Itô-Skorohod stochastic equations and applications to finance", **Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis,** 2004, 4, p. 359-369.

[16] (avec Soledad Torres) "The Euler scheme for a class of anticipating equations", **Random Operators and Stochastic Equations,** 2004, 12(3), p. 211-224.

[15] (avec Samy Tindel et Frederi Viens) "Sharp Gaussian regularity on the circle and application to the fractional stochastic heat equation", **Journal of Functional Analysis",** 2004, 217(2), p. 280-313.

[14] (avec M'Hamed Eddahbi, Ramon Lacayo, Josep Lluis Sole et Josep Vives) "Regularity for the local times for multidimensional fractional Brownian motion with N parameters", **Stochastic Analysis and Applications,** 2005, 23(2), p. 383-400.

[13] "Martingale type stochastic calculus for anticipating integrals", **Bernoulli,** 2004, **10**(2), p. 315-323.

[12] (avec Frederi Viens) "Itô formula and local time for the fractional Brownian sheet", **Electronic Journal of Probability,** 2003, **8**, paper 14, p. 1-31

[11] (avec Xavier Bardina et Maria Jolis) "Weak approximation of the fractional Brownian motion sheet", **Stat. Prob. Letters,** 2003, **65**(4), p. 317-329.

[10] (avec Samy Tindel et Frederi Viens) "Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion", **Probability Theory and Related Fields**, 2003, **127**, p. 186-204.

[9] (avec Xavier Bardina et Maria Jolis) "Convergence in law to the multiple fractional integrals", **Stochastic Processes and their Applications**, 2003, **105,** p. 315-344.

[8] "Weak convergence to the fractional Brownian sheet in Besov spaces", **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society,** 2003, **34**(13), p. 1-12.

[7] (avec Hassan Lakhel et Youssef Ouknine) "Besov regularity for the indefinite Skorohod integral with respect to the fractional Brownian motion", **Stochastics and Stochastics Reports**, 2002, 74(3-4), p. 597-615.

[6] (avec Josep Vives) "The indefinite Skorohod integral as integrator on the Poisson space ", **Random Operators and Stochastic Equations**, 2001, 10 (1), p. 29-46.

[5] (avec Laure Coutin et David Nualart) “The Tanaka formula for the fractional Brownian motion”, **Stochastic Processes and their Applications**, 2001, 94(2), p. 301-315.

[4] (avec Josep Vives) “Anticipating Stratonovich integral for the Azéma martingales”, **Stochastic Analysis and Applications**, 2002, 20 (3), p. 673-692.

[3] (avec Nicolas Privault) “Skorohod and pathwise stochastic calculus with respect to an L^2 process”, **Random Operators and Stochastic Equations**, 2000, 8 (3), p. 201-224.

[2] “Itô type stochastic calculus for some anticipating processes driven by a Skorohod integral process”, **Annals of the University of Bucharest, Mathematics**, 1999, 48 (1).

[1] (avec Maria Tudor) “Pseudo almost periodic solutions of a class of stochastic differential equations”, **Mathematical Reports**, 1999, 1 (51).

ARTICLES SOUMIS POUR PUBLICATIONS

[1] (avec Ivan Nourdin) ”Remarks on some linear fractional equations”, 2005.

[2] (avec Tommi Sottinen) ”Parameter estimation for stochastic equations with fractional Brownian sheet”, 2005.

[3] (avec Giovanni Peccati) ”Anticipating integrals and martingales on the Poisson space”, 2005.

[4] (avec Frederi Viens) ”Itô formula for the fractional Brownian sheet using the extended divergence integral, 2005.

[5] (avec Frederi Viens) ”Statistical aspects of the fractional stochastic calculus”, 2005.

[6] (avec M’Hamed Eddahbi, Ramon Lacayo, Josep Lluis Sole et Josep Vives) ”Renormalization of the local times for d dimensional fractional Brownian motion with N parameters”, 2005.

Table des matières

Introduction générale

Ce document de synthèse s'articule autour de quelques thèmes qui ont constitué le fil conducteur de mes recherches pendant les sept dernières années:

- le calcul de Malliavin et le calcul stochastique anticipant dans le sens classique ou dans le sens généralisé
- l'étude du mouvement brownien fractionnaire (mbf) et des processus stochastiques liés à celui-ci
- la convergence en loi vers des processus gaussiens ou plus généraux, l'équivalence en loi des processus gaussiens.

Nous avons également orienté nos recherches vers l'application du calcul stochastique à des aspects pratiques, comme

- l'inférence statistique liée à des processus fractionnaires; cela représente en fait le début d'un projet plus ample (soumis d'ailleurs à l"Agence Nationale de la Recherche " dans le cadre des projets "Jeunes chercheurs").
- les mathématiques financières.

Nous avons regroupé nos travaux en six Chapitres; le choix ne respecte pas l'ordre chronologique et il n'est pas l'unique choix possible. Ces chapitres seront:

- Le Chapitre 1 intitulé *"Intégrales anticipantes et martingales"* présente une nouvelle vision du calcul stochastique anticipant de Skorohod. Il contient 5 articles (4 publiés ou acceptés et une prépublication).
- Le Chapitre 2, intitulé *"Calcul stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire"* est le plus long : il expose les résultats contenus dans 8 articles, dont 7 publiés ou acceptés et une prépublication. Évidemment, le thème central est ici l'intégration par rapport au mouvement brownien fractionnaire et des aspects différents sont traités : le temps local, le calcul stochastique pour les draps fractionnaires, les processus de Bessel fractionnaires, le mouvement brownien bifractionnaire.
- Le Chapitre 3 *"Mouvement brownien fractionnaire dans les espaces de Hilbert"* est composé de 3 articles, les trois publiés ou acceptés pour publication. Ici on traite les équations fractionnaires d'évolution, la régularité gaussienne et le calcul stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire infini-dimensionnel

- Nous avons intitulé le Chapitre 4 *"Processus gaussiens: approximation en loi, équivalence en loi"*. Nous exposons ici des résultats sur la convergence faible vers des processus liés au mouvement brownien fractionnaire et sur l'équivalence en loi des draps fractionnaires. Les 5 articles qui forment le chapitre sont acceptés ou publiés.

- Le Chapitre 5 s'intitule *" Inférence statistique pour les équations stochastiques fractionnaires"*. Il est le fruit de mes préocupations récentes sur l'estimation paramétrique pour des équations stochastiques avec le mouvement brownien fractionnaire. Il contient 2 articles qui sont des prépublications.

- Le Chapitre 6 s'intitule *"Intégration stochastique généralisée: les cas Wiener, Poisson, Azéma"* et il présente quelques travaux sur l'extension du calcul stochastique anticipant sur les espace sde Wiener, Poisson ou d'une martingale normale.

Chaque chapitre débute par une introduction, contient ensuite la présentation des travaux et se termine par une courte section de commentaires et perspectives. De façon générale, les articles écrits après ma thèse de doctorat auront une présentation plus détaillée que les travaux contenus dans la thèse de doctorat. Nous mentionnons également que, pour essayer de garder la cursivité et la concision de l'exposition, nous allons utiliser des résultats et des notations qui se trouvent dans la littérature scientifique sans les rappeler.

CHAPITRE 1: **Intégrales anticipantes et martingales**

1.1 Introduction

Le thème pricipal de ce chapitre est le calcul de Malliavin sur l'espace de Wiener et de Poisson. Ce chapitre est basé sur les travaux suivants:

[1] Martingale type stochastic calculus for anticipating integrals, **Bernoulli**, 2004, 10(2), p. 313-325.

[2] (avec Giovanni Peccati et Michèle Thieullen) Martingale structure of Skorohod integral processes. **The Annals of Probability,** à paraître.

[3] Itô-Skorohod stochastic equations and applications to finance. **Journal of Applied mathematics and stochastic analysis**, 2004, **4**, p. 359-369.

[4] (avec Soledad Torres) The Euler scheme for a class of stochastic integrals. **Random Operators and stochastic equations,** 2004, **12** (3), p. 211-224 .

[5] (avec Giovanni Peccati) Anticipating integrals and martingales on the Poisson space. **Prépublication,** soumis à *Potential Analysis.*

Le Chapitre 1 contient un recueil de travaux qui présentent une nouvelle approche du calcul de Malliavin et du calcul stochastique anticipant. Le calcul de Malliavin (ou le calcul des variations stochastiques) a constitué le sujet principal de mes recherches pendant ma thèse de doctorat. Ce calcul a été introduit par P. Malliavin en 1976 dans [64] et il a été ensuite intensivement étudié et developpé dans les années 80-90. Des recueils de résultats, méthodes et applications se trouvent dans les ouvrages de Nualart [70], d'Ocone [80], ou de Bell [10].

Son but original a été l'étude de la régularité des densités des fonctionnelles de Wiener, en particulier celles qui sont solution d'une équation différentielle stochastique; plus précisément, on s'intéressait si un tel processus stochastique possède une densité et si cette densité est régulière dans un certain sens. Des critères pour l'existence d'une densité ont été donnés en fonction de la matrice de covariance de Malliavin. L'un de traits marquants de ce calcul est le fait qu'il fournit une preuve probabiliste du théorème de Hörmander qui donne une condition d'hypoellipcité pour les opérateurs aux dérivées partielles sous laquelle la réponse aux questions précédentes est positive.

Plus tard, la tendance a été d'appliquer cette théorie à des problèmes pratiques. Une direction dans laquelle le calcul de Malliavin s'applique est la finance mathématique. Un premier travail qui montre comment ce calcul peut étre utilisé à la finance, plus précisément au calcul d'un portefeuille optimal, est celui de Ocone et Karatzas [53]. On mentionne également les travaux contenus dans l'ouvrage [58], ou [12], pour différentes manières d'utiliser cette théorie à des questions de la finance mathématique.

Un succès récent du calcul anticipant fut le fait qu'il offre la possibilité d'intégrer par rapport à des processus gaussiens, et en particulier par rapport au mouvement brownien fractionnaire. Nous faisons référence au Chapitre 2 de ce document pour une présentation detaillée de ce sujet.

Rappelons le cadre général et les principaux outils que nous utiliserons. On considère $(W_t)_{t\in[0,1]}$ un processus de Wiener standard sur l'espace de Wiener canonique $(\Omega, \mathbb{F}, P)$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctionnelles régulières de W de la forme

$$F = f\left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}\right), \qquad t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \tag{1}$$

où $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si F est de la forme (1), sa dérivée de Malliavin est donnée par

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}\right) 1_{[0,t_i]}(t), \qquad t \in [0,1].$$

L'opérateur D étant fermable, il s'étend à l'adhérence de $\mathcal{S}$ (notée $\mathbb{D}^{k,p}$) par rapport à la norme

$$\|F\|_{k,p}^p = \mathbf{E}|F|^p + \sum_{j=1}^k \mathbf{E}\|D^{(j)}F\|_{L^2}^p([0,1]), \qquad F \in \mathcal{S}, k \geq 1, p \geq 2$$

la $i$ème dérivée $D^{(j)}$ étant définie itérativement. On pose $\mathbb{L}^{k,p} = L^p\left([0,1]\,;\mathbb{D}^{k,p}\right)$. Notons que $\mathbb{L}^{k,p} \subset Dom(\delta)$.

La dérivée de Malliavin D admet comme adjoint l'intégrale de Skorohod δ. Plus précisément, l'opérateur δ est défini sur le domaine

$$Dom(\delta) = \{u \in L^2([0,1]\times\Omega) / \left|\mathbf{E}\int_0^1 u_s D_s F ds\right| \leq C\|F\|_2\}$$

et D et δ satisfont la relation de dualité

$$\mathbf{E}\left(F\delta(u)\right) = \mathbf{E}\int_0^1 D_s F u_s ds, \qquad F \in \mathcal{S}, u \in Dom(\delta). \tag{2}$$

Notons $\delta(u) = \int_0^1 u_s dW_s$. Cette intégrale, introduite par Skorohod in 1975 dans [96], coincïde avec l'intégrale classique d'Itô si le processus u que l'on intégre est adapté par rapport à la filtration engendrée par W. Cela a constitué le point de départ d'une théorie d'intégration stochastique pour des processus non-adaptés qui étend le calcul d'Itô. Parmi les résultats de ce calcul, on se réfère à la preuve d'une formule de changement de variable pour les intégrales anticipantes (voir [73]) ou à la résolution de certaines équations stochastiques anticipantes (voir, par exemple, [15], [16], [17], [81]).

D'autre part, le calcul anticipant présente, dans un certain sens, quelques désavantages, principalement au niveau de l'étude des propriétés trajectorielles des processus anticipants. Concrètement, considérons un processus intégrale indéfinie de Skorohod de la forme

$$X_t = \int_0^t u_s dW_s, \qquad t \in [0,1] \tag{3}$$

où $u 1_{[0,t]}$ appartient à $Dom(\delta)$. Si l'intégrand u n'est pas adapté, alors le processsus X n'est pas une semimartingale et le puissant calcul d'Itô ne s'applique pas à X. En fait les techniques employées pour étudier les processus de la forme (3) sont, dans leur majorité, liées plus à l'analyse fonctionnelle qu'au calcul des probabilités, cela ne permetant pas, par exemple, l'étude fine des trajectoires ou bien l'utilisation de temps d'arrêt.

Le but central de ce chapitre est de mieux comprendre la relation qui peut exister entre un processus intégrale indéfinie de Skorohod de la forme (3) et la théorie des martingales et semimartingales. On présente ci-dessous les principaux résultats obtenus dans cette direction.

1.2 Calcul stochastique de type Itô pour les intégrales anticipantes

Deux formules jouent un rôle essentiel dans notreD'abord une formule de Clark-Ocone généralisée (voir [73])

$$F = \mathbf{E}\left(F/\mathbb{F}_{[s,t]^c}\right) + \int_s^t \mathbf{E}\left(D_\alpha F/\mathbb{F}_{[\alpha,t]^c}\right) dW_\alpha \text{ , pour } F \in \mathbb{D}^{1,2} \text{ .} \tag{4}$$

Ensuite, si $\mathbb{F}_{[s,t]^c}$ est la σ-algèbre engendrée par les accroissements du brownien sur l'intérvalle $[s,t]^c$, alors on a la relation

$$\mathbf{E}\left(X_t - X_s/\mathbb{F}_{[s,t]^c}\right) = 0 \tag{5}$$

vérifiée par les processus de la forme (3). Cette relation remplace d'une certaine façon l'adaptabilité. construction.

Rappelons aussi la formule qui donne la covariance de deux intégrales de Skorohod

$$\mathbf{E}\left(\delta(u)\delta(v)\right) = \mathbf{E}\int_0^1 u_s v_s ds + \mathbf{E}\int_0^1\int_0^1 D_t u_s D_s v_t ds dt, \qquad u, v \in \mathbb{L}^{1,2}. \tag{6}$$

Dans le travail [101] nous avons montré que la classe des processus stochastiques qui sont une intégrale indéfinie de Skorohod de la forme (3) coïncide, si les intégrands sont assez réguliers dans le sens de Malliavin, avec une classe spéciale d'intégrales d'Itô de la forme

$$Y_t = \int_0^t \mathbf{E}\left[v_s/\mathcal{F}_{[s,t]^c}\right] dW_s. \tag{7}$$

Les processus de la forme (7) seront appelés *intégrales d'Itô-Skorohod.* À la base de cette relation se trouve une application simple de la formule de Ocone-Clark. Soit X un processus (3) et supposons que l'intégrand u est suffisament régulier dans le sens de Malliavin. Appliquons (4) au processus u. On obtient

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t \mathbf{E}\left[u_\alpha/\mathbb{F}_{[\alpha,t]^c}\right] dW_\alpha + \int_0^t \int_\alpha^t \mathbf{E}\left[D_\beta u_\alpha/\mathbb{F}_{[\beta,t]^c}\right] dW_\beta dW_\alpha \\ &= \int_0^t \mathbf{E}\left[u_\alpha/\mathbb{F}_{[\alpha,t]^c}\right] dW_\alpha + \int_0^t \left(\int_0^\beta \mathbf{E}\left[D_\beta u_\alpha/\mathbb{F}_{[\beta,t]^c}\right] dW_\alpha\right) dW_\beta \\ &= \int_0^t \mathbf{E}\left[u_\alpha/\mathbb{F}_{[\alpha,t]^c}\right] dW_\alpha + \int_0^t \left[\mathbf{E}\left(\int_0^\beta D_\beta u_\alpha dW_\alpha\right)/\mathbb{F}_{[\beta,t]^c}\right] dW_\beta \end{aligned}$$

et donc X est une intégrale d'Itô-Skorohod de type (7) avec $v_s = u_s + \delta(D_s u 1_{[0,s]})$.

Un résultat réciproque (c.à.d., toute intégrale d'Itô-Skorohod est une intégrale indéfinie de Skorohod) est aussi prouvé en utilisant un critère de Duc et Nualart [28]. On résume le résultat dans la proposition suivante:

Proposition 1 *i) Soit u un processus dans l'espace $\mathbb{L}^{k,p}$ avec $k \geq 3$, $p > 2$ et Y défini par (7). Alors il existe un unique processus $v \in \mathbb{L}^{k-2,p}$ tel que $X_t = \int_0^t \mathbf{E}\left[v_s/\mathcal{F}_{[s,t]^c}\right] dW_s$. De plus, $v_t = u_t + \int_0^t D_t u_s dW_s$.*

ii) Soit v un processus dans l'espace $\mathbb{L}^{k,p}$ avec $k \geq 3$, $p > 2$. Alors il existe un unique provessus $u \in \mathbb{L}^{k-2,p}$ tel que $Y_t = \int_0^t u_s dW_s$ pour tout t. De plus, $u_t = v_t - \int_0^t \mathbf{E}\left[D_t v_s/\mathcal{F}_{[s,t]^c}\right] dW_s$.

Il est également vrai que, si les intégrands sont indéfiniment différentiables au sens de Malliavin, les deux types d'intégrale coïncident comme processus, et non seulement comme variables aléatoires à l'instant t fixé.

Nous utilisons ensuite cette relation entre les intégrales de Skorohod et d'Itô-Skorohod pour développer un nouveau calcul stochastique pour les processus anticipants, différent de celui introduit dans [73]. En général, nous exploitons le calcul stochastique pour la $\mathbb{F}_{[\lambda,t]^c}$-martingale $Y_t^\lambda, \lambda \leq t$ (qui converge vers Y_t dans L^2 et presque sûrement quand $\lambda \to t$) donnée par

$$Y_t^\lambda = \int_0^\lambda \mathbf{E}\left[v_s/\mathbb{F}_{[s,t]^c}\right] dW_s$$

et nous prenons ensuite la limite lorsque λ tend vers t. Notons aussi que le processus Y vérifie "l'isométrie" suivante:

$$\mathbf{E}|Y_t|^2 = \mathbf{E}\int_0^t \left(\mathbf{E}\left[v_s/\mathbb{F}_{[s,t]^c}\right]\right)^2 ds, \tag{8}$$

formule déduite de (6) et du fait que si F est une variable aléatoire $\mathbb{F}_A$-mesurable, alors $DF = 0$ sur $A^c \times \Omega$.

Nous obtenons les résultats suivants:

$\hookrightarrow$ une formule d'Itô pour les intégrales d'Itô-Skorohod de la forme suivante: si f est de classe C^2 et Y défini par (7), alors

$$f(Y_t) = f(0) + \int_0^t f'(Y_t^\beta)\mathbf{E}\left[v_\beta/\mathbb{F}_{[\beta,t]^c}\right] dW_\beta + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Y_t^\beta)\left(\mathbf{E}\left[v_\beta/\mathbb{F}_{[\beta,t]^c}\right]\right)^2 d\beta$$

$\hookrightarrow$ une formule de Tanaka faisant intervenir le temps local d'une intégrale anticipante

$\hookrightarrow$ des inégalités de Burkholder anticipantes.

1.3 Approximation d'un intégrale de Skorohod par des martingales forward-backward: cas Wiener et Poisson

L'étape suivante de notre étude est un regard plus profond sur les liens du calcul anticipant de Skorohod et du calcul classique d'Itô. Il s'agit d'exploiter la représentation (7) pour donner une caractérisation d'une intégrale anticipante indéfinie en termes de produits de *martingales forward et de martingales backward.* Notons par **BF** la classe de processus stochastiques qui sont des combinaisons linéaires de type

$$Z_t = M_t \times N_t, \quad t \in [0,1]$$

où M est une martingale forward est N est une martingale backward (c.à.d., pour tout $t \in [0,1]$, N_t est adapté par rapport à la filtration $\mathbb{F}_{[0,t]^c}$ et $\mathbf{E}\left(N_s/\mathbb{F}_{[0,t]^c}\right) = N_t$, $\forall 0 \le s \le t \le 1$). On notera simplement $\mathbb{F}_{[0,t]^c} = \mathbb{F}_{t^c}$.

Nous démontrons que un processus X est de la forme (3) (ou, de façon équivalente, de la forme (7)) si et seulement si X est limite, dans une certaine norme, de processus qui appartiennent à la classe **BF**.

On introduit la notation suivante: si G est un processus mesurable indexé par $[0,1]$, alors

$$V(G) = \sup_\pi \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{m-1}\left(G_{t_j} - G_{t_{j+1}}\right)^2\right], \tag{9}$$

où π parcourt les partitions de $[0,1]$. Notre résultat est

Théorème 1 *Soit $u \in \mathbb{L}^{k,p}$, avec $k \geq 3$ et $p > 2$. Alors, il existe une suite de processus*

$$\left\{ Z_t^{(r)} : t \in [0,1] \right\}, \quad r \geq 1,$$

ayant les propriétés suivantes:

(i) *pour tout r, $Z^{(r)} \in \mathbf{BF}$;*

(ii) *pour tout r, $Z_t^{(r)} = \int_0^t \mathbf{E}\left[v_\alpha^{(r)} \mid \mathcal{F}_{[\alpha,t]^c} \right] dX_\alpha$, $t \in [0,1]$, où $v^{(r)} \in \mathbb{L}^{k-2,p}$;*

(iii) *pour tout r, $V\left(Z^{(r)}\right) < +\infty$ et $\lim_{r\to\infty} V\left(\delta\left(u\mathbf{1}_{[0,\cdot]}\right) - Z^{(r)}\right) = 0$.*

Nous prouvons également un résultat réciproque; il montre que une suite "de Cauchy dans la norme V" admet une limite qui est une intégrale indéfinie de Skorohod.

Théorème 2 *Soit $Z^{(n)}$ une suite dans $\mathbf{BF}$, $n \geq 1$, telle que $V\left(Z^{(n)}\right) < +\infty$ et*

$$\lim_{n,m\to+\infty} V\left(Z^{(n)} - Z^{(m)}\right) = 0.$$

Alors il existe un processus $\{Y_t : t \in [0,1]\}$ tel que

(i) *Y_t admet une représentation comme intégrale de Skorohod;*

(ii) *$V(Y) < +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} V\left(Z^{(n)} - Y\right) = 0$.*

Les aspects suivants sont aussi discutés dans [83]:

$\hookrightarrow$ pour la classe de processus pouvant s'écrire comme une somme finie d'intégrales stochastiques multiples de Wiener-Itô, nous donnons un lien explicite entre nos résultats et ceux de [28].

$\hookrightarrow$ La formule de Clark-Ocone (4) appliquée pour $s = 0$ donne la relation suivante:

$$F = \mathbf{E}\left(F/\mathcal{F}_{t^c}\right) + \int_0^t \mathbf{E}\left(D_s F/\mathcal{F}_{[s,t]^c}\right) dW_s$$

et cela montre que $F - \mathbf{E}\left(F/\mathcal{F}_{t^c}\right)$ est une intégrale d'Itô-Skorohod. Nous montrons que ce processus peut s'exprimer comme un *time-reversed* martingale brownienne et nous donnons des conditions suffisantes pour qu'il soit une semimartingale dans sa propre filtration.

$\hookrightarrow$ pour les processus X de la forme (3), nous cherchons à comprendre ce qui se passe si l'on arrête ce processus à un temps aléatoire.

Le travail [85] est consacré au calcul anticipant sur l'espace de Poisson. Il est possible de définir les opérateurs D et δ par rapport à un processus de Poisson compensé (et même plus généralement, par rapport à une martingale normale, voir [32]) en utilisant la structure d'espace de Fock engendrée par ces processus. Dans ce cas, la dérivée de Malliavin est définie comme un opérateur d'annihilation et l'intégrale de Skorohod δ est un opérateur de création sur l'espace de Fock. Nous reprennons la problématique anterieure sur l'espace de Poisson et nous donnons un analoque poissonien du Théorème 1 et du Théorème 2. Les difficultés spécifiques qui surgissent dans ce cas sont liées au fait que les trajectoires du processus de Poisson et la filtration engendrée par celui-ci ne sont pas continues.

1.4 Équations d'Itô-Skorohod: schéma d'Euler et applications à la finance

Nous proposons ensuite une classe particulière d'équations stochastiques anticipantes, l'idée d'introduire ce type d'équation étant liée à la correspondence qui existe entre les intégrales de Skorohod et celles d'Itô-Skorohod.

Il est bien connu que la méthode d'itération de Picard ne s'applique pas aux équations stochastiques dans le sens de Skorohod car la formule pour la moyenne quadratique d'une intégrale de Skorohod fait intervenir la dérivée de Malliavin qui à son tour fait intervenir la dérivée seconde etc. et cela ne permet pas d'obtenir des formules fermables. Nous introduissons une classe d'équations situées, si l'on peut dire, "entre" les équations standard de type Itô et les équations de Skorohod et que l'on appelle *équations d'Itô-Skorohod.* Elles ont la forme

$$X_t = Z + \int_0^t \sigma(s, \mathbf{E}\left(X_s/\mathbb{F}_{[s,t]^c}\right))dW_s + \int_0^t b(s, X_s)ds, \qquad t \in [0,T]. \tag{10}$$

où Z est une variable aléatoire dans $L^2(\Omega)$ et σ et b satisfont des conditions standard. La méthode classique de Picard peut être utilisée, grâce à l'isométrie (8), pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution de (10). Nous cherchons à appliquer ces équations dans deux directions:

- d'abord, nous introduissons un modèle financier dirigé par une équation d'Itô-Skorohod. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ sur lequel on définit deux actifs: un actif sans risque A_t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle $dA_t = rA_t dt$ et un actif risqué noté S_t dont l'évolution est modelisée par l'équation d'Itô-Skorohod

$$S_t = \mathbf{E}\left(S_0/\mathbb{F}_{t^c}\right) + \int_0^t \sigma\mathbf{E}\left(S_s/\mathbb{F}_{[s,t]^c}\right)dW_s + \int_0^t b\mathbf{E}\left(S_s/\mathbb{F}_{[s,t]^c}\right)ds. \tag{11}$$

En utilisant les propriétés du calcul anticipant, on peut montrer que la solution de (11) est donnée par

$$S_t = \mathbf{E}\left(S_0/\mathbb{F}_{t^c}\right) e^{\sigma W_t + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}. \tag{12}$$

Cela va permettre, pour une définition convenable du portfeuille autofinancé et une définition adéquate de la différentielle dS_t, l'obtention d'une formule de Black-Scholes pour le prix de l'option. Ce modèle pourrait être utilisé dans des situations où les prix dépendent également du futur.

- Dans le travail [100], nous donnons une schéma de discrétisation d'Euler pour approximer la solution de (10) par des processus à temps discret. Soit $0 = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n = T$ une partition de $[0, T]$ et δ tel que $\delta = \delta_n = \dfrac{T}{n}$. Le processus $Y^\delta = \{Y^\delta(t), 0 \leq t \leq T\}$ défini ci-dessous sera utilisé pour approximer la solution X de (10). D'abord on définit Y^δ à t_k par: $Y^\delta(0) = Y(0) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} Y^\delta(t_{k+1}) &= Y^\delta(t_k) + b(t_k, \mathbf{E}\left(Y^\delta(t_k))/\mathbb{F}_{[t_k,t_{k+1}]^c}\right)\delta \\ &\quad + \sigma(t_k, \mathbf{E}\left(Y^\delta(t_k)/\mathbb{F}_{[t_k,t_{k+1}]^c}\right)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) \end{aligned}$$

pour $k = 0, ..., n-1$. Ensuite, $Y^\delta(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}[, k = 0, 1, \ldots, n-1$ est défini par interpolation linéaire

$$Y^\delta(t) = Y^\delta(t_k) + \int_{t_k}^t b(t_k, \mathbf{E}\left(Y^\delta(t_k)/\mathbb{F}_{[t_k,t]^c}\right) ds + \int_{t_k}^t \sigma(t_k, \mathbf{E}\left(Y^\delta(t_k)/\mathbb{F}_{[t_k,t]^c}\right) dW(s). \tag{13}$$

Nous montrons que le schéma consideré converge dans L^2 vers la solution et nous donnons également la vitesse de convergence. Pour cela, nous combinons les méthodes standard d'Itô et les outils du calcul de Malliavin.

1.5 Commentaires et perspectives

- l'approximation d'une intégrale anticipante par des produits de martingales forward-backward donne certainement une nouvelle perspective du calcul anticipant de type divergence. Nous aimerions néanmoins obtenir des avancées encore plus importantes dans cette théorie d'intégration non-adaptée; notamment, une plus large utilisation des temps d'arrêt et la résolution d'équations stochastiques anticipantes (nous voyons ici les équations d'Itô-Skorohod comme une étape intermédiaire entre celles-ci et les équations stochastiques standard de type Itô.

- nous envisageons également d'étudier le cas planaire. Plus précisément, comme l'intégrale de Skorohod est définie sur un espace gaussien, il s'agit de comprendre comment écrire une intégrale de Skorohod par rapport au drap brownien W de type $\int_0^t \int_0^s f_{u,v} dW_{u,v}$, avec f anticipant, comme une limite de martingales forward-backward à deux paramètres. Cette question a été posée par P. Malliavin pendant mon exposé à Marne-la-Vallée en janvier 2005.

CHAPITRE 2: Calcul stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire

2.1 Introduction

Ce chapitre s'organisera autour des articles suivants, dont le thème commun est le calcul stochastique dirigé par le mouvement brownien fractionnaire.

[1] (avec Laure Coutin et David Nualart) "The Tanaka formula for the fractional Brownian motion", **Stochastic Processes and their Applications**, 2001, 94(2), p. 301-315.

[2] (avec Hassan Lakhel et Youssef Ouknine) "Besov regularity for the indefinite Skorohod integral with respect to the fractional Brownian motion", **Stochastics and Stochastics Reports**, 2002, 74(3-4), p. 597-615.

[3] (avec Frederi Viens) "Itô formula and local time for the fractional Brownian sheet", **Electronic Journal of Probability,** 2003, **8**, paper 14, p. 1-31.

[4] (avec M'Hamed Eddahbi, Ramon Lacayo, Josep Lluis Sole et Josep Vives) "Regularity of the local time for the d-dimensional fractional Brownian motion with N parameters", **Stochastic Analysis and Applications,** 2005, 23(2), p. 383-400.

[5] (avec Nathalie Eisenbaum) "On squared fractional Brownian motions", **Séminaire de Probabilités XXXVIII,** Lecture Notes of Mathematics, 2004, p. 282-289.

[6] (avec Brahim Boufoussi) "Kramers-Smoluchowski approximation for stochastic equations with fractional Brownian motion", **Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées,** 2005, **Tome 50,** (2), p. 125-136.

[7] (avec Frederi Viens) "Itô formula for the two-parameter fractional Brownian sheet using the extended divergence integral", 2005, soumis à *Stochastics.*

[8] (avec Francesco Russo) "On the bifractional fractional Brownian motion", **Stochastic Processes and their Applications,** accepté.

Le calcul stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire a été intensivement développé ces dernières années grâce aux multiples applications de ce processus dans des différents phénomènes (l'auto-similarité du processus justifie, par exemple, son intérêt dans les modélisations de fluctuations boursières ou de traffic de réseaux de télécommunications). D'ailleurs, quelques éléments du calcul stochastique par rapport à des processus gaussiens existaient déjà depuis les années 60-70: voir les travaux de Huang et Cambanis [48] ou l'ouvrage de P. Major [63]. Mais dernièrement cette théorie a été renforcée et des approches nouvelles, modernes ont été considérées.

On note par $(B_t^H)_{t\in[0,T]}, T>0$, un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \in]0,1[$ et par R sa covariance

$$R(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \tag{14}$$

Nous utiliserons la représentation de ce processus comme égrale de Wiener par rapport au mouvement brownien standard W

$$B_t^H = \int_0^t K(t,s)dW_s, \tag{15}$$

où $K(t,s)$ est donné par

$$K(t,s) = d_H\,(t-s)^{H-\frac{1}{2}} + s^{H-\frac{1}{2}} F_1\left(\frac{t}{s}\right), \tag{16}$$

d_α étant une constante et

$$F_1(z) = d_H\left(\frac{1}{2}-H\right)\int_0^{z-1}\theta^{H-\frac{3}{2}}\left(1-(\theta+1)^{H-\frac{1}{2}}\right)d\theta, \qquad z>1. \tag{17}$$

Rappelons les directions principales dans lesquelles le calcul stochastique gaussien a été développé:

1. le calcul de Malliavin (et la théorie du bruit blanc) a été utilisé, entre autre, dans [3], [30], [18] or [33] pour intégrer par rapport à des processus gaussiens. Il est possible de construire une dérivée de Malliavin et une intégrale de Skorohod sur un espace gaussien, et par rapport au brownien fractionnaire en particulier; l'idée est la même que celle présentée dans le Chapitre 1, Section 1.1 sur l'espace de Wiener, sauf que l'espace $L^2([0,1])$ est maintenant remplacé par l'espace d'Hilbert canonique (noté $\mathcal{H}$) du processus gaussien consideré. Pour B^H, cet espace est défini comme étant l'adhérence de l'ensemble $\{1_{[0,t]}, t\in[0,T]\}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]}\rangle_{\mathcal{H}} = R(t,s), \qquad t,s\in[0,T]. \tag{18}$$

Plus précisément, si F est une fonctionnelle régulière de la forme $F = f(B(\varphi_1),\cdots,B(\varphi_n))$, $n\geq 1$, $f\in C_b^\infty(R^n)$ et $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in\mathcal{H}$, la dérivée de Malliavin de F par rapport à B^H est définie par

$$D^B(F) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(B(\varphi_1),\cdots,B(\varphi_n))\varphi_j.$$

L'opérateur D^B s'étend ensuite à l'adhérence de la classe des variables aléatoires régulières par rapport à la norme

$$\|F\|_{k,p}^p = \mathbf{E}|F|^p + \sum_{j=1}^k \|D^{B,j}F\|_{L^p(\Omega;\mathcal{H}^{\otimes j})}^p.$$

Cet ensemble sera également noté par $\mathbb{D}^{k,P}$. L'intégrale de Skorohod (ou de divergence) δ^B est l'adjoint de D^B. Son domaine contient les processus $u \in L^2(\Omega;\mathcal{H})$ tels que

$$\mathbf{E}|\langle D^B F, u\rangle_{\mathcal{H}}| \leq C\|F\|_2$$

et $\delta^B(u) \in L^2(\Omega)$ est donnée par la relation de dualité: pour toute F régulière,

$$\mathbf{E}(\delta^B(u)F) = \mathbf{E}\langle D^B F, u\rangle_{\mathcal{H}}.$$

On note simplement $\delta^B(u) = \int_0^T u_s dB_s^H$. Notons qu'il existe la relation suivante (voir [3]) entre les integrales δ^B et δ (par rapport au processus de Wiener W)

$$\int_0^T u_s dB_s^H = \int_0^T (K_T^* u)_s dW_s \tag{19}$$

où pour $t \in [0,T]$

$$(K_t^* u)_s = \int_s^t u_r \frac{\partial K}{\partial r}(r,s)dr, \qquad H > \frac{1}{2}$$

et

$$(K_t^* u)_s = K(t,s)u_s + \int_s^t (u_r - u_s)\frac{\partial K}{\partial r}(r,s)dr, \qquad H < \frac{1}{2}.$$

Avec ces notations, on a pour tout t,

$$W_t = B^H\left(K_T^* 1_{[0,t]}(\cdot)\right). \tag{20}$$

Cette approche permet d'obtenir une formule d'Itô de la forme

$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_s^H)dB_s^H + H\int_0^t f''(B_s^H)s^{2H-1}ds \tag{21}$$

si f est une fonction de classe C^2 dominée par une densité gaussienne de variance liée à celle de B^H et $H > \frac{1}{4}$; en fait $H = \frac{1}{4}$ représente une barrière pour cette intégrale: il a été prouvé dans [19] que B^H est intégrable par rapport à B^H si et seulement si $H > \frac{1}{4}$. Si l'indice H est inférieur à $\frac{1}{4}$, il est necéssaire d'introduire une intégrale de divergence étendue, "plus faible" (voir [19] pour cette construction).

2. le calcul stochastique trajectoriel (ou *pathwise*) a été introduit par Russo et Vallois dans [92], [93] et appliqué au cas concret du mouvement brownien fractionnaire dans [43] et [44]. Le concept de base est celui de *l'intégrale symétrique:* si X, Y sont deux processus continues, alors l'intégrale (symmétrique) de Y par rapport à X est donnée par

$$\int_0^t Y_u d^o X_u = ucp - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{Y_{u+\varepsilon} + Y_u}{2} (X_{u+\varepsilon} - X_u)\, du, \qquad t \in [0, T]. \tag{22}$$

Cette approche permet l'obtention d'une formule d'Itô de type Stratonovich

$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_s^H) d^\circ B_s^H \tag{23}$$

si $H > \frac{1}{6}$. Ici encore, il existe un obstacle ($H = \frac{1}{6}$) qui empêche l'utilisation de ce calcul à d'indices H petits et on a besoin d'une construction étendue pour ces indices (voir [44]). Mentionnons également les travaux [1] et [112] pour des contributions au calcul stochastique trajectoriel dirigé par le mbf et rappelons que l'intégrale trajectorielle est égale à l'intégrale de Skorohod plus un terme de *trace.*

3. récemment la théorie de *rough paths* (voir [61] et [89]) a trouvé son application au cas du brownien fractionnaire. On mentionne le travail [23] pour la construction d'une *rough path* pour le mbf avec $H > \frac{1}{4}$ et pour la résolution d'équations stochastiques dirigées par le mbf et aussi [66] pour des résultats plus récents.

2.2 Temps local du mouvement brownien fractionnaire

Deux articles ([24] et [35]) seront présentés dans cette partie du document de synthèse; leur élément commun est l'étude du temps local du mouvement brownien fractionnaire.

Notons que le temps local du mbf a été d'abord étudié par Berman dans [11] et Geman et Horowitz dans [42]. Ce temps local (noté λ_t^a) a été défini comme la densité de la mesure d'occupation $\Gamma \to \int_0^t 1_\Gamma(B_s^H) ds$. Dans [11] il a été démontré que λ_t^a admet une version bicontinue dans (a, t) et ses trajectoires sont hölderiennes d'ordre $\delta < 1 - H$ dans t et d'ordre $\frac{1}{2H} - \frac{1}{2}$ dans a.

Nous introduissons un temps local modifié, "avec poids" du brownien fractionnaire. Notre temps local (noté $L(a, t)$) est défini comme la densité de la mesure d'occupation

$$\Gamma \to 2H \int_0^t 1_\Gamma(B_s^H) s^{2H-1} ds.$$

Notons par p_ε le noyau gaussien de variance ε. L'existence du temps local $L(a, t)$, $a \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$ est justifiée en utilisant les chaos de Wiener-Itô. Nous adaptons au cas fractionnaire la méthode utilisée par Nualart et Vives [77].

Proposition 2 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$ la variable aléatoire*

$$2H\int_0^t p_\varepsilon(B_s^H - a)s^{2H-1}ds$$

converge dans $L^2(\Omega)$ vers $L(a,t)$ quand $\varepsilon \to 0$. De plus, le temps local $L(a,t)$ admet la décomposition suivante en chaos de Wiener-Itô

$$L(a,t) = 2H\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t s^{(2-n)H-1}p_{s^{2H}}(a)H_n\left(\frac{a}{s^H}\right)I_n\left(1_{[0,s]^{\otimes n}}\right)ds$$

où H_n représente le polynôme d'Hermite de degré n et I_n est l'intégrale multiple d'ordre n par rapport à B^H.

Le processus $L(a,t)$ vérifie la formule de Tanaka: pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$

$$\left|B_t^H - a\right| = |a| + \int_0^t sign(B_s^H - a)dB_s^H + L(a,t) \tag{24}$$

pour $H > \frac{1}{3}$. L'intégrale stochastique ci-dessus est une intégrale de divergence (Skorohod) présentée dans la Section 2.1.

Notons que récemment dans [19], la formule (24) a été démontrée pour tout $H \in]0,1[$, en considérant une intégrale de divergence généralisée.

Le travail [35] se concentre sur l'étude du temps local $L(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,1]^N$ du mbf d-dimensionnel à n paramètres (noté $B^{\bar{H}}$ et appelé (N,d)-mbf). Concrétement, $B^{\bar{H}} = \left(B^{\bar{H}_1}, \ldots, B^{\bar{H}_d}\right)$ où les composantes sont indépendantes et $\bar{H}_i = (H_{i,1}, \ldots, H_{i,N}) \in]0,1[^N$.

Pour définir ce processus $L(x,t)$ nous avons suivi l'approche classique de Berman [11], c.à.d. $L(x,t)$ est la densité de la mesure d'occupation $A \to \int_{[0,t]} 1_A(B_s^H)ds$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Nous donnons la décomposition chaotique de ce processus et nous utilisons cela pour obtenir le résultat suivant sur la régularité au sens de Sobolev-Watanabe. Notons par $\mathbb{D}^{\alpha,p}$, $p > 1, \alpha \in \mathbb{R}$ l'espace de Sobolev -Watanabe (voir [111]).

Théorème 3 *Soit $B^{\bar{H}}$ un (N,d)-mbf. Alors son temps local $L(x,t)$ appartient à l'espace $\mathbb{D}^{\alpha,2}$ pour tout $\alpha < \sum_{j=1}^N \frac{1}{2H_j^*} - \frac{d}{2}$, oú $H_j^* = \max\{H_{i,j} : i = 1, \ldots, d\}$.*

Une chose nous semble intéressante et à remarquer: la régularité du temps local (unidimensionnel et à un paramètre) au sens de Sobolev-Watanabe coïncide avec la régularité spatiale du processus. Remarquons également que dans le cas $H = \frac{1}{2}$ nous retrouvons le résultat de [77].

2.3 Calcul stochastique par rapport au drap brownien fractionnaire

Nos contributions exposées ici ([106] et [107]) développent un calcul stochastique de type divergence (Skorohod) par rapport au mouvement brownien fractionnaire à deux paramètres. Nous arrivons à montrer une formule d'Itô dans les deux cas: quand les indices de Hurst sont inférieurs ou supérieurs à un demi.

Le drap brownien fractionnaire $(W^{\alpha,\beta}_{s,t})_{s,t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré, partant de l'origine, de fonction de covariance

$$\mathbf{E}\left(W^{\alpha,\beta}_{t,s}W^{\alpha,\beta}_{u,v}\right) = R^{\alpha}(t,u)R^{\beta}(s,v)$$

$$= \frac{1}{2}\left(t^{2\alpha}+u^{2\alpha}-|t-u|^{2\alpha}\right)\frac{1}{2}\left(s^{2\beta}+v^{2\beta}-|s-v|^{2\beta}\right).$$

Nous faisons référence aux travaux [2] ou [9] pour les propriétés de base de $W^{\alpha,\beta}$. On rappelle que ce processus admet une version continue et il est auto-similaire. Nous utiliserons également sa représentation comme intégrale de Wiener par rapport au drap brownien standard W

$$W^{\alpha,\beta}_{s,t} = \int_0^t\int_0^s K^{\alpha}(t,u)K^{\beta}(s,v)dW_{u,v},$$

le noyau K_{α} étant défini par (16) dans la Section 2.1.

Comme l'on travaille sur un espace gaussien, le calcul de Malliavin peut être appliqué au cas du drap brownien fractionnaire. Le rôle central dans cette construction est joué par l'espace de Hilbert canonique du drap $W^{\alpha,\beta}$, noté $\mathcal{H}^{\alpha,\beta}$, qui est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices sur $[0,1]^2$ par rapport au produit scalaire

$$\langle 1_{[0,t]\times[0,s]}, 1_{[0,u]\times[0,v]}\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}} = R^{\alpha}(t,u)R^{\beta}(s,v).$$

Fixons $\alpha,\beta > \frac{1}{2}$ et notons par $\delta^{W^{\alpha,\beta}}$ et $D^{W^{\alpha,\beta}}$ l'intégrale de Skorohod et la dérivée de Malliavin par rapport à $W^{\alpha,\beta}$. Cette fois-ci, la relation qui relie $\delta^{W^{\alpha,\beta}}$ à l' intégrale de Skorohod par rapport au drap brownien classique W est pour

$$\int_0^1\int_0^1 f(u,v)dW^{\alpha,\beta}_{u,v} = \int_0^1\int_0^1 (K^{*,2}_{\alpha,\beta}f)(u,v)dW_{u,v}$$

où

$$(K^{*,2}_{\alpha,\beta}f)(u,v) = \int_u^1\int_v^1 f(a,b)\frac{\partial K^{\alpha}}{\partial a}(a,u)\frac{\partial K^{\beta}}{\partial b}(b,v)dadb$$

pour tout processus $f \in Dom(\delta^{W^{\alpha,\beta}}) \subset L^2(\Omega;\mathcal{H}^{\alpha,\beta})$.

Pour démontrer une formule d'Itô pour $f(W^{\alpha,\beta}_{s,t})$, nous avons utilisé la méthode classique basée sur la formule de Taylor. Pour une meilleure intuition sur cette formule, il est préférable de comprendre d'abord le cas $f(x) = x^2$. Nous allons illustré les étapes significatives de la décomposition de $(W^{\alpha,\beta}_{s,t})^2$. Considérons $\pi^1 : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = s$ et $\pi^2 : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t$ deux partitions de $[0,s]$, respectivement $[0,t]$.

Après une écriture convenable de la formule de Taylor et des regroupements de termes, on arrive à

$$(W^{\alpha,\beta}_{s,t})^2 = \lim_{|\pi|\to 0}(I+J)$$

avec

$$I = 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_{j+1}}\delta\left(1_{\Delta_i\times\Delta_j}\right)$$

et

$$J = 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left(W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_{j+1}} - W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_j}\right)\left(W^{\alpha,\beta}_{s_{i+1},t_j} - W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_j}\right).$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale de Skorohod, le terme I se décompose à son tour comme suit:

$$\begin{aligned} I &= 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\delta\left(W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_{j+1}}1_{\Delta_i\times\Delta_j}\right) + 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\langle 1_{[0,s_i]\times[0,t_{j+1}]}, 1_{\Delta_i\times\Delta_j}\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}} \\ &= 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\delta\left(W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_{j+1}}1_{\Delta_i\times\Delta_j}\right) + 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\langle 1_{[0,s_i]}, 1_{\Delta_i}\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha}}\langle 1_{[0,t_{j+1}]}, 1_{\Delta_j}\rangle_{\mathcal{H}^{\beta}}. \end{aligned}$$

Il est possible de montrer les convergences suivantes dans $L^2(\Omega)$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\delta\left(W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_{j+1}}1_{\Delta_i\times\Delta_j}\right) \to \int_0^t\int_0^s W^{\alpha,\beta}_{u,v}dW^{\alpha,\beta}_{u,v} \tag{25}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\langle 1_{[0,s_i]}, 1_{\Delta_i}\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha}}\langle 1_{[0,t_{j+1}]}, 1_{\Delta_j}\rangle_{\mathcal{H}^{\beta}} \\ &= \frac{1}{4}\sum_i\left(s_{i+1}^{2\alpha} - s_i^{2\alpha} - (s_{i+1}-s_i)^{2\alpha}\right)\sum_j\left(t_{j+1}^{2\beta} - t_j^{2\beta} - (t_{j+1}-t_j)^{2\beta}\right) \to \frac{1}{4}s^{2\alpha}t^{2\beta}. \end{aligned}$$

Concernant le terme J, nous avons

$$\begin{aligned} J &= 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\delta\left[\left(W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_{j+1}} - W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_j}\right)1_{\Delta_i\times[0,t_j]}\right] + 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\langle 1_{[0,s_i]}, 1_{\Delta_i}\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha}}\langle 1_{[0,t_j]}, 1_{\Delta_j}\rangle_{\mathcal{H}^{\beta}} \\ &= 2M(\pi) + 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\langle 1_{[0,s_i]}, 1_{\Delta_i}\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha}}\langle 1_{[0,t_j]}, 1_{\Delta_j}\rangle_{\mathcal{H}^{\beta}} \end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
M(\pi) &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \delta\left[\left(W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_{j+1}} - W^{\alpha,\beta}_{s_i,t_j}\right) 1_{\Delta_i\times[0,t_j]}\right] \\
&= \delta^{(2)}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} 1_{\Delta_i\times[0,t_j]}(\cdot)1_{[0,s_i]\times\Delta_j}(\star)\right] := \delta^{(2)}(a^\pi) \qquad (26)
\end{aligned}
$$

et $\delta^{(2)}$ représente une intégrale de Skorohod double par rapport au drap brownien fractionnaire. Comme avant,

$$
\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \langle 1_{[0,s_i]}, 1_{\Delta_i}\rangle_{\mathcal{H}^\alpha} \langle 1_{[0,t_j]}, 1_{\Delta_j}\rangle_{\mathcal{H}^\beta} \to_{|\pi|\to 0} \frac{1}{4}s^{2\alpha}t^{2\beta} \text{ in } L^2 . \qquad (27)
$$

Le terme le plus difficile à gérer est ici le terme (26). Celui-ci est en fait un terme spécifique pour le cas à deux paramètres; il intervient aussi dans le cas classique (c.à.d. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$) mais dans ce cas il est moins difficile à traiter car c'est une martingale (voir [71]). Nous procédons de la façon suivante: on montre que la suite $(M(\pi))_\pi$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et admet donc une limite dans $L^2(\Omega)$ (plus exactement, que la suite a^π (26) est de Cauchy dans $\mathcal{H}^{\alpha,\beta}$); cette limite sera notée $\tilde{M}_{s,t}$. On obtient finalement la formule suivante:

$$
\left(W^{\alpha,\beta}_{s,t}\right)^2 = 2\int_0^t\int_0^s W^{\alpha,\beta}_{u,v} dW^{\alpha,\beta}_{u,v} + 2\tilde{M}_{s,t} + s^{2\alpha}t^{2\beta}. \qquad (28)
$$

Cela se généralise ainsi: si f est une fonction de classe C^4 dominée (elle et ses dérivées) par une exponentielle de type densité gaussienne , alors

$$
\begin{aligned}
f(W^{\alpha,\beta}_{s,t}) &= f(0) + \int_0^t\int_0^s f'(W^{\alpha,\beta}_{u,v}) dW^{\alpha,\beta}_{u,v} \\
&+ 2\alpha\beta \int_0^t\int_0^s f''(W^{\alpha,\beta}_{u,v}) u^{2\alpha-1}v^{2\beta-1} dudv + \int_0^t\int_0^s f''(W^{\alpha,\beta}_{u,v}) d\tilde{M}_{u,v} \\
&+ \alpha \int_0^t\int_0^s f'''(W^{\alpha,\beta}_{u,v}) u^{2\alpha-1}v^{2\beta} dud_vW^{\alpha,\beta}_{u,v} + \beta \int_0^t\int_0^s f'''(W^{\alpha,\beta}_{u,v}) u^{2\alpha}v^{2\beta-1} d_uW^{\alpha,\beta}_{u,v}dv \\
&+ \alpha\beta \int_0^t\int_0^s f^{iv}(W^{\alpha,\beta}_{u,v}) u^{4\alpha-1}v^{4\beta-1} dudv. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Comme application, en approchant la fonction valeur absolue $|\cdot|$ par des fonctions régulières, on montre une version à deux paramètres de la formule de Tanaka (24).

La méthode exposée ci-dessus est très dépendante du fait que les paramètres de Hurst α et β sont supérieurs à $\frac{1}{2}$. Le cas où α et β sont $< \frac{1}{2}$ doit être traité d'une manière totalement différente. Précisons d'abord que $W^{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable au sens de Skorohod par rapport à $W^{\alpha,\beta}$ si $(\alpha,\beta) \notin]\frac{1}{4},1[$ (une preuve de [19] justifie cela). En conséquence, il est souhaitable d'introduire une forme d'intégrale de divergence plus faible qui fonctionne pour des indices de Hurst très petits. Pour cela, nous adaptons la construction de [28] dans le cas unidimensionnel.

L'idée centrale est de remplacer l'espace $\mathcal{H}^{\alpha,\beta}$ par une space plus grand, défini par

$$\mathcal{H}^{(2),\prime} = \left(K^{\star,2,adj} K^{\star,2}\right)^{-1} \left(L^2(0,1)\right)$$

où $K^{\star,2,adj}$ est l'opérateur adjoint de $K^{\star,2}$ et de définir la nouvelle intégrale de la façon suivante: Nous dirons qu'un processus U appartient au domaine généralisé de l'intégrale de divergence ($U \in Dom^{\star}(\delta)$ s'il existe une variable aléatoire notée $\delta(U)$) telle que

$$E(F\delta(U)) = \int\int_T E\left[U_{s,t}\left(K^{\star,2,adj}K^{\star,2}D_{\cdot,\cdot}F\right)(s,t)\right] dsdt \quad \forall F \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^{(2),\prime}}. \tag{30}$$

Ainsi, la nouvelle intégrale restreinte au domaine de l'ancienne, coïncide avec l'ancienne.

En exploitant la relation de dualité (30) et en définissant convenablement l'intégrale par rapport à $\tilde{M}_{s,t}$, nous prouvons la formule (29) pour des indices $\alpha, \beta < \frac{1}{2}$.

La dernière partie de [107] présente une extension des résultats au drap brownien logarithmique, c.à.d. au délà de l'ordre de régularité du mouvement brownien fractionnaire. Le mouvement brownien logarithmique a été introduit dans [67] et il représente une extension du brownien fractionnaire: en deux mots, l'ordre de régularité "r^H " est remplacé par $\log(\frac{1}{r})$.

2.4 Compléments sur le calcul stochastique fractionnaire

Cette partie contient les résumés de quatre travaux sans aucun lien explicite entre eux. Leur dénominateur commun est qu'ils sont tous centrés sur le calcul stochastique, en général de type divergence, dirigé par le mbf. Nous allons passer en revue les résultats contenus dans ces articles.

- Le travail [57] étudie la régularité dans les espaces de Besov des trajectoires d'une intégrale indéfinie de Skorohod par rapport au mouvement brownien fractionnaire. Ce type de régularité de Besov constitue un problème naturel lorsque l'on s'intéresse à l'étude des trajectoires d'un processus stochastique et cela représente en général une amélioration de la régularité hölderienne.

  Il a été prouvé dans [3] que les trajectoires $t \to \int_0^t u_s dB_s^H$, où u est un processus suffisament régulier et l'intégrale est au sens de Skorohod, sont hölderiennes d'ordre $\delta < H$. Notre résultat va un peu plus loin: nous montrons que pour $H < \frac{1}{2}$ ces trajectoires appartiennent à "l'espace de Besov d'ordre H " noté $\mathcal{B}^H_{p,\infty}$ pour tout $p > \frac{1}{H}$ (voir [20] pour la définition de cet espace). Notons que ce résultat étend celui de [20]: ici les auteurs montrent que le processus B^H lui-même appartient à cet espace $\mathcal{B}^H_{p,\infty}$ pour tout $p > \frac{1}{H}$. Notons aussi que le cas $H > \frac{1}{2}$ a été traité dans [75].

Des éléments puissants du calcul anticipant (formule d'Itô anticipante, inégalités de Meyer) sont employés pour la démonstration des résultats.

- L'article [37] est un travail qui soulève plutôt des questions et donne des réponses partielles. Il s'agit d'étudier les processus de Bessel fractionnaires. Rappelons d'abord la situation classique: si $W^1, \dots, W^d$ sont d mouvements browniens indépendants et si l'on pose

$$Y_{d,t} = (W_t^1)^2 + \dots + (W_t^d)^2$$

alors le processus Y_d vérifie l'équation

$$Y_{d,t} = 2\int_0^t \sqrt{Y_{d,s}} d\gamma_s + dt$$

où le processus

$$\gamma_t = \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{W_s^i}{\sqrt{Y_{d,s}}} dW_s^i$$

est un mouvement brownien (cela se voit facilement à l'aide du théorème de caractérisation de Lévy; il est une martingale de crochet égal à t). La propriété d'additivité suivante

$$Y_d + Y_{d'} =^{loi} Y_{d+d'}, \qquad d, d' \in \mathbb{R} \tag{31}$$

suit immédiatement et cela entraîne que la loi du processus Y_d est indéfiniment divisible.

Nous avons repris cette problématique dans le contexte fractionnaire. Il y a un élément supplémentaire qui motive cette question: dans [36] il a été démontré que si $H \leq \frac{1}{2}$, la loi de $(B^H)^2$ est indéfiniment divisible et si $H > \frac{1}{2}$ cette loi n'est pas indéfiniment divisible.

Considérons $B^{H,1}, \dots, B^{H,d}$ d mbf indépendants et posons

$$Y_{d,t}^H = (B_t^{H,1})^2 + \dots + (B_t^{H,d})^2. \tag{32}$$

Pour $d = 1$ nous avons d'après (21)

$$Y_{1,t}^H = 2\int_0^t \sqrt{Y_{1,s}^H} dY_{1,d}^H + t^{2H}$$

La question ci-dessous suit tout à fait naturellement:

- le processus

$$\gamma^H_{d,t} = 2\int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{B^{H,i}}{\sqrt{Y^H_{d,s}}} dB^{H,i}_s \tag{33}$$

  est-il un mbf **ET**

- l'équation suivante est-elle vérifiée

$$Y^H_{d,t} = 2\int_0^t \sqrt{Y^H_{d,s}} d\gamma^H_{d,s} + dt^{2H}? \tag{34}$$

  Nous montrons que la réponse à la question précedente est **négative** (à noter que nous demandons (33) **et** (34) à la fois). Par une application de la formule d'Itô (qui sera détaillée dans un travail en cours avec D. Nualart) il suit que le processus (33) n'est pas un mbf. Un résultats similaire a été prouvé indépendament dans [46] et [49].

- L'article [14] donne un résultat d'approximation de Kramers-Smoluchowski pour la solution d'une équation stochastique dirigée par le mbf. On considère l'équation suivante

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + B^H_t \ , \ t \in [0,T]. \tag{35}$$

  où b satisfait une condition Lipschitz globale. On mentionne les travaux [76] et [13] pour l'étude de l'équation (35) sous des conditions même plus faibles sur le drift b. Pour $\alpha \in]0,\infty[$ on considère aussi le système (36)-(37)

$$dX^{(\alpha)}_t = Y^{(\alpha)}_t dt, \quad X^{(\alpha)}_0 = x \tag{36}$$

$$dY^{(\alpha)}_t = \alpha b(X^{(\alpha)}_t)dt - \alpha Y^{(\alpha)}_t dt + \alpha dB^H_t, \ \ Y^{(\alpha)}_0 = y. \tag{37}$$

  Nous montrons que quand $\alpha \to \infty$, alors presque sûrement, la solution X^α du système (36)-(37) converge uniformément vers la solution X du (35). Nous généralisons ainsi le résultat de Nelson [68] pour $H = \frac{1}{2}$.

2.5 Mouvement brownien bifractionnaire

Dans le travail [91] nous analysons les propriétés du *mouvement brownien bifractionnaire* construit par Houdré et Villa dans [47].

Les besoins de plus en plus diversifiés de modéliser les phénomènes naturels ont conduit récemment à l'introduction de processus stochastiques qui généralisent le brownien fractionnaire; celui-ci se montre en effet insuffisant comme modèle dans quelques cas. Rappelons l'expression alternative du mbf comme intégrale de Wiener

$$B_t^H = C_H \times \left[\int_{-\infty}^{0} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s \right]. \qquad (38)$$

Nous mentionnons quelques extensions du mbf existantes dans la littérature scientifique récente.

↪ *le mouvement brownien multi-fractionnaire* $B_{H(t)}(t)$ introduit dans [4]; dans l'expression (38), l'indice H est remplacé par une fonction hölderienne

$$B_{H(t)}(t) = C_H \times \left[\int_{-\infty}^{0} \left((t-s)^{H(t)-\frac{1}{2}} - (-s)^{H(t)-\frac{1}{2}} \right) dW_s + \int_0^t (t-s)^{H(t)-\frac{1}{2}} dW_s \right]$$

où $H(t)$ est une fonction hölderienne d'ordre $\beta > 0$. Si $H(t) \in]0,1[$ est constante, on retrouve le mbf.

↪ *le mouvement fractionnaire stable de Levy;* dans (38) le mouvement brownien W est remplacé par un mouvement stable de Levy, voir [95].

↪ *le mouvement brownien logarithmique* déjà evoqué dans le Chapitre 2, Section 2.3; ici l'ordre de régularité "r^H" est affaibli à l'échelle logarithmique "$\log(1/r)$".

Définition 1 *Le* **mouvement brownien bifractionnaire** $(B_t^{H,K})_{t\geq 0}$ *est un processus gaussien partant de 0, de covariance*

$$R^{H,K}(t,s) := R(t,s) = \frac{1}{2^K} \left(\left(t^{2H} + s^{2H} \right)^K - |t-s|^{2HK} \right) \qquad (39)$$

avec $H \in (0,1)$ *et* $K \in (0,1]$.

Biensûr, pour $K = 1$ on retrouve le mbf. Parmi ses propriétés immédiates, citons

- Si $\sigma_\varepsilon^2(t) := \mathbf{E} \left(B_{t+\varepsilon}^{H,K} - B_t^{H,K} \right)^2$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma_\varepsilon^2(t)}{\varepsilon^{2HK}} = 2^{1-K}. \qquad (40)$$

- Soit $T > 0$; pour tous $s, t \in [0,T]$,

$$2^{-K} |t-s|^{2HK} \leq \mathbf{E} \left(B_t^{H,K} - B_s^{H,K} \right)^2 \leq 2^{1-K} |t-s|^{2HK}. \qquad (41)$$

  L'inégalité (41) montre que $B^{H,K}$ est une quasi-hélice au sens de J.P. Kahane [52].

- Le processus est HK-auto-similaire.
- Le processus est Hölder continu d'ordre $\delta < HK$.

En dehors des problémes de modélisation, le processus $B^{H,K}$ se montre intéressant du point de vue mathématique; un premier argument pour cela est le résultat suivant sur sa variation d'ordre α (considerée ici dans le sens de Russo-Vallois [92]).

Proposition 3 *Soit* $(B_t^{H,K})_{t\in[0,T]}$ *un mouvement brownien bifractionnaire avec* $H \in (0,1)$ *et* $K \in (0,1]$. *Alors*

$$[B^{H,K}]_t^{(\alpha)} = 0, \ \textit{if}\ \alpha > \frac{1}{HK}$$

et

$$[B^{H,K}]_t^{(\alpha)} = 2^{\frac{1-K}{2HK}} \rho_{HK} t \ \textit{if}\ \alpha = \frac{1}{HK},$$

où $\rho_{HK} = \mathbf{E}|N|^{1/HK}$, N *étant une variable aléatoire normale centrée réduite.*

En conséquence, si $HK = \frac{1}{2}$, le processus $B^{H,K}$ est un processus gaussien de variation quadratique égale à $constante \times t$. Cela motive un regard plus profond sur ce cas spécial $HK = \frac{1}{2}$ (dans les autres cas, le processus a un comportament plus au moins similaire au mbf d'indice HK). Nous allons essayer de répondre aux questions suivantes: ce processus est-il une semimartingale? un processus de Dirichlet? est-il markovien? est-il à mémoire longue ou à mémoire courte?

La réponse sur la question " ce processus est-il une semimartingale?" tourne autour du résultat suivant prouvé par Stricker [99] (voir aussi [39]): un processus gaussien continuu est une semimartingale dans sa propre filtration si et seulement s'il est une *quasimartingale*. Pour rappeller les notions, un processus X dans $L^1(\Omega)$ est une quasimartingale si

$$\sup_{\Delta} \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \mathbf{E}\left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j} / \mathcal{F}_{t_j}^X \right) \right\|_1 < \infty,$$

où $\mathcal{F}^X$ est la filtration naturelle du processus X et $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots t_n = T$ est une partition de $[0,T]$.

Des estimations basées sur la structure de covariance du processus $B^{H,K}$ permettent de démontrer que celui-ci n'est ni une semimartingale ni un processus de Dirichlet; il n'est markovien non plus et il est à mémoire courte si $HK \leq \frac{1}{2}$ et à mémoire longue si $HK > \frac{1}{2}$.

Même si $B^{H,K}$ n'est pas une semimartingale, il est d'une certaine façon "plus proche" d'une semimartingale que le mbf, car il possède la propriété

$$\sup_{\Delta} \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathbf{E}\left(B_{t_{j+1}}^{H,K} - B_{t_j}^{H,K} / B_j^{H,K} - B_{j-1}^{H,K} \right)\|_1 < \infty. \tag{42}$$

À noter que la quantité (42) est infinie dans le cas du mbf.

La dernière partie du travail est consacrée au développement d'une théorie d'intégration stochastique par rapport à $B^{H,K}$. Remarquons que, parmi les méthodes utilisées pour intégrer par rapport au mbf (exposées dans l'introduction du chapitre), la méthode Skorohod semble difficile à adapter car nous ne connaissons pas l'expression du noyau (s'il existe) qui permet d'écrire $B^{H,K}$ comme intégrale de Wiener par rapport au brownien. Nous alons donc faire appel au calcul *trajectoriel, via ε-régularisation* dans le sens de Russo et Vallois. Cela mène à la situation suivante:

- Si $HK > \frac{1}{6}$, alors le calcul via ε-régularisation donne une formule d'Itô de type standard
$$f(B_t^{H,K}) = f(0) + \int_0^t f'(B_u^{H,K})d^0 B_u^{H,K}.$$
- Si $HK \leq \frac{1}{6}$ on a besoin d'une construction étendue, basée sur l'intégrale de Newton-Côtes, suivant [44].

2.6 Commentaires et perspectives

- le calcul stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire est toujours en pleine évolution; une liste non-négligéable de problèmes ouverts reste à traiter.
- concernant les équations dirigées par le mbf, des résultats sur l'existence et l'unicité de la solutions ont été prouvés surtout dans le cadre du calcul trajectoriel: les rough paths de T. Lyons (voir [23]) ou le calcul via régularisation de Russo-Vallois (voir [69]). Récemment, l'article [79] a traité le cas d'une solution variationnelle; voir aussi [72]. Tout reste par contre à faire sur les équations de divergence avec le mbf.
- presque tout reste à faire également sur les équations stochastiques avec le drap brownien fractionnaire.
- concernant les processus de Bessel fractionnaires, beaucoup des choses restent à comprendre: quelle est la loi du processus γ^H donné par (33)? quelle est l'équation vérifée par le processus de Bessel fractionnaire défini dans la Section 2.4 ?
- il serrait peut-être utile de faire un étude plus détaillée du mouvement brownien bifractionnaire; au moins le cas $HK = \frac{1}{2}$ semble assez intéressant.

CHAPITRE 3 : Mouvement brownien fractionnaire dans les espaces de Hilbert

3.1 Introduction

Le calcul stochastique fractionnaire dans un contexte infini-dimensionnel constitue l'élément central de ce chapitre. Trois articles composeront le Chapitre 3:

[1] (avec Samy Tindel et Frederi Viens) "Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion", **Probability Theory and Related Fields**, 2003, **127**, p. 186-204.

[2] (avec Samy Tindel et Frederi Viens) "Sharp Gaussian regularity on the circle and application to the fractional stochastic heat equation", **Journal of Functional Analysis",** 2004, **217,** (2), p. 280-313.

[3] Itô formula for the infinite-dimensional fractional Brownian motion, 2005, **Journal of Mathematics of Kyoto University**, à paraître.

La question de l'étude du mbf infini-dimensionnel a été assez récemment abordée, voir les travaux [34], [65] ou [45]. Le cadre général est le suivant: on se donne U un espace de Hilbert séparable et Q un opérateur auto-adjoint et positif sur U; Q sera soit nucléaire soit l'identité. Soit $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ les valeurs propres de Q et $(e_j)_{j\geq 1}$ les vecteurs propres associés; ils forment une base orthonormée de U.

Un processus B^H à valeurs dans U est dit *mouvement brownien fractionnaire de covariance* Q (ou simplement *Q-mbf*) si c'est un processus gaussien centré, partant de 0, de covariance

$$C_{B^H}(t,s) = R(t,s)Q$$

où R est la covariance standard du mouvement brownien fractionnaire unidimensionnel. On mentionne que le Q-mbf B^H admet la représentation

$$B_t^H = \sum_{j\geq 1} \sqrt{\lambda_j}\beta_j^h(t)e_j \tag{43}$$

l'écriture étant formelle si Q est l'identité (elle est interpretée dans une sens élargi).

Nos contributions se concentrent sur les aspects suivants.

- nous nous sommes intéressés dans [104] au cas des équations d'évolution dirigées par le Q-mbf avec un bruit linéaire additif. Nous donnons un théorème d'existence et unicité de la solution et nous discutons sa régularité.

- nous donnons un résultat qui caractérise le module de continuité d'un champ gaussien sur le cercle et nous appliquons cela au cas de la solution de l'équation fractionnaire de la chaleur.

- nous construissons un calcul stochastique par rapport au Q-mbf et nous obtenons une formule d'Itô quand l'indice de Hurst est supérieur à $\frac{1}{2}$.

3.2 Présentation des résultats

D'abord nous considérons l'équation

$$dX(t) = AX(t)dt + \Phi dB^H(t),\ X(0) = x \in V \tag{44}$$

oú V est un autre espace de Hilbert, A un opérateur de V dans V et $\Phi \in L(U;V)$. Nous allons noter par P_λ la mesure spectrale de l'opérateur A. Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution de (44) au sens *mild*.

Théorème 4 *Soit B^H un Q-mbf cylindrique dans l'espace de Hilbert U et soit A : $Dom(A) \subset V \to V$ un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert V. Supposons que A est négatif, plus précisément, qu'il existe un réel $l > 0$ tel que le support de dP_λ est contenu dans $(-\infty, -l]$. Alors pour tout $\Phi \in \mathcal{L}_2(U, V)$, il existe une unique solution au sens mild $(X(t))_{t\in T}$ de (44) appartenant à $L^2(\Omega; V)$ si et seulement si $\Phi^* G_H(-A)\Phi$ est un opérateur à trace, où*

$$G_H(\lambda) = (\max(\lambda, 1))^{-2H}. \tag{45}$$

La condition "le support de P_λ est contenu dans $(-\infty, -l]$" peut être interpretée comme une condition de "trou spectral" de A.

La preuve du Théorème 4 repose sur l'estimation de la quantité

$$E\left|\int_0^t e^{(t-s)A}\Phi dB^H(s)\right|_V^2$$

et des preuves différentes sont nécessaires selon la valeur de H. Dans le cas $H > \frac{1}{2}$ une intégrale réelle de type

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda v^{2H-2}e^{-v}\left[\frac{e^{2\lambda} - e^{2v}}{e^{2\lambda}}\right]dv$$

doit être estimée, tandis que dans le cas $H < \frac{1}{2}$ on est amené à regarder une intégrale de type

$$B(a, A) = \int_0^1 ds \exp(-2as)\left[\int_0^s (e^{ar} - 1) r^{A-1} dr\right]^2$$

avec $a \geq 0$ et $A \in (-1/2, 0]$.

Un cas particulier intéressant et motivant et celui de l'équation fractionnaire de la chaleur. Par conséquent A est le laplacien sur le cercle et $U = L^2(S^1)$. Nous trouverons dans cas que la solution de (44) existe si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{4H}} < \infty$$

où q_n sont les valeurs propres du laplacien. Nous rencontrons donc encore la barrière $H = \frac{1}{4}$ déjà évoquée dans le Chapite 2, Section 2.1.

Nous énnonçons et prouvons ensuite un résultat de régularité pour la solution de (44).

Théorème 5 *Soit $H \in]0,1[$, et supposons que pour $\alpha \in (0, H)$, l'opérateur*

$$\Phi^*(-A)^{-2(H-\alpha)}\Phi$$

est à trace. Alors pour tout $\gamma < \alpha$ et tout $\varepsilon < (\alpha - \gamma)$, presque sûrement,

$$X \in C^{\alpha-\gamma-\varepsilon}\left([0,T]; D\left((-A)^{\gamma}\right)\right).$$

En particulier, pour tout $t > 0$, $X(t) \in D((-A)^{\gamma})$.

Le travail [105] est lié au problème exposé ci-dessus. La question étudiée est: étant donné un champ gaussien Y sur le cercle unité S^1, comment caractériser son module de continuité en fonction de sa métrique canonique. Pour préciser ces notions, nous rappelons quelques définitions. Soit f une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{0+} f = 0$.

- nous dirons que f est un module de continuité presque sûre pour Y s'il existe une variable aléatoire α_0 presque sûrement positive et non-nulle telle que

$$\alpha < \alpha_0 \Rightarrow \sup_{|x-y|<\alpha, x,y \in S^1} \left(|Y(x) - Y(y)|\right) \leq f(\alpha).$$

- la métrique canonique δ de Y est définie pour tous $x, y \in S^1$ par

$$\delta(x,y) = \left(E\left(Y(x) - Y(y)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{46}$$

Nous obtenons le résultat:

Théorème 6 *Soit Y un champ gaussien sur S^1, notons δ sa métrique canonique. Soit*

$$f_\delta(\alpha) = \int_0^\infty \delta\left(\min(e^{-x^2}, \alpha)\right) dx. \tag{47}$$

Alors il existe une constante K telle que (sous quelques conditions de régularité sur la métrique δ)

a) Si f est un module de continuité presque sûre pour Y sur S^1, alors pour tout α assez petit,

$$Kf(\alpha) \geq f_\delta(\alpha)$$

b) Si $\lim_{0+} f_\delta = 0$ alors Kf_δ est un module de continuité presque sûre pour Y sur S^1.

Nous appliquons le résultat à la solution X de (44) (cette fois-ci, on utilise sa forme *faible*) et nous trouvons que, toujours sous certaines conditions, son module exact de continuité est $\int_0^\infty \delta\left(\min(e^{-x^2}, \alpha)\right) dx$, avec δ donné par

$$\delta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{4H}}(1 - \cos(nr)).$$

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la construction d'une théorie de l'intégration stochastique par rapport au Q-mbf. Cette construction est contenue dans [102] et elle aurais très bien faire partie du chapitre précédent. On se restreint au cas $H > \frac{1}{2}$ et on prouve la formule d'Itô suivante: si $F : U \to \mathbb{R}$, $F \in C_b^3(U)$ telle que F', F'' sont uniformément continues, alors

$$F(B_t^H) = F(0) + \int_0^t F'(B_s^H) dB_s^H + H \int_0^t F''(B_s^H) s^{2H-1} ds$$

où le dernier terme est défini par

$$\int_0^t F''(B_s^H) s^{2H-1} ds := \sum_{j \geq 1} \lambda_j \int_0^t F''(B_s^H)(e_j)(e_j) s^{2H-1} ds. \tag{48}$$

La spécificité du cas infini-dimensionnel fait que la démonstation de cette formule néccesite des méthodes differéntes de celles utilisées dans [3], par exemple.

3.3 Commentaires et perspectives

- récemment, dans le travail [60], une équation de type (44) mais avec un bruit non-linéaire a été traitée pour $H > \frac{1}{2}$ et avec l'intégrale stochastique dans le sens de Young.
- il est connu (voir [25]) que dans le cas du mouvement brownien infini-dimensionnel le dernier terme qui apparait dans la formule d'Itô (48) est lié à *l'équation de Kolmogorov.* Cela donne un lien explicite entre le calcul stochastique infini-dimensionnel et théorie des équations aux dérivées partielles; il serait bien sûr intéressant de regarder cet aspect dans le cas fractionnaire.
- nous pensons que la formule d'Itô (48) peut être étendue au cas $H < \frac{1}{2}$ en définissant une divergence plus faible de type [19].

CHAPITRE 4 : Processus gaussiens: approximation en loi, équivalence en loi

4.1 Introduction

Le Chapitre 4 contient la présentation de cinq travaux.

[1] (avec Xavier Bardina et Maria Jolis) "Convergence in law to the multiple fractional integrals", **Stochastic Processes and their Applications**, 2003, **105,** p. 315-344.

[2] (avec Xavier Bardina et Maria Jolis) "Weak convergence to the fractional Brownian motion sheet and to other two-parameter Gaussian processes", **Statistics and Probability Letters,** 2003, **65**(4), p. 317-329.

[3] "Weak convergence to the fractional Brownian sheet in Besov spaces", **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society,** 2003, **34**(13), p. 1-12.

[4] (avec Giovanni Peccati) "Gaussian limits for vectors valued multiple stochastic integrals", **Séminaire de Probabilités XXXIII,** Lecture Notes of Mathematics, 2004, p. 247-262.

[5] (avec Tommi Sottinen) "On the equivalence of multiparameter Gaussian processes", **Journal of Theoretical Probability,** 2004, à paraître.

Les trois premiers articles dans la liste ci-dessus sont axés sur un thème commun: comment approximer en loi des processus liés au mouvement brownien fractionnaire. Les deux derniers travaux sont indépendants. En bref, nous obtenons les résultats suivants:

- dans [8], pour $H > \frac{1}{2}$, nous prouvons un théorème d'approximation faible pour les intégrales multiples de Stratonovich par rapport au brownien fractionnaire.
- le même problème est abordé dans le contexte à deux paramètres dans [9]; c.à.d., on approxime en distribution le drap brownien fractionnaire et d'autres processus gaussiens à deux paramètres dans la topologie de l'espace des fonctions continues; dans [103] on étend également les résultats au cas de la topologie de Besov.
- dans le travail [84] nous établissons des conditions nécesaires et suffisantes pour une suite de vecteurs d-dimensionnels d'intégrales stochastiques multiples pour quelle converge en distribution vers un vecteurs gaussien d-dimensionnel. Le résultat

obtenu est surprenant: sous certaines conditions de non-corrélation, le vecteur converge vers un vecteur gaussien si et seulement si chaque composante converge vers une variable aléatoires gaussienne.

- dans [97] nous caractérisons les processus gaussiens multiparamétriques (draps gaussiens) qui sont équivalents en loi avec un drap brownien fractionnaire; on prouve des représentations de type Hitsuda et de type Shepp.

4.2 Convergence en loi vers les intégrales fractionnaires multiples et vers le drap fractionnaire

Nous partons du résultat suivant démontré dans [6]: soit

$$\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \theta_\varepsilon(s)ds \tag{49}$$

une famille de processus absolument continus qui converge en loi vers le brownien standard et considérons f une foction sur $[0,1]^n$ qui vit dans un espace convenable. Alors les auteurs montrent que la famille

$$I_{\eta_\varepsilon}(f)_t = \int_0^t \cdots \int_0^t f(t_1,\ldots,t_n)d\eta_\varepsilon(t_1)\ldots d\eta_\varepsilon(t_n), \qquad t\in[0,1] \tag{50}$$

converge en loi dans l'espace $C_0([0,1])$ (fonctions continues nulles à l'origine) vers une intégrale multiple de Stratonovich par rapport au mouvement brownien. Deux choix pour les processus θ_ε ont été détaillés: le cas

$$\theta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)}$$

(appelés *noyaux de Stroock* car la convergence de (49) vers le brownien a été démontrée par Stroock) et

$$\theta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k 1_{[k-1,k[}\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)$$

où ξ_k sont i.i.d. $E(\xi_k)=0$ et $Var(\xi_k)=1$ (appelés *noyaux de Donsker*, nom inspiré du Principe d'Invariance de Donsker). Nous avons consideré la question antérieure dans le cas fractionnaire. Les éléments clés de la démonstration sont:

$\hookrightarrow$ la preuve du fait que la famille

$$\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t K(t,s)\theta_\varepsilon(s)ds \tag{51}$$

où K est le noyau habituel du mbf, converge en loi quand $\varepsilon\to 0$ dans $C_0([0,1])$ vers le mbf.

$\hookrightarrow$ le fait que l'intégrale multiple de Stratonovich introduite dans [26], [27] coïncide avec celle définie à l'aide de sommes de Riemann. Rappelons que l'intégrale de Stratonovich par rapport au mbf au sens de [26] est définie d'une manière usuelle pour les fonctions escalier et est ensuite étendue par continuité à l'espace $L^2(\tilde{\mu}_n)$, $\tilde{\mu}_n$ étant la symétrisation de la mesure μ_n sur $[0,1]^n$ définie comme suit: $\mu_n(dx_1,\ldots,dx_n) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \nu_n^k(dx_1,\ldots,dx_n)$ avec

$$\nu_n^0(dx_1,\ldots,dx_n) = H^n n! \left(\prod_{j=1}^n [x_j^{2H-1} + (1-x_j)^{2H-1}] \right) dx_1 \ldots dx_n$$

et pour $k = 0,\ldots,[n/2]$,

$$\begin{aligned} \nu_n^k(dx_1,\ldots,dx_n) &= H^{n-k}(2H-1)^K c_{n,k}^2 (n-2k)! \left(\prod_{j=1}^k |x_{2j-1} - x_{2j}|^{2H-2} \right) \\ &\times \left(\prod_{j=2k+1}^n [x_j^{2H-1} + (1-x_j)^{2H-1}] \right) dx_1 \ldots dx_n \end{aligned}$$

où $c_{n,k}$ est une constante.

Nous avons démontré que, pour $H > \frac{1}{2}$ et pour $f \in L^2(\tilde{\mu}_n)$, la famille I_{η_ε} donnée par (50) avec η_ε données par (51) converge faiblement quand $\varepsilon \to 0$, dans $C_0([0,1])$, vers l'intégrale multiple fractionnaire de Stratonovich d'ordre n.

Dans le cas à deux paramètres, nous donnons dans [9] un résultat d'approximation du drap brownien fractionnaire $W^{\alpha,\beta}$ d'indices de Hurst $\alpha, \beta \in]0,1[$ à partir des noyaux de Stroock 2-dimensionnels. Considérons le noyau

$$y_\varepsilon(s,t) = \int_0^t \int_0^s \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt{xy} (-1)^{N(x/\varepsilon, y/\varepsilon)} dx f y$$

où N est un processus de Poisson dans le plan. Alors y_ε converge vers le drap brownien standard quand $\varepsilon \to 0$ (voir [7]). Le candidat naturel pour approximer le drap fractionnaire $W^{\alpha,\beta}$ est alors

$$X_\varepsilon(s,t) = \int_0^t \int_0^s K_\alpha(s,u) K_\beta(t,v) \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt{xy} (-1)^{N(x/\varepsilon, y/\varepsilon)} du dv.$$

Nous prouvons cela pour tout $(\alpha,\beta) \in]0,1[^2$, d'abord dans l'espace $C_0([0,1]^2)$ (dans [9]), et ensuite dans la topologie de l'espace de Besov (dans [103]).

4.3 Convergence en loi d'un vecteur d'intégrales multiples vers un vecteurs gaussien

Soit $d \geq 2$ et $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_d$ entiers positifs et pour tout $k \geq 1$ nous considérons le vecteur d-dimensionnel

$$\mathbf{F}_d^k = \left(F_1^k, ..., F_d^k\right)$$

où F_j^k appartient au chaos de Wiener d'ordre n_j. Nous voulons donner des conditions necéssaires et suffisantes pour la convergence de $\mathbf{F}_d^k$ vers un vecteur gaussien d-dimensionnel.

Cela continue le travail de [74], dans lequel les auteurs prouvent un théoréme de la centrale limite intéressant et surprenant: supposons que pour tout $k \geq 1$, F_j^k est une intégrale stochastique multiple d'ordre n_j d'un noyaux de carré intégrable $f_j \in L^2\left([0,1]^{n_j}\right)$ par rapport à un processus gaussian *isonormal* X. Supposons que sa variance est égale à 1. Alors la condition "F_j^k converge en loi quand $k \to \infty$ vers une variable aléatoire normale $N(0,1)$" est équivalente avec:

- $\Leftrightarrow$ le moment d'ordre 4 converge vers 3: $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{E}\left[\left(F_j^k\right)^4\right] = 3$ pour tout j

- $\Leftrightarrow$ pour tout j et $p = 1, ..., n_j - 1$ la contraction $f_j^{(k)} \otimes_p f_j^{(k)}$ converge vers zéro dans $L^2\left([0,1]^{2(n_j-p)}\right)$ (voir [70] pour la définition de la contraction)

Notre résultat est néanmoins surprenant; en bref, sous certaines conditions de non-corrélation, le vecteur $\mathbf{F}_d^k$ converge vers la loi normale en dimension d lorsque $k \to \infty$ si et seulement si chaque composante converge vers une loi normale.

Soit V_d l'ensemble des $(i_1, i_2, i_3, i_4) \in (1, ..., d)^4$, tels que l'une des conditions suivantes est vérifiée: (a) $i_1 \neq i_2 = i_3 = i_4$, (b) $i_1 \neq i_2 = i_3 \neq i_4$ et $i_4 \neq i_1$, (c) les élément de $(i_1, ..., i_4)$ sont distincts.

Théorème 7 *Soit $d \geq 2$, $1 \leq n_1 \leq ... \leq n_d < +\infty$ des entiers positifs, ainsi que*

$$\left\{\left(f_1^{(k)}, ..., f_d^{(k)}\right) : k \geq 1\right\}$$

tels que $f_j^{(k)} \in H^{\odot n_j}$ pour tout $k \geq 1$ et pour tout $j = 1, ..., d$, et

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} j! \left\| f_j^{(k)} \right\|^2_{H^{\otimes n_j}} &= 1, \quad \forall j = 1, ..., d \\ \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\left[I_{n_i}^X\left(f_i^{(k)}\right) I_{n_l}^X\left(f_l^{(k)}\right)\right] &= 0, \quad \forall 1 \leq i < l \leq d. \end{aligned} \tag{52}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) pour tout $j = 1, ..., d$

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f_j^{(k)} \otimes_p f_j^{(k)} \right\|_{H^{\otimes 2(n_j - p)}} = 0$$

pour tout $p = 1, ..., n_j - 1$*;*

(ii) $\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1,...,d} I_{n_i}^X\left(f_i^{(k)}\right)\right)^4\right] = 3d^2$*, et*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\left[\prod_{l=1}^{4} I_{n_{i_l}}^X\left(f_{i_l}^{(k)}\right)\right] = 0$$

pour tout $(i_1, i_2, i_3, i_4) \in V_d$*;*

(iii) quand $k \to \infty$*, le vecteur* $\left(I_{n_1}^X\left(f_1^{(k)}\right), ..., I_{n_d}^X\left(f_d^{(k)}\right)\right)$ *converge en loi vers une vecteur gaussien* $N_d\left(0, \mathbf{I}_d\right)$*;*

(iv) pour tout $j = 1, ..., d$*,* $I_{n_j}^X\left(f_j^{(k)}\right)$ *converge en loi vers une variable aléatoire standard ;*

(v) pour tout $j = 1, ..., d$*,*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\left[I_{n_j}^X\left(f_j^{(k)}\right)^4\right] = 3.$$

Nous illustrerons quelques éléments-clé de la démonstration; cela répose principalement sur la formule produit pour les intégrales multiples de Wiener-Itô et sur le théorème de Dubins-Dambis-Schwartz. Par exemple, pour l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ nous estimons le moment d'ordre 4 à l'aide de la formule produit $I_m I_n$ et nous obtenons finalement

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{d} I_{n_i}^X\left(f_i^{(k)}\right)\right)^4\right] = T_1(k) + T_2(k) + T_3(k)$$

où

$$\begin{aligned} T_1(k) &= \sum_{i=1}^{d} \left\{ 3\left(n_i!\right)^2 \left\| f_i^{(k)} \right\|_{H^{\otimes n_i}}^4 + \sum_{p=1}^{n_i - 1} \frac{\left(n_i!\right)^4}{\left(p!\left(n_i - p\right)!\right)^2} \left[\left\| f_i^{(k)} \otimes_p f_i^{(k)} \right\|_{H^{\otimes 2(n_i - p)}}^2 \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \binom{2n_i - 2p}{n_i - p} \left\| \left(f_i^{(k)} \otimes_p f_i^{(k)} \right)_s \right\|_{H^{\otimes 2(n_i - p)}}^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(k) = 6 \sum_{1 \le i < j \le d} &\left\{ n_i! n_j! \left\| f_i^{(k)} \right\|_{H^{\otimes n_i}}^2 \left\| f_j^{(k)} \right\|_{H^{\otimes n_j}}^2 + \right. \\ &+ \sum_{q=1}^{n_i} \left[\left(q! \binom{n_i}{q} \binom{n_j}{q} \right)^2 \left(n_i + n_j - 2q\right)! \left\| \left(f_i^{(k)} \otimes_q f_j^{(k)} \right)_s \right\|_{H^{\otimes n_i + n_j - 2q}}^2 \right. \\ &\left.\left. + \binom{n_i}{q} \binom{n_j}{q} n_i! n_j! \left\| f_i^{(k)} \otimes_q f_j^{(k)} \right\|_{H^{\otimes n_j + n_i - 2q}}^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

et

$$T_3(k) = \sum_{(i_1,\dots,i_4)\in V_d} \mathbb{E}\left[\prod_{l=1}^{4} I^X_{n_{i_l}}\left(f^{(k)}_{i_l}\right)\right].$$

Mais

$$3\sum_{i=1}^{d}(n_i!)^2\left\|f_i^{(k)}\right\|^4_{H^{\otimes n_i}} + 6\sum_{1\le i<j\le d} n_i! n_j! \left\|f_i^{(k)}\right\|^2_{H^{\otimes n_i}}\left\|f_j^{(k)}\right\|^2_{H^{\otimes n_j}} = 3\left[\sum_{i=1}^{d} n_i!\left\|f_i^{(k)}\right\|^2_{H^{\otimes n_i}}\right]^2$$

et la convergence voulue est immédiate car la condition (52) assure que le membre de droite converge vers $3d^2$.

Concernant la convergence $(i) \Rightarrow (iii)$, notons

$$\begin{aligned} J_n^t\left((f)_s\right) &= \int_0^t \cdots \int_0^{u_{n-1}} \left(f(u_1,\dots,u_n)\right)_s dW_{u_n}\dots dW_{u_1} \\ I_n^t\left((f)_s\right) &= n! J_n^t\left((f)_s\right), \quad t\in[0,1] \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Dubins-Dambis-Schwartz, toute combinaison linéaire de composantes du vecteur s'exprime comme

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{d}\lambda_i n_i! J^1_{n_i}\left(f_i^{(k)}\right) = W^{(k)}\left[\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i n_i! J^t_{n_i-1}\left(f^{(k)}_{i,t}\right)\right)^2 dt\right] \\ = \;& W^{(k)}\left[\sum_{i=1}^{d}\lambda_i^2\int_0^1\left(n_i! J^t_{n_i-1}\left(f^{(k)}_{i,t}\right)\right)^2 dt\right. \\ &\left. +2\sum_{1\le i<j\le d}\lambda_i\lambda_j n_i! n_j!\int_0^1\left[J^t_{n_i-1}\left(f^{(k)}_{i,t}\right) J^t_{n_j-1}\left(f^{(k)}_{j,t}\right)\right] dt\right] \end{aligned}$$

oú pour tout k, $W^{(k)}$ est un mouvement brownien. Une estimation de l'argument de $W^{(k)}$ basée sur le calcul chaotique va entraîner le résultat.

Quelques applications de ce théorème sont les suivantes :

$\mapsto$ des résultats de convergence faible pour les fonctionnelles du mouvement brownien. Par exemple, il est possible de montrer que, si $c(d,j) = \frac{(2d)!}{2^{d-j}(d-j)!}$, le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{\log\frac{1}{\varepsilon}}}\left(\int_\varepsilon^1 \frac{da}{a^2}W_a^2 - c(1,0)\log\frac{1}{\varepsilon}, \int_\varepsilon^1\frac{da}{a^3}W_a^4 - c(2,0)\log\frac{1}{\varepsilon}, \dots\right.$$
$$\left.\dots, \int_\varepsilon^1\frac{da}{a^{d+1}}W_a^{2d} - c(d,0)\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

converge en loi vers un vecteur gaussien $(G_1, ..., G_d)$ de covariance $\mathbf{E}[G_{k'}G_k] = \sum_{j=1}^{k'} c(k,j)\, c(k',j)\, j^2 (2j-1)!$ pour tout $1 \leq k' \leq k \leq d$. Cela étend le résultat de [86] pour $d = 1$.

$\mapsto$ un théorème de Knight asymptotique pour les martingales qui vivent dans un chaos de Wiener d'ordre fini.

$\mapsto$ un autre résultat de convergence très surprenant est le suivant: si $S_d^{(k)} = \sum_{j=1,\ldots,d} I_{n_j}^X \left(f_j^{(k)}\right)$, alors la suite $d^{-1/2} S_d^{(k)}$ converge en loi vers une variable gaussienne quand $k \to \infty$ si et seulement si pour tout $j = 1, ..., d$, $I_{n_j}^X \left(f_j^{(k)}\right)$ converge en loi vers une gaussienne lorsque $k \to \infty$.

4.4 Équivalence en loi des processus gaussiens à plusieurs indices

Soit Z un processus gaussien à plusieurs indices (drap gaussien). Dans le cas à un paramètre, le problème suivant a été abordé par des nombreux auteurs surtout dans les années 60-70 et récemment repris dans le contexte de brownien fractionnaire: comment caractériser les processus gaussiens qui sont équivalent en loi avec Z (l'équivalence en loi est comprise dans le sens de l'absolute continuité des mesures de probabilité).

Dans le cas à plusieurs paramètres, nous démontrons des résultats généraux sur l'équivalence des processus gaussiens et nous les appliquons au cas particulier du drap brownien fractionnaire et obtenons les caractérisations suivantes:

- *Représentation de type Hitsuda:* Un drap gaussien $\tilde{Z}$ est équivalent en loi avec un drap brownien fractionnaire Z d'indice $\vec{H} \in]0,1[^d$ si et seulement s'il s'écrit sous la forme
$$\tilde{Z}_{\mathbf{t}} = Z_{\mathbf{t}} - \int_{[0,\mathbf{t}]} f(\mathbf{t},\mathbf{s})\, \mathrm{d}W_{\mathbf{s}} - A(\mathbf{t}) \tag{53}$$
oú W est un drap brownien construit à partir de Z,
$$A = \left(\otimes_{i=1}^d I^{H_i + \frac{1}{2}}\right) a$$
avec $a \in L^2([0,1]^d)$ et pout tout $\mathbf{s} \in [0,1]^d$
$$f(\cdot,\mathbf{s}) = \left(\otimes_{i=1}^d I^{H_i + \frac{1}{2}}\right) b(\cdot,\mathbf{s})$$
avec $b \in L^2([0,1]^{2d})$ est un noyau de Volterra et $I^{H_i + \frac{1}{2}}$ est l'intégrale fractionnaire d'ordre $H_i + \frac{1}{2}$.

- *Représentation de type Shepp:* Un drap gaussien $\tilde{Z}$ est équivalent en loi avec le drap brownien fractionnaire Z si et seulement s'il existe $k \in L^2_S([0,1]^{2d})$ tel que $1 \notin \sigma(\mathrm{K})$ et une fonction $m \in L^2([0,1]^d)$ telle que

$$\mathbf{Cov}(\tilde{Z}_{\mathbf{t}}, \tilde{Z}_{\mathbf{s}}) = \mathbf{Cov}(Z_{\mathbf{t}}, Z_{\mathbf{s}}) - \left(\bigotimes_{i=1}^{d} I^{H_i+\frac{1}{2}} \otimes \bigotimes_{i=1}^{d} I^{H_i+\frac{1}{2}} \right) k\,(\mathbf{t}, \mathbf{s}),$$

et

$$\mathbf{E}[\tilde{Z}_{\mathbf{t}}] = \left(\bigotimes_{i=1}^{d} I^{H_i+\frac{1}{2}} \right) m\,(\mathbf{t}).$$

Le noyaux k et la fonction m sont uniques.

Quelques commentaires et applications:

$\mapsto$ dans la formula (53) il est posible, si toutes les composantes de $\mathbf{H}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$, d'écrire les intégrales stochastiques qui interviennent comme intégrales stochastique par rapport au brownien fractionnaire Z lui-même; c'est grâce à l'expression de l'intégrale fractionnaire $I^{H_i+\frac{1}{2}}$ que cela est possible seulement dans ce cas.

$\mapsto$ nous obtenons également des formules exactes pour la dérivée de Radon-Nykodym dans la représentation de type Shepp en termes d'une certaine intégrale double de Wiener par rapport à Z.

$\mapsto$ le résultat d'équivalence Hitsuda peut être appliqué pour obtenir une condition necéssaire et suffisante pour l'existence d'une solution gaussienne au sens faible de l'équation fonctionnelle

$$\mathrm{d}\xi_{\mathbf{t}}(\omega) = \alpha\big(\mathbf{t}, \xi(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mathbf{t} + \mathrm{d}W_{\mathbf{t}}(\omega), \qquad \mathbf{P}_W - \text{a.s.}, \tag{54}$$

oú W est un drap brownien.

4.5 Commentaires et perspectives

- nous remarquons le fait que nos résultats présentés dans la Section 4.3 ont été déjà utilisés dans plusieurs travaux récents; par exemple dans [50], [31] ou [22] pour étudier la convergence en loi des fonctionnelles ayant une decomposition en chaos de Wiener.

- nous pensons également que ces résultats pourront être appliqués aux questions de statistique; la procédure sera détaillée dans le Chapitre 5, Section 5.4.

- il serrait intéressant d'utiliser les résultats sur l'équivalence en loi des processus gaussiens (Section 4.4) dans des cas particuliers; par exemple, pour répondre aux questions de type: le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (fractionnaire) est-il équivalent en loi avec le mouvement brownien (fractionnaire)? dans quelle situation deux mouvements browniens fractionnaires d'indices de Hurst différents sont-ils équivalents en loi?

CHAPITRE 5 : Inférence statistique pour les équations stochastiques fractionnaires

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons exposer les travaux suivants:

[1] (avec Frederi Viens) "Statistical aspects of the fractional stochastic integration", 2005, **Prépublication,** soumis à *The Annals of Statistics.*

[2] (avec Tommi Sottinen) "Parameter estimation for stochastic equations with fractional Brownian sheet", 2005, **Prépublication,** soumis à *Statistical Inference for Stochastic Processes.*

Ce chapitre représente pour l'auteur de ce document de synthèse le début d'un projet de recherche qui sera certainement continué dans les années à venir. En effet, nous voudrions appliquer le calcul stochastique par rapport aux processus gaussiens aux problèmes d'estimation de paramètre et faire de cela une préocupation centrale en statistique.

Le développement du calcul stochastique par rapport au brownien fractionnaire et la résolution de certaines équations dirigées par ce processus, ont conduit naturellement à l'étude des estimateurs dans des modèles avec des bruits fractionnaires. La théorie développée jusqu'à présent sur l'existence et les propriétés des estimateurs est à son début et seulement quelques cas particuliers ont été traités. Nous citons les travaux [54], [55], [90] ou [56] pour des contributions dans ce domaine. Dans nos travaux [108] et [98] nous étendons les résultats existants en utilisant de nouvelles méthodes basées sur le calcul de Malliavin et sur la théorie de régularité gaussienne.

Plus précisément, nous considérons l'équation

$$X_t = \theta \int_0^t b(X_s)ds + B_t^H, \qquad X_0 = 0 \tag{55}$$

où B^H est un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in (0,1)$ et nous montrons les résultats suivants:

- pour tout $H \in (0,1)$, nous donnons des hypothèses concrètes sur b qui assurent l'existence de l'estimateur de maximum de vraisemblance pour le paramètre θ (quelques idées ont été déjà données dans Kleptsyna-Le Breton-Roubaud (2000) [55]).

- pour tout $H \in (0,1)$ et sous certaines conditions sur b (qui incluent aussi des fonctions non-linéaires) nous montrons la consistance forte de l'estimateur (pour $H > \frac{1}{2}$ et b linéaire, cela a été également démontré dans Kleptsyna-Le Breton (2002) [54]).

- pour tout $H \in (0,1)$ nous montrons qu'une version discrète de l'estimateur, construite à partir de sommes de Riemann, est consistante.

5.2 Estimateur de maximum de vraisemblance

Dans cette partie, nous prouvons l'existence de l'estimateur de maximum de vraisemblance en donnant des conditions suffisantes sur le drift b.

L'idée centrale pour construire cet estimateur est d'utiliser le théorème de Girsanov. Considérons le processus

$$\tilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t u_s ds$$

où est processus u est adapté est à trajectoires intégrables. On peut écrire

$$\tilde{B}_t^H = \int_0^t K(t,s) dZ_s \tag{56}$$

avec

$$Z_t = W_t + \int_0^t K_H^{-1} \left(\int_0^{\cdot} u_r dr \right)(s) ds \tag{57}$$

où K_H est l'opérateur associé au noyau $K^H(t,s)$ du B^H.

Nous utilisons la version suivante du théorème de Girsanov.

Théorème 8 *(***GIRSANOV***) i) Supposons que u est un processus adapté à trajectoires intégrables et*

$$t \to \int_0^t u_s ds \in I^{H+\frac{1}{2}} \left(L^2([0,T]) \right) \ \ a.s.$$

$$(ou,\ \acute{e}quivalemment\ t \to K_H^{-1} \left(\int_0^{\cdot} u_r dr \right)(t) \ \ a.s.\ )$$

ii) Supposons aussi que $\mathbf{E}(V_T) = 1$ où

$$V_T = \exp\left(-\int_0^T K_H^{-1} \left(\int_0^{\cdot} u_r dr \right)(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \left(K_H^{-1} \left(\int_0^{\cdot} u_r dr \right)(s) \right)^2 ds \right). \tag{58}$$

Alors sous la probabilité $\tilde{P}$ avec $d\tilde{P}/dP = V_T$ le processus Z (57) est un mouvement brownien et le processus $\tilde{B}^H$ (56) est un mouvement brownien fractionnaire.

Notons par P_θ la mesure de probabilité determinée par le processus $(X_s)_{s\leq t}$. Alors l'estimateurs de maximum de vraisemblance s'onstient en résolvant l'équation

$$\log \frac{dP_\theta}{dP_0} = -\theta \int_0^t Q_s dW_s - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t Q_s^2 ds = 0$$

où

$$Q_t = K_H^{-1} \left(\int_0^{\cdot} b(X_r) dr \right)(t).$$

Évidemment, si les conditions de régularité pour appliquer Girsanov étaient satisfaites, on serait conduit à l'expression suivante de l'estimateur de maximum de vraisemblance

$$\theta_t = -\frac{\int_0^t Q_s dW_s}{\int_0^t Q_s^2 ds} = \frac{\int_0^t Q_s dZ_s}{\int_0^t Q_s^2 ds} \tag{59}$$

qui est parfaitement observable si l'on connait la trajectoire de X.

Mais l'utilisation du thérème (8) demande quelques estimations sur le supremum du processus X est un contrôle de ses variations. Pour avoir cela, nous faisons appel au calcul de Malliavin et à la théorie de régularité gaussienne dans le sens de Fernique [40] ou Ledoux-Talagrand [59].

D'abord, on utilise l'inégalité de Poincaré suivante

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(F\right)\right] \leq \mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{\pi^2}{8}\left|D.F\right|^2_{L^2(dr)}\right)\right] \tag{60}$$

où D représente la dérivée de Malliavin. Ensuite, en utilisant le calcul de Malliavin et le lemme de Gronwall, on montre aussi que, pour tout $t < t'$,

$$\left\|D.\left(X_{t'} - X_t\right)\right\|^2_{L^2(dr)} \leq K\left|t' - t\right|^{2H}. \tag{61}$$

En combinant (60) et (61), on arrive à l'inégalité, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}\left[\exp \lambda\left(X\left(t'\right) - X\left(t\right)\right)\right] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} K\left|t - t'\right|^{2H}\right)$$

et cette relation montre que le processus X est un processus *sous-gaussien* (voir [59]) de métrique canonique bornée par $K|t' - t|^H$. Cela signifie que les variations de X sont dominées par celles du processus gaussien de métrique canonique $|t' - t|^H$ qui n'est évidemment rien d'autre qu'un mouvement brownien fractionnaire. La théorie de Dudley-Fernique assure la régularité nécessaire pour appliquer le théorème de Girsanov et pour obtenir l'existence de l'estimateur de maximum de vraisemblance pour le paramètre θ. Par exemple, parmi d'autres résultats, on déduit facilement de la sous-gaussienneté que

$$\mu_t := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |X(s)|\right] < Kt^H. \tag{62}$$

où, pour $\alpha > 0$ convenable,

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\alpha \sup_{s\in[0,T]} |X(s)|^2\right)\right] < \infty. \tag{63}$$

5.3 Consistance forte de l'estimateur de maximum de vraisemblance

Il est immédiat de voir que

$$\theta_t - \theta = \frac{\int_0^t Q_s dZ_s}{\int_0^t Q_s^2 ds}$$

Pour montrer que

$$\theta_t \to \theta \text{ presque sûrement quand } t \to \infty$$

(c.à.d. θ_t est fortement consistant), par la loi forte des grands nombres, il suffit de montrer que

$$I_t := \int_0^t Q_s^2 ds \to_{t\to\infty} \infty \text{ p.s. }. \tag{64}$$

La preuve de cette convergence est assez technique; la condition suivante sera imposée:

(C) Il existe des constantes positives t_0 et K_b, qui dépendent seulement de H et de la fonction b, telles que pour tout $t \geq t_0$ et tout $\varepsilon > 0$, on a $\tilde{\mathbf{P}}\left[|Q_t(\tilde{\omega})| / \sqrt{t} < \varepsilon\right] \leq K_b\varepsilon$, où sous $\tilde{\mathbf{P}}$, $\tilde{\omega}$ a la loi d'un mbf d'indice de Hurst H.

L'interprétation de cette condition est: considérons la mesure donnée par $\mu_H^t(dr) = (r/t)^{1/2-H}(t-r)^{-1/2-H} dr$. Alors

$$Q_t = \int_0^t \mu_H^t(ds)\, b(\tilde{\omega}_s)$$

et donc, par le changement de variable $r = s/t$,

$$\frac{Q_t}{\sqrt{t}} = \int_0^1 \mu_H^1(dr)\, \frac{b(\tilde{\omega}_{tr})}{t^H} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \mu_H^1(dr)\, \frac{b\left(t^H \tilde{\omega}_r\right)}{t^H},$$

où la dernière égalité est en loi sous la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$. Maintenant, si b a un comportement plus ou moins linéaire, $Q_t/\sqrt{t}$ doit se comporter, en distribution pour t fixé, comme la variable aléatoire $\int_0^1 \mu_H^1(dr)\, b(\tilde{\omega}_r)$.

Nous donnons des exemples de fonctions qui satisfont la condition (C):

- **Le cas linéaire:** $b(x) = cx$
- **Une classe de fonctions non-linéaires:**

$$|b(x)/x| = c + h(x)$$

pour tout x, où c est une constante positive, et $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$.

La preuve utilise un argument de type Borel-Cantelli: nous montrons que $\sum_{n\geq 1} \tilde{P}(I_{t_n} < \beta_{t_n}) < \infty$ pour des $t_n \to \infty$ et β_n convenables. Les quantités du type $\tilde{P}(I_{t_n} < \beta_{t_n})$ s'estiment à l'aide de la condition (C).

Nous introduisons finalement un estimateur du maximum de vraisemblance basé sur des observations discrètes sur le processus X, et cela pour des questions pratiques. Concrètement, pour tout $n \geq 1$, posons

$$\bar{\theta}_n := -\frac{\sum_{m=0}^{n} Q_m (W_{m+1} - W_m)}{\sum_{m=0}^{n} |Q_m|^2}. \tag{65}$$

Nous montrons que $\bar{\theta}_n$ est un estimateur consistant pour le paramètre θ de l'équation (55).

5.4 Estimation paramétrique pour des équations stochastiques avec un drap brownien fractionnaire

La problématique exposée ci-dessus est reprise dans un contexte " à deux paramètres". Nous voulons estimer le paramètre θ dans l'équation suivante

$$X_{t,s} = \theta \int_0^t \int_0^s b(X_{u,v}) dv du + W_{t,s}^{\alpha,\beta} \tag{66}$$

$W^{\alpha,\beta}$ étant un drap brownien fractionnaire d'indices de Hurst $\alpha, \beta \in (0,1)$.

La construction de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre θ est faite à partir d'une version planaire du théorème de Girsanov. On est conduit à l'expression suivante de l'estimateur

$$\theta_t = -\frac{\int_{[0,t]^2} Q_z ds}{\int_{[0,t]^2} Q_z^2 dz} \tag{67}$$

où pour tout $z \in [0,T]^2$

$$Q_z = K_{\alpha,\beta}^{-1} \left(\int_{[0,\cdot]} b(X_\eta) d\eta \right)(z), \tag{68}$$

$K_{\alpha,\beta}$ étant le noyau du drap brownien fractionnaire. Nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence de cette estimateur et nous montrons la consistance forte de celui-ci dans le cas où le drift b est linéaire.

Commentaires et perspectives

- nous estimons que les outils exposées dans les Chapitres 4 (surtout dans la Section 4.3) et 5 peuvent apporter une nouvelle approche aux problèmes d'estimation de paramètre. Une question intensivement étudiée et toujours en pleine évolution l'estimation du paramètre d'auto-similarité pour les processus gaussiens qui satisfont cette propriété d'auto-similarité. Récemment, des méthodes de filtrage basées sur l'observation de la trajectoire du processus à des temps discrets ont été introduites. On mentionne le livre de Beran [11] pour les diverses applications à l'hidrologie, l'économie ou les réseaux informatiques.

  Notons par a un filtre de longueur $l+1$ et d'ordre p, c.à.d, un vecteur de dimension $l+1$ tel que pour tout $0 \leq r < p$,

  $$\sum_{j=0}^{l} j^r a_j = 0 \text{ and } \sum_{j=0}^{l} j^p a_j \neq 0.$$

  Soit X un processus gaussien isonormal observé aux temps i/N avec $i = 0, \dots N-1$. À un tel filtre a on peut associer la série temporelle

  $$V^a\left(\frac{i}{N}\right) = \sum_{q=0}^{l} a_q X\left(\frac{i-q}{N}\right), \quad i = l, \dots, N-1.$$

  Ensuite, on introduit la statistique (appelée la *variation d'ordre k* ou *k-variation*)

  $$V_N(k,a) = \frac{1}{N-l} \sum_{i=l}^{N-1} \left[\frac{|V^a(i/N)|^k}{E\left(|V^a(i/N)|^k\right)} - 1 \right] \tag{69}$$

  Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire cette statistique renormalisée converge en loi vers une variable gaussienne dont la variance dépend du paramètre de Hurst (voir [21]) et cela permet la construction d'un estimateur pour l'indice H. Les preuves reposent sur la formule de *diagramme* qui est d'ailleurs utilisée d'une manière implicite dans les travaux [73], [84]. Il est néanmoins évident que les méthodes du calcul chaotique peuvent être utilisées pour étudier les k-variations (69). La formule produit pour les intégrales multiples permet d'obtenir l'expression chaotique de cette quantité $V_N(k,a)$ et les résultats de [73] ou [84] peuvent être mis en oeuvre. Au moins deux directions de recherche peuvent être imaginées de façon immédiate:

  - l'étude de filtres multidimensionnels et l'application à l'estimation du paramètre du mouvement brownien fractionnaire multidimensionnel
  - l'extension à des processus gaussiens plus généraux (multifractionnaire, bifractionnaire) qui ont aussi des applications à des situations concrètes.

- nous pensons également lier le calcul stochastique à la théorie des ondelettes (voir [5]). Le coefficient de la decomposition d'un processus gaussien dans une base d'ondelettes est une variable gaussienne dont le comportament asymptotique est utile aux problèmes d'estimation. Soit par exemple χ une ondellette de Daubechies ou de Meyer. Alors le coefficient du processus gaussien X dans cette base sera donné par

  $$d(a,i) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\frac{t}{a} - 1) X_t dt$$

  où a est l'échelle et $i \in \{1, 2, \ldots, [N/a] - 1\}$. La variance empirique de $d(a,i)$ est

  $$I_N(a) \frac{1}{[N/a] - 1} \sum_{k=1}^{[N/a]-1} d^2(a,i).$$

  Danc ce cas aussi, si X est le mouvement brownien fractionnaire, la limite en loi de la suite $I_N(a)$ lorsque $N \to \infty$, dépend de paramètre d'auto-similaire qui peut être estimé à partir d'un estimateur construit à l'aide de $I_N(a)$. Le comportement asymptotique de fonctionnelles quadratiques de ce coefficient est directement lié aux résultat récents sur les théorèmes limites.

CHAPITRE 6 : Intégration stochastique généralisée: les cas Wiener, Poisson, Azéma

6.1 Introduction

Le Chapitre 6 est basé sur les articles suivants:

[1] (avec Nicolas Privault) "Skorohod and pathwise stochastic calculus with respect to an L^2 process", **Random Operators and Stochastic Equations**, 2000, 8 (3), p. 201-224.

[2] (avec Josep Vives) "The indefinite Skorohod integral as integrator on the Poisson space ", **Random Operators and Stochastic Equations**, 2002 10 (1), p. 29-46.

[3] (avec Josep Vives) "Anticipating Stratonovich integral for the Azéma martingales", **Stochastic Analysis and Applications**, 2002, 20 (3), p. 673-692.

La présentation de ce chapitre sera assez brève. Et cela parce que les articles contenus ici sont assez anciens, ils datent du début de ma carrière de chercheur. D'ailleurs, ces travaux ont été présentés sous une forme plus détaillée dans ma thèse de doctorat soutenue en septembre 2002.

Le thème central du chapitre est le calcul stochastique généralisé. Dans les années 80-90 le calcul stochastique anticipant était en plein essor. Initialement introduite pour intégrer des processus non-adaptés par rapport au brownien, cette théorie a été ensuite étendue au cas où l'intégrateur était une martingale normale (processus de Poisson ou martingale d'Azéma) grâce à la structure d'espace de Fock engendrée par ces processus. Des nombreux auteurs ont essayé d'aller plus loin, c.à.d. d'intégrer par rapport à des processus qui ne respectent aucune propriété de (semi)martingale. Mentionnons, entre autres, les travaux de [92], [93], [41], [51]. Nos travaux s'incrivent aussi dans cette direction.

6.2 Calcul stochastique généralisé

6.2.1 Le cas du processus de Wiener

Nous prennons un processus stochastique X pouvant s'écrire comme

$$X(t) = \delta\left(\dot{v}(\cdot, t)\right), \qquad t \in [0,1]. \tag{70}$$

où $\dot{v}(s,t) = \partial_s v(s,t)$, le processus v satisfaisant quelques conditions précises de régularité dans les espaces de Sobolev. D'aileurs, la représentation (70) est très générale; voir l'explication dans [87].

Nous définissons une intégrale de Skorohod par rapport à X (70) de la façon suivante

$$\delta^X(u) = \delta\left(\int_0^t u(s)v(\cdot,ds)\right) \tag{71}$$

où l'intégrand u vit lui aussi dans un espace de Sobolev convenable.

À partir de la définition (71), nous aboutissons au développement d'un calcul stochastique généralisé par rapport au processus X, qui inclut la définition d'une dérivée de Malliavin D^X par rapport à X (qui sera, dans un certain sens, l'adjoint de δ^X), l'introduction des intégrales trajectorielles forward, backward et Stratonovich et d'une variation quadratique $[X,X]$, ainsi qu'une formule d'Itô

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= f(X(0)) + \delta^X\left(f'(X(\cdot))1_{[0,t]}(\cdot)\right) + \frac{1}{2}\int_0^t f"(X(s))d[X,X](s) \\ &\quad + \int_0^t f"(X(s))D_s^{X-}X(s)ds \end{aligned}$$

où D^{X-} est "la limite à gauche" de D^X.

Notons que

- $\mapsto$ les notions et les formules introduites dans notre travail étendent d'une manière naturelle celles qui correspondent au cas oú X est le mouvement brownien.
- $\mapsto$ le brownien fractionnaire n'a pas été traité dans ce travail (même s'il est de la forme (70)). Mais nous nous permettons de remarquer que la définition ultérieure de l'intégrale de Skorohod relative au brownien fractionnaire (voir Chapitre 2, Introduction) coïncide avec la nôtre (71).

6.2.2 Le cas du processus de Poisson

Dans le travail [110] nous nous plaçons sur l'espace de Poisson et nous utilisons les notations et les outils du calcul anticipant par rapport à ce processus (dans le sens de [78] par exemple). Le but est similaire avec celui de [87] expliqué ci-dessus, mais nous considérons comme intégrateur un processus d'une forme un peu plus particulière que (70), c.à.d. nous prenons

$$X(t) = \delta\left(h1_{[0,t]}(\cdot)\right).$$

Pour un processus simple de type $u = \sum_{i=1}^n F_i 1_{[t_i,t_{i+1}]}$ nous définissons l'intégrale de u par rapport à X par

$$\sum_{i=1}^n F_i\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)$$

et nous prenons ensuite la limite dans L^2 quand la norme de la partition tend vers zéro. Pour différents choix de F_i, nous obtenons différents types d'intégrale: backward, forward, symétrique, Stratonovich, Skorohod.

Une particularité à signaler est la suivante: pour le processus de Poisson l'intégrale symétrique obtenue pour

$$F_i = \frac{u_{t_i} + u_{t_{i+1}}}{2}$$

ne coïncide pas toujours avec l'intégrale de Stratonovich obtenue pour

$$F_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s ds$$

(comme c'etait le cas pour le processus de Wiener).

6.2.3 Le cas de la martingale d'Azéma

Une martingale $M = (M_t)_{t\in[0,1]}$ est dite *normale,* ou *d'Azéma* si son crochet oblique $< M, M >_t = t$ et M satisfait la propriété de représentation chaotique, c.à.d. toute variable aléatoire $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, où $\mathcal{F}$ est la sigma-algèbre engendrée par M, se décompose en somme orthogonale d'intégrales stochastiques multiples par rapport à M. Il a été démontré dans [38] que ces martingales vérifient *l'équation de structure*

$$d[M, M]_t = dt + \Phi_t dM_s \tag{72}$$

où Φ est un processus prévisible. Le cas $\Phi = 0$ correspond au cas brownien, le cas $\Phi = 1$ correspond au processus de Poisson et le cas $\Phi_s = -M_{s-}$ correspond à la martingale d'Azéma dite *standard.*

Quelques contributions ont permis le developpement d'un calcul stochastique anticipant par rapport à ces processus. On mentionne les travaux [62], [94] ou [88] parmi d'autres. Notre contribution [109] étudie l'existence d'une intégrale anticipante de Stratonovich par rapport aux processus vérifiant (72). Pour un processus u de carré intégrable, cette intégrale, notée $I^s_M(u)$, sera définie comme la limite de sommes de Riemann

$$S^\pi_M(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s ds \right) \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \right).$$

En utilisant une formule d'intégration par parties donnée dans [62] et une formule produit pour deux intégrales multiples par rapport à M donnée dans [88] ou [94], nous montrons des conditions suffisantes pour l'existence de l'intégrale $I^s_M(u)$ et nous obtenons la relation suivante entre $I^s_M(u)$ et l'intégrale de Skorohod δ par rapport à M

$$I^s_M(u) = \delta(u) + Tr(u) - \delta\left((\nabla u)M\right) \tag{73}$$

où $Tr(u)$ représente un terme de *trace* sur la dérivée de Malliavin D et $\nabla u = \frac{1}{2}(D^+ + D^-)$ est la démi-somme des limites à droite et à gauche de D. Le dernier terme $\delta\left((\nabla u)M\right)$ de la formule (73) est un terme spécifique pour la martingale d'Azéma; il est nul sur l'espace de Wiener.

6.3 Commentaires et perspectives

- suite au développement du calcul stochastique par rapport au mbf, il est actuellement intéressant de construire une intégration par rapport au processus du type $\int_0^t K(t,s)dM_s$ où K est un noyau fractionnaire et M est une martingale continue.
- Il y a aussi des résultats pour les cas des processus à sauts; nous mentionnons le travail [29] dans lequel les auteurs introduisent un processus de "Poisson fractionnaire" et développent un calcul stochastique par rapport à celui-ci.

References

[1] E. Alos, J.A. Leon and D. Nualart (2001): *Stratonovich calculus for fractional Brownian motion with Hurst parameter less than* $\frac{1}{2}$*.* Taiwanese Journal of Math., 4, pag. 609-632.

[2] A. Ayache, S. Leger and M. Pontier (2002): *Drap Brownien fractionnaire.* Potential Analysis, 17(1): 31-43.

[3] E. Alos, O. Mazet and D. Nualart: *Stochastic calculus with respect to Gaussian processes.* Annals of Probability, 29, pag. 766-801.

[4] A. Ayache and J. Lévy-Véhel (1999): *Generalized multifractional Brownian motion.* Fractals: theory and applications in engeneering, pag. 17-32.

[5] J.M. Bardet, G. Lang, E. Moulines, P. Soulier (2000): *Wavelet estimator of long-range dependent processes.* Statistical Inference for Stoch. Proc., 3(1-2), pag. 85-99.

[6] X. Bardina and M. Jolis (2000): *Weak convergence to the multiple Stratonovich integral.* Stochastic Processes and Their Applications, 90(2), pag. 277-300.

[7] X. Bardina, M. Jolis and C. Rovira (2000): *Weak approximation of a Wiener process from a Poisson process: the multidimensional parameter set case.* Statistics and Probability Letters, 50(3), pag. 245-255.

[8] X. Bardina, M. Jolis and C.A. Tudor (2003): *Convergence in law to the multiple fractional integral.* Stochastic Processes and Their Applications, 105(2), pag. 315-344.

[9] X. Bardina, M. Jolis and C.A. Tudor (2002): *Weak convergence to the fractional Brownian sheet and two other two-parameter Gaussian processes.* Statistics and Probability Letters, 65(4), pag. 317-329.

[10] D. Bell (1987): *The Malliavin calculus.* Longman and Wiley.

[11] S. Berman (1973): *Local nondeterministic and local tims of Gaussian processes.* Indiana Journal of Math., 23, pag. 69-94.

[12] H. Bermin (1998): *Essays on Lookback options: a Malliavin calculus approach.* PhD thesis, Lund University.

[13] B. Boufoussi and Y. Ouknine (2003): *On a stochastic equation driven by a fBm with discontinuous drift.* Elect. Comm. in Prob., 8, pag. 122-134.

[14] B. Boufoussi and C.A. Tudor (2005): *Kramers-Smoluchowski approximation for stochastic equations with fractional Brownian motion,* Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, Tome 50, (2).

[15] R. Buckdahn (1991): *Linear stochastic Skorohod differential equations.* Probability Theory and Related Fields, 90, pag. 223-240.

[16] R. Buckdahn (1992): *Skorohod stochastic differential equations of diffusion type.* Probability theory and related fields, 92, pag. 297-334.

[17] R. Buckdahn and D. Nualart (1994): *Linear stochastic differential equations and Wick product.* Probability theory and related fields, 99, pag. 501-525.

[18] Ph. Carmona, L. Coutin and G. Montseny (*Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion.* Annales IHP, 39(1), pag. 27-68.

[19] P. Cheridito and D. Nualart (2002): *Stochastic integral of divergence type with respect to the fBm with Hurst parameter* $H \in (0, \frac{1}{2})$*.* Preprint.

[20] Z. Ciesielski, G. Keryacharian et B. Roynette (1993): *Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens.* Studia Mathematica 107(2), pag. 171-204.

[21] J.F. Coeurjolly (2001): *Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its simple paths.* Statistical Inference for stochastic processes, 4, 199-227.

[22] Corcuera, D. Nualart and J. Woerner (2005): *Power variation of some integral long-memory processes.* Preprint IMUB.

[23] L. Coutin and Z. Qian (2002): *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motion.* Prob. Theory Rel. Fields, 122(1), pag. 108-140.

[24] L. Coutin, D. Nualart and C.A. Tudor (2001): The Tanaka formula for the fractional Brownia motion. Stochastic Proc. Applic., 94(2), pag. 301-315.

[25] G. da Prato and J. Zabczyk (1992): *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge University Press.

[26] A. Dasgupta and G. Kallianpur (1999): *Multiple fractional integrals.* Prob. Theory Rel. Fields, 115, pag. 505-525.

[27] A. Dasgupta and G. Kallianpur (1999): *Chaos decomposition of multiple fractional integrals and applications.* Prob. Theory Rel. Fields, 115, pag. 527-548.

[28] M. Minh Duc et D. Nualart (1990): *Stochastic processes possessing a Skorohod integral representation.* Stochastics, 30(1), pag. 47-60.

[29] L. Decreusefond and N. Savy (2002): *Stochastic Integral for Some Filtered Poisson Processes.* Preprint.

[30] L. Decreusefond and A.S. Üstünel (1998): *Stochastic analysis of the fractional Brownian motion.* Potential Analysis, 10, pag. 177-214.

[31] P. Deheuvels, G. Peccati and M. Yor (2004): *Quadratic functionals of the Brownian sheet and related processes.* Preprint.

[32] C. Delacherie, B. Maisoneuve and P.A. Meyer (1992): *Probabilites et Potentiel, Chapitres XVII a XXIV.* Hermann, Paris.

[33] T. Duncan, Y.Z. Hu and B. Pasik-Duncan (2000): *Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. theory.* SIAM J. of Control and Optimization, 38(2), pag. 582-612.

[34] T.E. Duncan, B. Maslowski and B. Pasik-Duncan, Fractional Brownian motion and stochastic equations in Hilbert spaces, Stochastics and Dynamics **2**(2) (2002), 225-250.

[35] M. Eddahbi, R. Lacayo, J.L. Sole, C.A. Tudor and J. Vives (2001): *Regularity of the local time for the d-dimensional fractional Brownian motion with N-parameters.* Stochastic Analysis and Applications, 23(2), pag. 383-400.

[36] N. Eisenbaum (2003): *On the infinite divisibility of squared Gaussian processes.* Probab. Theory and Relat. Fields., **125**, 381-392.

[37] N. Eisenbaum et C.A. Tudor (2005): *On squared fractional Brownian motions,* Séminaire de Probabilités XXXVIII, Lecture Notes of Mathematics, pag. 282-289.

[38] M. Emery (1989): *On the Azm̀a's martingales.* Sem. de Proba. XXIII, Lecture Notes in Mathematics, 1321, pag. 72-81.

[39] M. Emery (1982): *Covariance des semimartingales gaussiennes.* C.R.A.S., tome 295 (12), pag. 703-705.

[40] X. Fernique (1974): *Régularité des trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennee.* Lecture Notes in Mathematics, 480, pag. 2-95.

[41] H. Föllmer (1981): *Calcul d'Itô sans probabilités.* Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Mathematics 850, pag. 143-150.

[42] D. Geman and J. Horowitz (1980): *Occupation densities.* Annals of Prob., 1, pag. 1-67.

[43] M. Gradinaru, F. Russo and P. Vallois (2004): *Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index* $H \geq \frac{1}{4}$. Annals of Probability, 31(4), pag. 1772-1820.

[44] M. Gradinaru, I. Nourdin, F. Russo and P. Vallois (2003): *m-order integrals and generalized Itôs formula; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst parameter.* Preprint, to appear in *Annales de l'Institut Henri Poincaré.*

[45] W. Grecksch and V.V. Anh, A parabolic stochastic differential equation with fractional Brownian motion input, Statistics and Probability Letters, **41** (1999), 337-346.

[46] J.M.E. Guerra, D. Nualart (2003): *The $\frac{1}{H}$-variation of the divergence integral with respect to the fBm for $H > \frac{1}{2}$ and fractional Bessel processes.* Preprint No. 339, IMUB.

[47] C. Houdré and J. Villa (2003): *An example of infinite dimensional quasi-helix.* Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., 336, pag. 195-201.

[48] S Huang and S. Cambanis (1978): *Stochastic and multiple Wiener integrals for Gaussian processes.* Annals of Probability, 6, pag.585-614.

[49] Y.Z. Hu, D. Nualart (2003): *Some processes associated with fractional Bessel processes.* Preprint no. 348, IMUB.

[50] Y.Z. Hu and D. Nualart (2005): *Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion.*The Annals of Probability, 33(3), pag. 948-983.

[51] M. Jolis and M. Sanz (1992): *Integrator properties of the Skorohod integral.* Stochastics and Stochastics Reports, 41(3), pag. 1636176.

[52] J. P. Kahane (1981): *Hélices et quasi-hélices.* Adv. Math., 7B, pag. 417-433.

[53] Y. Karatzas and D.L. Ocone (1991): *A generalized Clark representation formula with application to optimal potrfolios.* Stochastics and Stochastics Reports, 34, pag. 187-230.

[54] M.L Kleptsyna and A. Le Breton (2002): *Statistical analysis of the fractional Ornstein-Uhlenbeck type processes.* Statistical inference for stochastic ptocesses, 5, pag. 229-248.

[55] M. Kleptsyna, A. Le Breton and M.C. Roubaud (2000): *Parameter estimation and optimal filtering for fractional type stochastic systems.* Statistical inference for stochastic processes, 3, pag. 173-182.

[56] A.Kukush, Y. Mishura and E. Valkeila (2005): *Statistical inference with fractional Brownian motion.* Statistical inference for stochastic processes, 8, pag. 71-93.

[57] H. Lakhel, Y. Ouknine and C.A. Tudor (2002): *Besov regularity for the indefinite Skorohod integral with respect to the fractional Brownian motion,* Stochastics and Stochastics Reports, 74(3-4): 597-615.

[58] D. Lamberton, B. Lapeyre, A. Sulem eds. (2003): Proc. International Workshop on Applications of Malliavin calculus in Finance, Inria Roquencourt, 2001.

[59] M. Ledoux and M. Talagrand (1990): *Probability on Banach Spaces.* Springer-Verlag.

[60] A. Lejay, M. Gubinelli and S. Tindel (2004): *Young integrals and SPDEs.* Preprint.

[61] T. Lyons (1998): *Differential equations driven by rough signals.* Rev. Mat. Ieroamericana, 14(2), pag. 215-310.

[62] J. Ma, Ph. Protter and J. San Martin (1998): *Anticipating integrals for a class of martingales.* Bernoulli, 4, pag. 81-114.

[63] P. Major (1981): *Multiple Wiener-Ito integrals.* Springer-Verlag.

[64] P. Malliavin (1976): *Stochastic calculus of variations and hippoelliptic operators.* Proc. Inter. Symp. on Stoch. Diff. Eqs., Wiley 1978, pag. 195-273.

[65] B. Maslovski and D. Nualart (2003): *Evolution equations driven by a fractional Brownian motion.* Journal of functional Analysis, 202(1), pag. 277-305.

[66] A. Millet and M. Sanz-Sole (2005): *Large deviations for rough paths of fractional Brownian motion.* Preprint.

[67] O. Mocioalca and F. Viens (2004): *Skorohod integration and stochastic calculus beyond the fractional Brownian scale.* Journal of Functional analysis, to appear.

[68] E. Nelson, *Dynamical Theories of the Brownian motion.* Princeton University Press, 1967.

[69] I. Nourdin (2004): *Thèse de doctorat, Nancy.*

[70] D. Nualart (1995): *Malliavin calculus and related topics.* Springer.

[71] D. Nualart (1981): *Une formule d'Itô pour les martingales continues à deux indices et quelques applications.* Ann. Inst. Henri Poincaré, 20(3):251-275.

[72] B. Saussereau and D. Nualart (2005): *Malliavin calculus for stochastic differtial equations driven bt fractional Brownian motion.* Preprint IMUB.

[73] D. Nualart and E. Pardoux (1988): *Stochastic calculus with anticipating integrals.* Probability Theory and Related Fields, 78, pag. 535-581.

[74] D. Nualart and G. Peccati (2005): *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals.* The Annals of Probability, 33(1), pag. 173-193.

[75] D. Nualart and Y. Ouknine (2002): *Besov regularity of stochastic integrals with respect to the fractional Brownian motion with parameter $H > \frac{1}{2}$.* J. of Th. Probability, 16(2), pag. 451-470.

[76] D. Nualart and Y. Ouknine, *Regularizing differential equations by fractional noise.* Stoch. Proc. Appl., **102**, 2002, pp. 103-116.

[77] D. Nualart and J. Vives (1992): *Smoothness of Brownian local times and related functionals.* Potential Analysis, 1(3), pag. 257-263.

[78] D. Nualart and J. Vives (1992): *Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space structure.* Séminaire de Probabilités XXIV, pag. 154-165.

[79] D. Nualart and P-A. Vuillermot (2004): *A stabilization phenomenon for a class of stochastic partial differential equations.* Preprint IMUB.

[80] D. Ocone (1987): *A guide to the stochastic calculus of variations.* Stochastic Analysis and Rel. Topics, Lecture Notes in Mathematics, 1316, pag. 1-79.

[81] D. Ocone and E. Pardoux (1989): *A generalized Itô-Ventzel formula. Application to a class of anticipating stochastic differential equations.* Annales Inst. H. Poincaré, 25, pag. 39-71.

[82] B. Oksendal (1996): An introduction to Malliavin calculus with applications to economics. Working paper, Norwegian School of Economics and Business Administration.

[83] G. Peccati, M. Thieullen and C.A. Tudor (2004): *Martingale structure of Skorohod integral processes.* The Annals of Probability, to appear.

[84] G. Peccati and C.A. Tudor (2004): *Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals.* Séminaire de Probabilités, XXXIV, pag. pag. 247-262.

[85] G. Peccati and C.A. Tudor (2005): *Anticipating integrals and martingales on the Poisson space.* Preprint.

[86] G. Peccati et M. Yor (2004): *Four limit theorems for quadratic functionals of Brownian motion and Brownian bridge.* Asymptotic Methods in Statistics, AMS.

[87] N. Privault and C.A. Tudor (2000): *Skorohod and pathwise stochastic calculus with respect to an L^2-process.* Random Operators and Stochastic Equations, 8, pag. 201-204.

[88] N. Privault, J.L. Solé and J. Vives (2000): *Chaotic Kabanov formula for the Azéma martingales.* Bernoulli, 6(4), pag. 633-651.

[89] Z. Qian and T. Lyons (2002): *System control and rough paths.* Clarendon Press, Oxford.

[90] B.L.S. Prakasa Rao (2003): *Parameter estimation for linear stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion.* Random Oper. Stoc. Eqs. , 11(3), 229-242.

[91] F. Russo and C.A. Tudor (2005): *On the bifractional Brownian motion.* Preprint.

[92] F. Russo and P. Vallois (1993): *Forward backward and symmetric stochastic integration.* Prob. Theory Rel. Fields, 97, pag. 403-421.

[93] F. Russo and P. Vallois (2000): *Stochastic calculus with respect to a finite quadratic variation process.* Stochastics and Stochastics Reports, 70, pag. 1-40.

[94] F. Russo and P. Vallois (1998): *Product of two multiple stochastic integrals with respect to a normal martingale.* Stochastic Proc. their Appl., 75, pag. 47-68.

[95] G. Samorodnitsky et M. Taqqu (1994): *Stable non-Gaussian random variables.* Chapman and Hall, London.

[96] A.V. Skorohod (1975): *On a generalization of a stochastic integral.* Th. Probab. Appl., XX, pag. 219-233.

[97] T. Sottinen and C.A. Tudor (2004): *On the equivalence of multiparameter Gaussian processes.* Journal of Theoretical Probability, to appear.

[98] T. Sottinen and C.A. Tudor (2005): *Parameter estimation for stochastic equations with fractional Brownian sheet.* Preprint.

[99] C. Stricker (1983): *Semimartingales gaussiennes-application au problème de l'innovation.* Z. Wahr. verw. Gebiete, 64, pag. 303-312.

[100] S. Torres and C.A. Tudor (2004): *The Euler scheme for a class of anticipating stochastic equation.* Random Operators and stochastic equations, 12(3), pag. 211-224.

[101] C.A. Tudor (2004): *Martingale-type stochastic calculus for anticipating integral processes.* Bernoulli, 10(2), pag. 313-325.

[102] C.A. Tudor (2005): *Itô formula for the infinite-dimensional fractional Brownian motion.* J. of Mathematics of Kyoto University, to appear.

[103] C.A. Tudor (2003): *Weak convergence to the fractional Brownian sheet in Besov spaces.* Bull. Braz. Math. Soc., 34(3), pag. 389-400.

[104] S. Tindel, C.A. Tudor, F. Viens (2003): *Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion,* Prob. Th. Rel. Fields., **127** (2003), 186-204.

[105] S. Tindel, C.A. Tudor, F. Viens (2004): *Sharp Gaussian regularity on the circle and application to the fractional stochastic heat equation,* Journal of functional Analysis, 217, pag. 280-313.

[106] C.A. Tudor and F. Viens (2003): *Itô formula and local time for the fractional Brownian sheet.* Electronic J. of Probab., **8**, paper 14, 1-31.

[107] C.A. Tudor and F. Viens (2003): *Itô formula for the two-parameter fractional Brownian motion ussing the extended divergence operator.* Preprint.

[108] C.A. Tudor and F. Viens (2005): *Statistical Aspects of the fractional stochastic calculus.* Preprint.

[109] C.A. Tudor and J. Vives (2002): *Anticipating Stratonovich integral for the Azéma martingale.* Stochastic Analysis and Applications, 20(3), pag. 673-692.

[110] C.A. Tudor and J. Vives (2002): *The indefinite Skorohod integral as integrator on the Poisson space.* Random Operators and Stochastic Equations, 10(1), pag. 29-46.

[111] S. Watanabe (1994): *Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus.* Springer-Verlag.

[112] M. Zaehle (1998): *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus.* Prob. Theory Rel. Fields, 111, pag. 333-374.