

## Réseaux de Neurones Artificiels Rebouclés pour Optimisation

Gonzalo Joya  
Dpto. Tecnología Electrónica  
ETSI Telecomunicación  
Universidad de Málaga  
29017 Málaga  
joya@dte.uma.es

Paris, le 21 juin 2002



*Dpto. Tecnología Electrónica  
Universidad de Málaga*

- 1. Introduction.**
- 2. Le modèle de Hopfield. Dynamiques**
  - **Dynamique Continue I.**
  - **Dynamique Discrète.**
  - **Dynamique Continue II.**
- 3. Quelques exemples d 'application.**
- 4. Les problèmes d'application des modèles de Hopfield.**
  - **Confusion entre les différentes dynamiques.**
  - **Analyse de convergence.**
  - **Le problème de la discrétisation des dynamiques continues.**
- 5. Quelques lignes de travail.**
  - **À la recherche d 'un minimum global.**
  - **L 'étude des dynamiques plus générales .**
  - **L 'étude d 'autres méthodes de résolution.**
- 6. Un exemple. Optimisation d 'une fonction avec des coefficients dynamiques**
- 7. Conclusions**
- 8. Références**



## 1. Introduction

**Pourquoi l'étude du modèle de Hopfield est-elle intéressante ?**

**Comme un outil**

**Il peut être appliqué à des problèmes d'optimisation.**

**Les problèmes d'optimisation combinatoire, spécialement les NP-Complets n'ont pas de solution classique satisfaisante.**

**Il y a beaucoup de problèmes qui peuvent être formulés comme un problème d'optimisation.**

**Comme un système intéressant en soi**

**Le modèle est un système rebouclé avec des caractéristiques dynamiques très intéressantes.**



# 1. Introduction

Quelques objectifs globaux de cet exposé

## 1. Il n'y a pas une seule formulation du modèle de Hopfield.

**Il faut faire une utilisation cohérente du modèle choisi pour chaque problème considéré et connaître ses limitations et possibilités.**

## 2. Le travail avec le modèle de Hopfield n'est pas actuellement limité à la résolution de problèmes fictifs d'optimisation.

**Il y a des problèmes ouverts en rapport avec la performance ou l'applicabilité du modèle à des problèmes réels.**

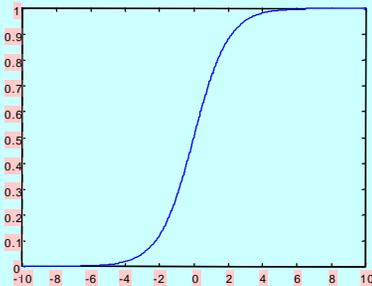


## 2. Le modèle de Hopfield . Dynamiques. Dynamique Continue I

On veut trouver le vecteur  $\mathbf{s}=(s_i)$  qui minimise  
la valeur d'une fonction bilinéaire en  $\mathbf{s}$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_{ii} I_i s_i$$

Nous partons d'un système d'éléments fonctionnels  $s_i$



$$s_i(t) = g(u_i(t))$$

$g$  est continue, monotone croissante.  
 $g(x) \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow -\infty$  et  $g(x) \rightarrow 1$  si  $x \rightarrow \infty$

Quelle dynamique doit suivre le système pour optimiser  $E$  ?

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial s_i}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

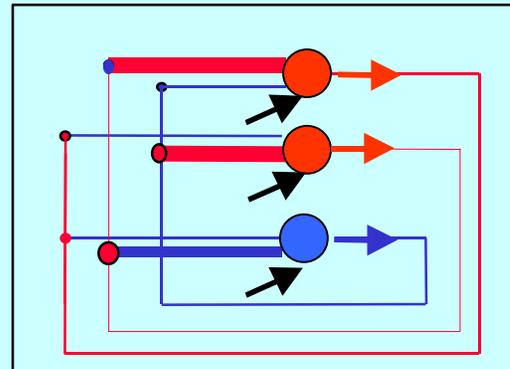


## 2. Le modèle de Hopfield . Dynamiques Dynamique Discrète

Hopfield (1982) propose un système rebouclé de neurones basés sur le modèle de McCulloch-Pitts

$$s_i(t) = \text{sgn}(u_i(t))$$

$$u_i(t+1) = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$



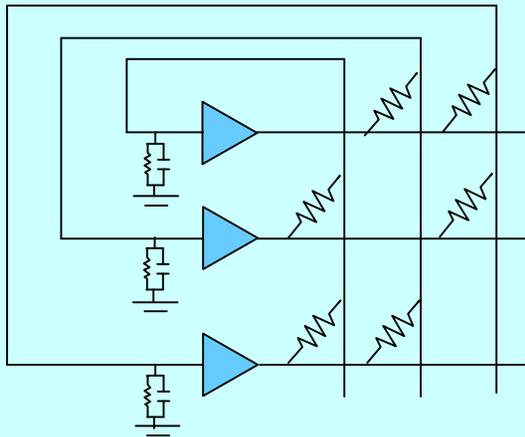
Hopfield démontre que sous les conditions  $t_{ij} = t_{ji}$   
 $t_{ii} = 0$

Le système évolue au sens de diminuer la valeur d'une fonction d'énergie E

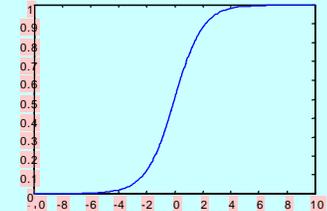
$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_i t_i s_i$$

## 2. Le modèle de Hopfield . Dynamiques Dynamique Continue II

Hopfield (1984) décrit une réalisation physique possible d'un réseau de neurones basée en Amplificateurs Opérationnels



$$s_i(t) = g\left(\frac{u_i(t)}{b}\right)$$



$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

Quelle est la fonction d'énergie du système?

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial s_i} = -b g^{-1}(s_i) + \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j t_{ij} s_j s_i + \sum_i I_i s_i + b \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s_i) ds_i$$

## 2. Le modèle de Hopfield . Dynamiques

**Dynamique continue I**  $s_i(t) = g(u_i(t))$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_{ii} I_i s_i$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

**Dynamique discrète**

$$s_i(t) = \text{sgn}(u_i(t))$$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_i I_i s_i$$

$$u_i(t+1) = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

**Dynamique continue II**

$$s_i(t) = g\left(\frac{u_i(t)}{\mathbf{b}}\right)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{j=1}^q t_{ij} s_j - I_i$$

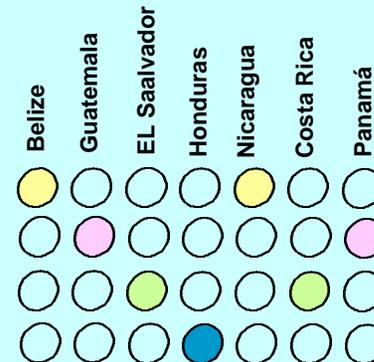
$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j t_{ij} s_j s_i + \sum_i I_i s_i + \mathbf{b} \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s_i) ds_i$$





### 3. Quelques exemples d 'application. Le problème des quatre couleurs

On désire colorier les régions d'une carte géographique de sorte que des régions voisines aient des couleurs différentes. Empiriquement, on sait que quatre couleurs suffisent pour une telle tâche (<http://www-leibniz.imag.fr/GRAPH/francais/definitions.html#planarite>)



$$E = \frac{A}{2} \sum_i (\sum_x s_{xi} - 1)^2 + \frac{B}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_x t_{ij} s_{xi} s_{xj}$$

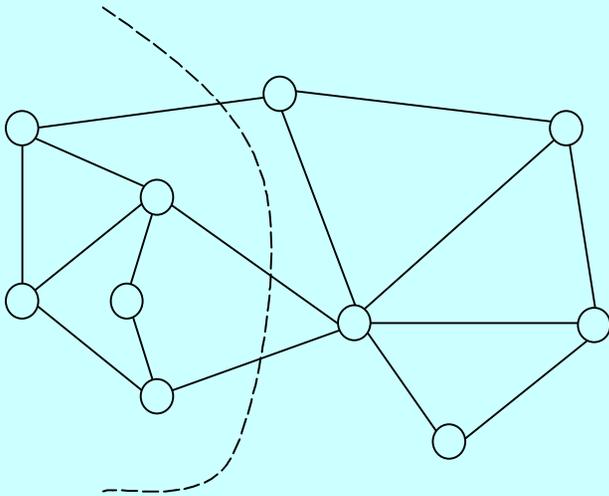
$$s_{ij} \in \{0,1\}$$

$t_{ij} = 1$  si les régions i et j ont une frontière commune



### 3. Quelques exemples d 'application. Le problème de la bipartition d 'un graphe

Soit un graphe  $G$  avec  $N$  (pair) sommets. Il s'agit de diviser en deux parties égales, d 'une manière à minimiser le nombre d 'arcs entre les deux parties.



$$E = -A \sum_i \sum_{j \neq i} t_{ij} s_i s_j + B \left( \sum_i s_i \right)^2; \quad s_i = \pm 1$$

Chaque  $s_i$  représente un sommet

$t_{ij} = 1$  si les sommets  $i$  et  $j$  ont un arc commun



*Dpto. Tecnología Electrónica  
Universidad de Málaga*

## 4. Les problèmes d'application des modèles de Hopfield. Confusion entre les différentes dynamiques

Dynamique continue I  $s_i(t) = g(u_i(t))$

$$E(s) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_{ii} I_i s_i$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

$$u_i(t + \Delta t) = u_i(t) + \left( \sum_j t_{ij} s_j - I_i \right) \Delta t$$

Dynamique discrète

$$s_i(t) = \text{sgn}(u_i(t))$$

$$E(s) = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j t_{ij} s_i s_j + \sum_i I_i s_i$$

$$u_i(t+1) = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

Dynamique continue II

$$s_i(t) = g\left(\frac{u_i(t)}{b}\right)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{j=1}^q t_{ij} s_j - I_i$$

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j t_{ij} s_j s_i + \sum_i I_i s_i + b \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s_i) ds_i$$

$$\Delta u_i = -u_i \Delta t + \left( \sum_{j=1}^q t_{ij} s_j - I_i \right) \Delta t$$

$$u_i(t+1) = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$



#### 4. Les problèmes d'application des modèles de Hopfield. Confusion entre les différentes dynamiques

$$E(s) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_{ii} I_i s_i$$

Fréquemment les trois dynamiques sont mélangées. On peut trouver beaucoup d'articles qui commencent par décrire la dynamique continue (réf. de Hopfield, 1984 obligée), puis appliquent une règle d'activation discrète et asynchrone (dynamique discrète), et analysent la trajectoire d'une énergie discrète.

$$s_i(t) = g\left(\frac{u_i(t)}{b}\right)$$

Deux exemples très significatifs:

Hopfield and Tank (1985). Neural computation of decision in optimization problems, Biol. Cybernet., 52, pp. 141-152

Wilson and Pawley, (1988) On the stability of the travelling salesman problem algorithm of Hopfield and Tank, Bio. Cybernet., 58, pp. 63-70

$$u_i(t+1) = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$



## 4. Les problèmes d'application des modèles de Hopfield. Hopfield avec Dynamique Discrète. Analyse de convergence

**Dynamique continue I**  $s_i(t) = g(u_i(t))$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_{ii} I_i s_i$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

**Dynamique discrète**

$$s_i(t) = \text{sgn}(u_i(t))$$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_i t_i s_i$$

$$u_i(t+1) = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

**Dynamique continue II**

$$s_i(t) = g\left(\frac{u_i(t)}{\mathbf{b}}\right)$$

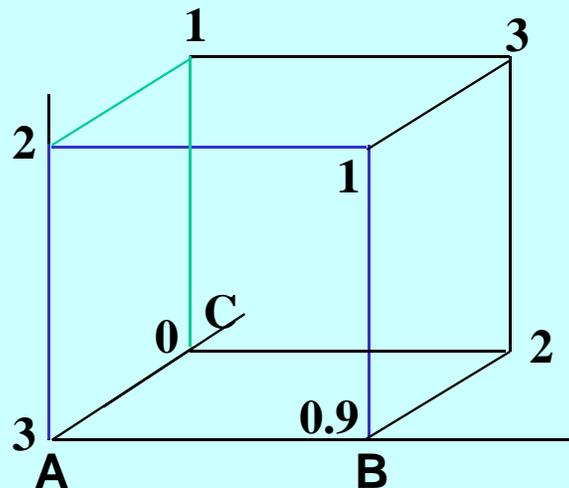
$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{j=1}^q t_{ij} s_j - I_i$$

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j t_{ij} s_j s_i + \sum_i I_i s_i + \mathbf{b} \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s_i) ds_i$$

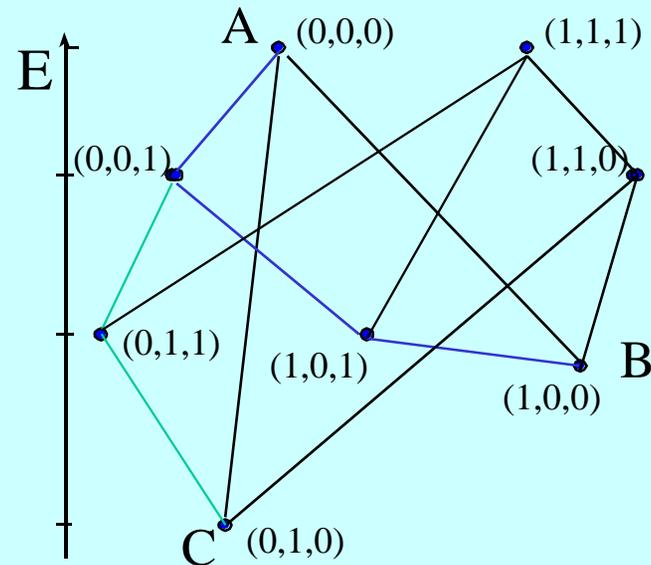


#### 4. Les problèmes d'application des modèles de Hopfield. Hopfield avec Dynamique Discrète. Analyse de convergence

- Un réseau de  $n$  neurones a  $2^n$  d'états possibles, mais à partir de chaque état le système ne peut évoluer que vers un d'entre ses  $n$  voisins.
- Un tel réseau peut prendre un nombre exponentiel d'opérations de recherche  $O(2^n)$  pour trouver un minimum local.
- Un état minimum local de l'énergie, peut avoir un rayon d'attraction nul.



Espace des États. Représentation des possibles états pour un Réseau de Hopfield à 3 neurones avec dynamique discrète



Possibles trajectoires d'Evolution



## 4. Les problèmes d'application des modèles de Hopfield. Hopfield avec Dynamique Continue I. Analyse de convergence

**Dynamique continue I**  $s_i(t) = g(u_i(t))$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_{ii} I_i s_i$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

**Dynamique discrète**

$$s_i(t) = \text{sgn}(u_i(t))$$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_i I_i s_i$$

$$u_i(t+1) = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

**Dynamique continue II**

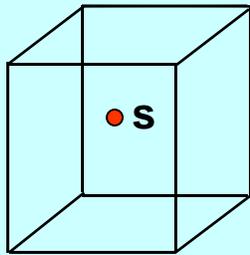
$$s_i(t) = g\left(\frac{u_i(t)}{\mathbf{b}}\right)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{j=1}^q t_{ij} s_j - I_i$$

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j t_{ij} s_j s_i + \sum_i I_i s_i + \mathbf{b} \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s_i) ds_i$$



#### 4. Les problèmes d'application des modèles de Hopfield. Hopfield avec Dynamique Continue I. Analyse de convergence

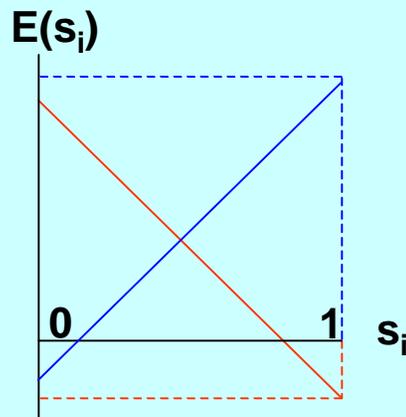


**Théorème : Soit  $s$  ( $0 < s_i < 1$ ) une solution de  $Ts - I = 0$ .  
Alors,  $s$  est un point d'équilibre instable.**

**Il n'y a pas de faux états d'équilibre dans  
l'intérieur de l'hypercube.**

**Une explication intuitive:**

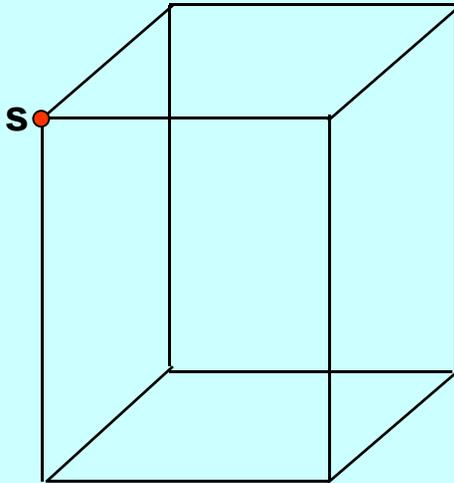
**Pour chaque neurone  $s_i$  nous avons une  
expression linéaire de  $E(s_i)$**



$$E(s_i) = \left(-\sum_j t_{ij}s_j + I_i\right)s_i + \sum_j I_j s_j$$



#### 4. Les problèmes des différentes dynamiques. Hopfield avec Dynamique Continue I. Analyse de convergence



Sauf pour l'existence de sommets dégénérés, les seuls points stables du système sont des sommets de l'hypercube .

Si un sommet a une valeur d'énergie plus petite que le reste de ses sommets voisins, alors il possède un domaine d'attraction qui contient ses voisins.

Deux sommets adjacents qui ont une valeur d'énergie différente ne peuvent pas être des états stables en même temps



*Dpto. Tecnología Electrónica  
Universidad de Málaga*

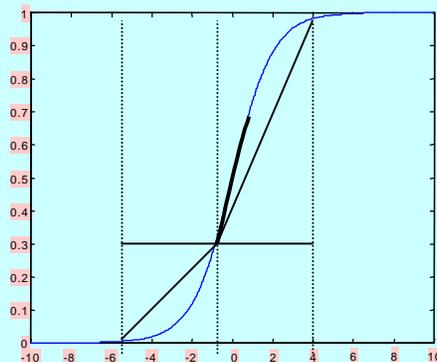
#### 4. Les problèmes des différentes dynamiques.

### Hopfield avec Dynamique Continue I. Discrétisation de la dynamique

La simulation par ordinateur implique une intégration numérique de l'équation de la dynamique continue.

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j t_{ij} s_j - I_i \quad \longrightarrow \quad u_i(t + \Delta t) = u_i(t) + \left( \sum_j t_{ij} s_j - I_i \right) \Delta t$$

La nouvelle dynamique n'est pas obligée de produire une diminution d'énergie.



	%minimum global	Nombre moyen de pas
$\Delta t = 1$	6	1,983
$\Delta t = 0.1$	40	13,198
$\Delta t = 0.01$	100	51,389

Solution d'une Equation Diophantienne avec un réseau de Hopfield continue I



*Dpto. Tecnología Electrónica*  
*Universidad de Málaga*

## 4. Les problèmes des différentes dynamiques. Hopfield avec Dynamique Continue II. Analyse de convergence

**Dynamique continue I**  $s_i(t) = g(u_i(t))$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_{ii} I_i s_i$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

**Dynamique discrète**

$$s_i(t) = \text{sgn}(u_i(t))$$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_i I_i s_i$$

$$u_i(t+1) = \sum_j t_{ij} s_j - I_i$$

**Dynamique continue II**

$$s_i(t) = g\left(\frac{u_i(t)}{\mathbf{b}}\right)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{j=1}^q t_{ij} s_j - I_i$$

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j t_{ij} s_j s_i + \sum_i I_i s_i + \mathbf{b} \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s_i) ds_i$$



## 4. Les problèmes des différentes dynamiques. Hopfield avec Dynamique Continue II. Analyse de convergence

**Théorème :**

Soit  $E$  une fonction bilinéaire polynomiale sur  $\mathbb{R}^n$ , que nous voulons optimiser.

Soit  $\{\beta_i\}$  une séquence de nombres positifs tendant vers zéro.

Alors quelle que soit la condition initiale  $s(t_0)$  de notre système, sauf pour un ensemble non dense, le système converge vers un état  $e+o(\beta_i)$ , où  $e$  est un sommet et un minimum local de  $E$ .

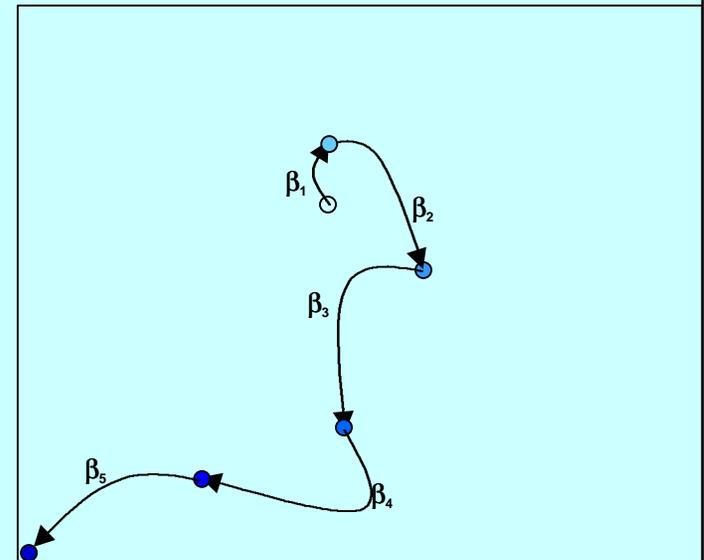
**Application pratique:**

1. Partir d'un état initial aléatoire et  $\beta$  élevé.
2. Laisser évoluer le système jusqu'à l'équilibre (point intérieur).
3. Si la distance entre ce point et un sommet peut être considérée plus petite que l'erreur, alors

le minimum est trouvé.

Sinon,

diminuer  $\beta$  et tourner au pas 2.



## 5. Quelques lignes de travail

### L'étude des dynamiques plus générales

Le modèle de Hopfield généralisé d'ordre élevé

$$s_i(t) = g\left(\frac{u_i(t)}{\mathbf{b}}\right)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{j=1}^q \sum_{(i_1, \dots, i_j) \in C_j^n} w_{i, i_1 \dots i_j} s_{i_1} \dots s_{i_j} - I_i$$

$$E = - \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{(i_1 \dots i_j) \in C_j^n \\ i_1, \dots, i_j \neq i}} w_{i, i_1 \dots i_j} s_i s_{i_1} \dots s_{i_j} + \sum_i I_i s_i + \mathbf{b} \sum_i \int_0^{s_i} g^{-1}(s) ds$$

Applicabilité à l'optimisation de fonctions multilinéaires



## 5. Quelques lignes de travail

### Etude d'autres méthodes de résolution

Soit la EDO  $\frac{ds}{dt} = f(s)$

Approchée par

***“Forward Euler Rule”***

$$s_{n+1} = s_n + \Delta t f(s_n)$$

***“Backward Euler Rule”***

$$s_{n+1} = s_n + \Delta t f(s_{n+1})$$



## 5. Quelques lignes de travail Etude d'autres méthodes de résolution

### Dynamique continue I

$$\frac{du_i}{dt} = net_i(s)$$

$$s_i(t) = g(u_i(t))$$

$$g(x) = \tanh(x)$$



$$\frac{ds}{dt} = f(s)$$



$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \frac{du}{dt} ; f(s) = \frac{1}{b}(1-s^2)net(s)$$



**“Backward Euler Rule”**

$$s_i(n+1) = s_i(n) + \Delta t \frac{1}{b}(1-s_i(n+1)^2)net_i(s(n+1))$$



## 5. Quelques lignes de travail

### Etude d 'autres méthodes de résolution

#### Comparaison des règles

##### ***“Backward Euler Rule”***

Méthode implicite

Il faut résoudre une équation non linéaire pour chaque itération

Le temps de calcul pour chaque itération est plus grand pour la méthode implicite

Il préserve la stabilité de l'équation différentielle pour des  $\Delta t$  grands.

Le méthode implicite peut trouver un point stable avec un nombre plus petit d'itérations.  
Ce fait compense l'inconvénient du temps de calcul

##### ***“Forward Euler Rule”***

Méthode explicite

La méthode produit directement la solution pour chaque itération

Il a besoin de  $\Delta t$  extrêmement petit pour préserver la stabilité de l'équation différentielle.



*Dpto. Tecnología Electrónica*  
*Universidad de Málaga*

## 6. Un exemple. Optimisation d'une fonction avec des coefficients dynamiques

Le système  
(Linéaire dans les paramètres)

$$y = \dot{x} = f(x, u, \mathbf{q}) \quad x, u \text{ sont mesurables}$$

$$y = \dot{x} = A(x, u) \mathbf{q}$$

Le problème

L'estimation « on line » des paramètres: Trouver une règle d'adaptation des paramètres estimés qui minimise l'erreur de prédiction

Règle d'adaptation

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = g(\hat{\mathbf{q}})$$

Erreur de prédiction

$$\|e\|^2 = \|y - f(x, u, \hat{\mathbf{q}})\|^2$$



## 6. Un exemple. Optimisation d'une fonction avec des coefficients dynamiques

Fonction qui doit être optimisée

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = -k \frac{\partial \|e\|^2}{\partial \hat{\mathbf{q}}} = 2k \left( -A^T A \hat{\mathbf{q}} + A^T y \right)$$

Réalisation du modèle de Hopfield  
(Dynamique continue I)

$$\frac{du_i}{dt} = net_i(\mathbf{s})$$

$$s_i(t) = g(u_i(t))$$

$$g(x) = \tanh(x)$$

$$E(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_i t_{ij} s_i s_j + \sum_{ii} I_i s_i$$

$$s \equiv \hat{\mathbf{q}}$$

$$E \equiv \frac{1}{2} \|e\|^2 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}^T A^T A \hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}^T A^T y$$

$$\dot{u} = -A^T A s + A^T y$$

$$s = \tanh(net / \mathbf{b})$$

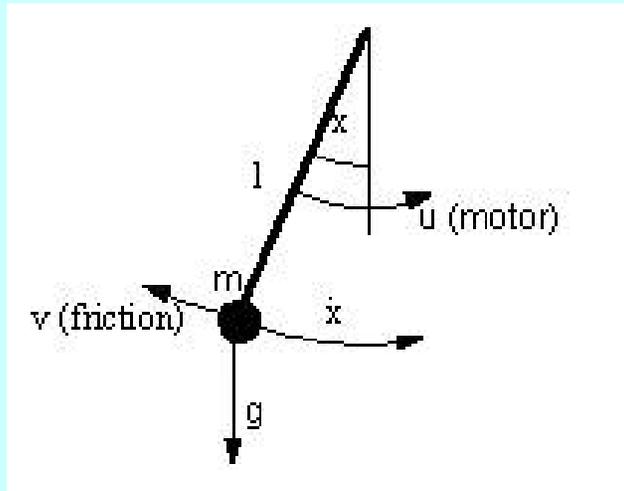
$$T = -A^T A$$

$$I = -A^T y$$

$$(Ici t_{ii} = 0)$$



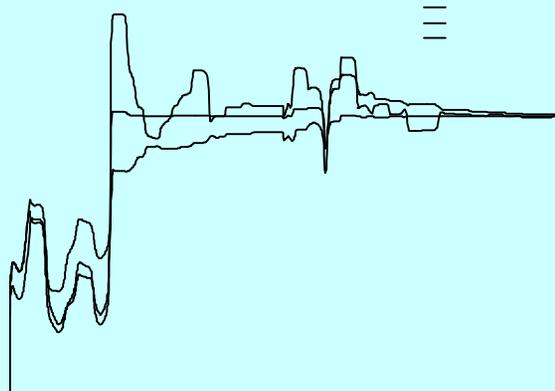
## 6. Un exemple physique. Le pendule inversé



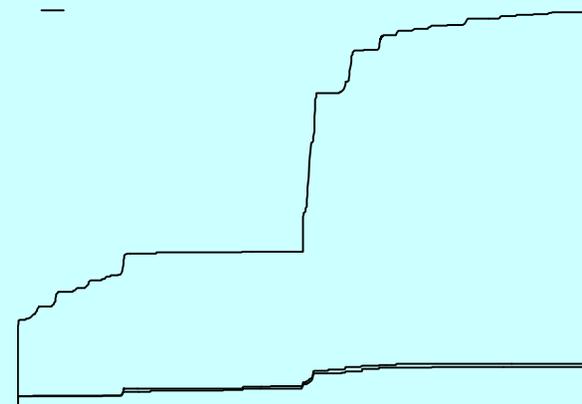
$$y = \ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x - \frac{v}{ml^2} \dot{x} + \frac{1}{ml^2} u$$

$$\mathbf{q} = \left( -\frac{g}{l}, -\frac{v}{ml^2}, \frac{1}{ml^2} \right)^T \quad \mathbf{A} = (\sin x, \dot{x}, u)$$

≡



Erreur d'estimation pour  $\vartheta_1$



Intégral de l'erreur de prédiction



## 7. Conclusions

1. Trois modèles différents du paradigme de Hopfield ont été présentés.
2. L'applicabilité de ces modèles à des problèmes d'optimisation combinatoire a été justifiée.
3. On a remarqué le risque de confondre ou mélanger les éléments constitutifs des trois modèles.
4. Pour les trois modèles les caractéristiques de convergence vers un minimum local ont été étudiées.
5. L'effet de la discrétisation d'une dynamique continue a été analysé sous la perspective de la conservation de la fonction d'énergie.
6. Une technique nouvelle de discrétisation qui utilise des méthodes numériques implicites a été introduite.
7. Le modèle de Hopfield a été appliqué dans le contexte de l'optimisation dynamique.



## Références

Références avec d'exemples d'application.

Garey, M.R., Johnson, D.S., (1979), *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company.

Hertz, J., Krogh, A., Palmer, R.G., (1991), *Introduction to the theory of neural computation*, Addison-Wesley.

<http://home.alex.tuxfamily.org/pvc.html>

<http://www-leibniz.imag.fr/GRAPH/francais/definitions.html#planarite>

Références sur le modèle de Hopfield avec dynamique discrète.

Joya, G., Atencia, M.A., Sandoval, F., Hopfield neural networks applied to optimization problems: some theoretical and simulation results, in LNCS 1240, *Proceedings of the IWANN'97*, Verlag, pp. 246-257, (1997)

Vidyasagar, M., Are Analog Neural Networks Better than Binary Neural Networks?, *Circuits Systems Signal Processing*, Vol. 17, No. 2, pp. 243-270, (1998)



*Dpto. Tecnología Electrónica  
Universidad de Málaga*

## Références

### Références sur le modèle de Hopfield avec dynamique continue I.

Abe, S.. Global convergence and suppression of spurious states of the Hopfield neural networks, *IEEE Trans. On Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 40, No. 4, pp. 246- 257, (1993).

### Références sur le modèle de Hopfield avec dynamique continue II.

Vidyasagar, M., Minimum-seeking properties of analog neural networks with multilinear objective functions, *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol. 40, No. 8, pp. 1359-1375 (1995).

Amari, S., I., Chen, T., New theorems on global convergence of some dynamical systems, *Neural Networks*, Vol. 14, pp. 251-255, (2001).

### Références que analysent les trois modèles.

Joya, G., Atencia, M.A., Sandoval, F., Hopfield neural networks for optimization: study of the different dynamics, *Neurocomputing*, Vol. 43, pp. 219-237, (2002).



## Références

Références sur l'étude d'autres méthodes de résolution.

Stuart, A., Humphries, A., Dynamical systems and numerical analysis. Cambridge University Press (1996).

Atencia, M.A., Joya, G., Sandoval, F., Continuous-state Hopfield Dynamics based on Implicit Numerical Methods, in Proc. Of ICANN '2002, (2002)

