

# Influence d'une contamination initiale sur une dynamique spatiale non itérative

Cécile Hardouin  
SAMOS, Université Paris 1

## Abstract

$n$  consommateurs répartis sur un réseau spatial  $S$  choisissent tour à tour entre deux standards  $A$  et  $B$  suivant des règles locales. Un unique balayage du réseau est effectué, c'est-à-dire que la dynamique est non-itérative. Dans ce cas, et contrairement aux dynamiques itératives ergodiques, les caractéristiques de la configuration spatiale finale du réseau dépendent de la configuration initiale et ne peuvent pas être évaluées mathématiquement. Nous en faisons l'étude empirique par simulation, pour un certain nombre de règles d'adoption bien spécifiées. L'objectif central de ce travail est de voir quel est l'effet d'une contamination initiale ou effet de dumping par le standard  $A$  au taux  $\tau$  sur la répartition spatiale finale. On évaluera en particulier la fréquence finale du standard  $A$ , la corrélation spatiale, ainsi que des mesures d'aggrégation et de connexité. Nous présentons enfin une sélection d'images de configurations finales pour diverses règles d'adoption et diverses valeurs du taux de contamination initiale.

## 1 Introduction

L'étude de la diffusion d'un processus technologique, de la dynamique de formation d'une opinion ou d'un choix collectif d'individus placés sur un ensemble de sites  $S$  constitue un élément important de l'économie spatiale. De nombreux travaux empiriques ou théoriques traitent du comportement des agents économiques dans le processus d'adoption de standards. Diverses modélisations ont été proposées : chaîne de Markov, automate cellulaire, champs de Gibbs, modèle d'apprentissage (réseaux neuronaux), jeux évolutionnistes, algorithmes génétiques..(Cf. par exemple [7] pour les automates cellulaires, [20] pour les systèmes multi-agents). Ces modèles prennent en compte divers paramètres comme l'information "publique", l'information "privée" ou "signal" de l'agent, sa tendance à

imiter ou non le comportement des autres agents (Cf. par exemple [?]), ou encore la présence éventuelle de “super-agents”. Bikhchandani ([5], [6]) a introduit le concept de “cascades informationnelles”, dans le cas où les individus entrent sur le marché un par un, observent leurs prédécesseurs et prennent une unique décision ; celle-ci est basée sur le choix des prédécesseurs et ne tient pas compte de l’information privée. L’ordre d’entrée est exogène et est connu de tous. Notre démarche est similaire sur le principe d’une action unique et irréversible de chaque agent mais nous étudions diverses procédures de choix, dans lesquelles les choix des autres agents interviennent de façon plus ou moins prononcée. Plus précisément, nous nous restreignons ici à l’étude de modèles de choix de type champs de Gibbs.

Soit  $S$  un ensemble spatial sur lequel  $n$  agents opèrent un choix entre 2 standards A ou B. Pour fixer les idées, on prendra pour  $S$  le tore bidimensionnel  $S = \{1, 2, \dots, N\}^2$ , à  $n = N^2$  sites, muni de la relation de voisinage aux quatre plus proches voisins :  $i = (i_1, i_2)$  et  $j = (j_1, j_2)$  sont voisins si  $|i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| \equiv 1$  (modulo  $N$ ). Si  $A$  est une partie de  $S$ , on note  $\partial A = \{i \in S, i \notin A \text{ et } \exists j \in A \text{ t.q. } i \text{ et } j \text{ sont voisins}\}$  le voisinage de  $A$ , et  $\partial i = \partial\{i\}$  les voisins de  $i$ . D’autres ensembles  $S$  mais aussi d’autres relations de voisinages peuvent être envisagés : fondamentalement, cela ne changera pas la nature qualitative des résultats que nous allons présenter.

Pour toutes les dynamiques étudiées ici, les individus choisissent tour à tour un standard selon une règle d’affectation séquentielle. Lorsque ce choix dépend du contexte local, on dit qu’il y a coordination spatiale ; la dépendance spatiale sera positive s’il y a coopération entre les agents et négative s’il y a compétition. Un balayage de  $S$  correspond à une suite de visites de l’ensemble des sites de  $S$ .

On parle de dynamique itérative lorsque l’on répète indéfiniment les balayages. Dans ce cas et pour une règle séquentielle, on est en présence d’une dynamique d’échantillonneur de Gibbs et on sait alors caractériser la loi de probabilité des configurations limites. Lorsque les choix sont effectués de façon synchrone (tous les agents de  $S$  opèrent leur choix simultanément), la dynamique est encore ergodique, mais la distribution limite est difficile à expliciter analytiquement. Mais, dans ces deux cas, on obtient la caractérisation de la loi limite de manière théorique (Cf. [15], et [13] pour une description plus complète de ces modèles itératifs).

Le cadre que nous allons étudier ici est différent : c’est celui d’une dynamique non-itérative où un seul balayage de  $S$  est effectué. Dans ce cas, on ne sait pas caractériser la loi de la configuration finale, l’asymptotique n’existant ni en temps ni en espace ( $S$  est fini par hypothèse). De plus cette configuration finale dépend de la configuration initiale. C’est cette loi que nous allons étudier empiriquement par simulation dans la situation où la configuration initiale est une contamination par le standard A à un taux donné  $\tau$ .

## 2 Dynamique non-itérative et contamination initiale

Le modèle étudié est le suivant :  $S$  est le tore bidimensionnel, les agents choisissent de façon séquentielle entre A ou B ; on note  $y_i \in E = \{-1, +1, 0\}$  l'état du site  $i$ , où  $+1$  désigne le choix de A,  $-1$  celui de B et  $0$  le fait que le choix n'a pas encore fait.

On veut étudier l'effet d'une contamination initiale (ou dumping) sur la configuration finale. Parler de contamination initiale au taux  $\tau$  ( $\tau \in [0, 1]$ ) signifie que  $[n\tau]$  agents ont préalablement choisi A ( $[r]$  désignant la partie entière du réel  $r$ ) : la configuration initiale est alors constituée par  $[n\tau]$  sites d'affectation  $+1$  répartis au hasard dans  $S$ , les autres sites étant "non occupés". Ensuite, on visite les sites qui n'ont pas encore fait leur choix, un par un et dans un ordre aléatoire, le nouveau site visité devenant occupé par A ou par B selon une règle d'affectation locale. Cette règle est commune à tous les agents et tient compte des éventuels choix antérieurs des quatre plus proches voisins de l'agent considéré. Dans ce contexte non itératif et non ergodique, on sait que la configuration finale dépend de la configuration initiale, c'est à dire du taux de contamination  $\tau$ .

Nous considérerons les trois règles d'affectation suivantes.

1. Le choix majoritaire fort : l'agent choisit le standard qui est majoritaire parmi ses quatre voisins. En cas d'égalité, ou lorsque l'ensemble des sites voisins est non occupé, il choisit A (resp. B) avec probabilité  $\pi$  (resp.  $1-\pi$ ).
2. Le choix majoritaire faible : si le nombre de sites voisins occupés est inférieur ou égal à deux, l'agent choisit A (resp. B) avec la probabilité  $\pi$  (resp.  $1-\pi$ ). A partir de trois voisins occupés, l'agent suit la règle de choix majoritaire.
3. Le choix probabiliste de type Ising : si les 4 sites voisins de  $i$  sont non occupés, l'agent choisit A (resp. B) avec la probabilité  $\pi$  (resp.  $1-\pi$ ). Dans le cas contraire, notant  $y_{\partial i}$  la configuration des quatre plus proches voisins de  $i$ , il choisit A avec la probabilité

$$\pi_i(A|y_{\partial i}) = \frac{\exp\left(\beta \sum_{j \in \partial i} y_j\right)}{\exp\left(\beta \sum_{j \in \partial i} y_j\right) + \exp\left(-\beta \sum_{j \in \partial i} y_j\right)} = 1 - \pi_i(B|y_{\partial i})$$

$\beta$  est un paramètre de coordination spatiale (invariant pour tous les agents) : il y a coopération si  $\beta > 0$ , tandis que  $\beta < 0$  exprime la compétition. Lorsque  $\beta \rightarrow +\infty$ , la règle d'Ising s'identifie à la règle d'affectation majoritaire forte.

Pour simplifier la présentation, on fixe la probabilité  $\pi$  intervenant dans les règles ci-dessus égale à  $1/2$ , ce qui correspond à un choix équiprobable entre A et B.

Les paramètres du modèle sont donc : le taux  $\tau$  de contamination initiale, la taille  $n$  du réseau la règle d'affectation et le paramètre de coordination spatiale  $\beta$  dans le cas du modèle d'Ising. Pour ce dernier, nous avons retenu les valeurs  $\beta = 0.5$  qui correspond à une faible coordination spatiale, puis  $\beta = 1$  qui correspond à un début de formation en amas, et enfin  $\beta = 3$  où la formation d'agrégats (clusters) est plus prononcée.

Notre étude expérimentale est la suivante. Nous partons d'un taux de contamination initiale  $\tau$  de 2% puis nous faisons varier  $\tau$  de 5% jusqu'à 95% par pas de 0.05, et terminons par un taux de 99%. Pour chaque valeur de  $\tau$ , et pour chacun des trois modèles d'affectation, nous réalisons 400 simulations sur le tore carré de côté  $N = 64$  ( $n = 4096$ ). Sur la base de ces simulations, nous présentons au paragraphe 3 l'estimation de caractéristiques importantes des configurations spatiales résultantes : la fréquence finale du standard A (§3-1) ; des corrélations spatiales (§3-2) ; deux indicateurs d'agrégation (§3-3) et trois mesures de connexité (§3-4). Ces caractéristiques dégagent à la fois l'influence de la règle d'affectation et celle du taux de contamination initiale sur la répartition spatiale finale des deux standards.

Le paragraphe 4 complète cette étude en présentant une sélection représentative d'images de configuration finales, en en indiquant chaque fois leurs caractéristiques.

Le dernier paragraphe établit des résultats analytiques sur la loi du nombre de sites voisins occupés sous l'hypothèse nulle ( $H_0$ ) traduisant qu'il n'y a ni coopération, ni compétition spatiale. Ces résultats sont utiles pour construire un test de l'hypothèse ( $H_0$ ).

## 3 Etude empirique de la configuration finale

Le premier facteur à étudier est la fréquence finale du standard A. Nous décrivons également la configuration finale à l'aide d'autres paramètres statistiques : la corrélation spatiale, des mesures d'agrégation et des indicateurs de connexité. Pour ces caractéristiques, nous comparerons la configuration ( $C$ ) issue de l'une des règles d'affectation à celle ( $C_0$ ) de la distribution spatiale au hasard uniforme avec le même nombre final de standards A. Ces comparaisons entre ( $C$ ) et ( $C_0$ ) permettent de mesurer la différenciation spatiale entre une règle et la répartition au hasard uniforme correspondante.

### 3.1 La fréquence finale du standard A

Pour chaque valeur  $\tau$  du taux de contamination initiale, et pour chaque règle d'affectation, nous disposons d'un échantillon de 400 fréquences finales de standards A. Nous traçons

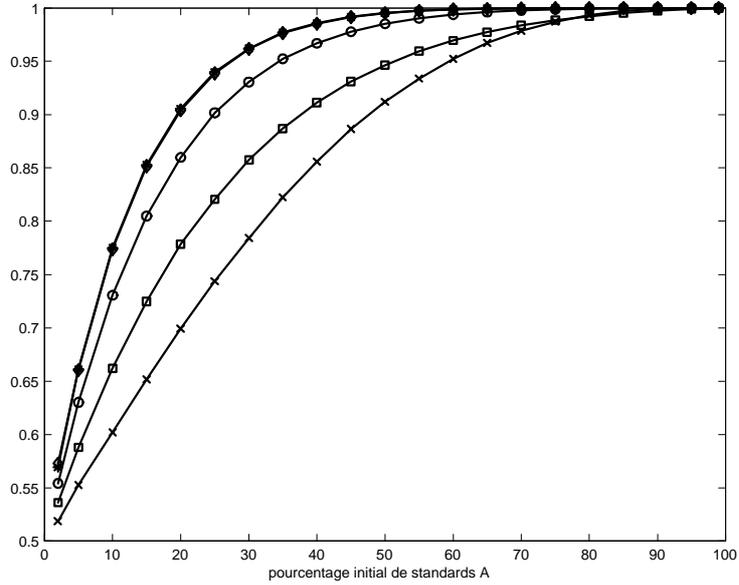


Figure 1: Fréquence finale de standards A suivant la règle d'affectation : x : faible ; □ : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ; ◇ : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte.

l'histogramme de ces 400 valeurs et calculons leur moyenne et leur écart-type. La fréquence finale de standards A est estimée par la moyenne et notée  $\hat{\pi}_A(\tau)$ .

La figure 1 montre, pour cinq règles d'affectation (majoritaire faible, majoritaire forte, trois règles d'Ising pour trois valeurs de  $\beta$ ), l'évolution  $\tau \mapsto \hat{\pi}_A(\tau)$  de la fréquence empirique finale de standards A en fonction du taux de contamination. La croissance de la courbe en  $\tau$  est d'autant plus importante que la règle force la coopération locale. Ceci est conforme à l'intuition : croissance plus forte pour  $\beta$  plus élevé dans le cas de la règle d'Ising, et plus forte pour la règle d'affectation majoritaire forte que pour la majoritaire faible.

Ainsi, pour la règle d'affectation majoritaire forte avec un “dumping” initial de 20%, le standard A sera présent à 90% dans la configuration finale ; en comparaison, si les 80% des sites initialement non affectés s'étaient répartis équitablement entre A et B, la proportion finale de A aurait été de  $\frac{80}{2}\% + 20\% = 60\%$ , soit une différence entre les deux situations de 30%. On voit donc qu'un dumping amplifie le biais initial en renforçant le choix de A tout au cours du processus d'adoption. Dans le cas d'un taux de dumping de 10%, la différence présentée ci dessus serait de 23% (78%-45%, où 78% = taux final de A après dumping et  $55\% = 10\% + \frac{90}{2}\%$ ). Ainsi, l'effet différentiel du dumping est plus

important pour des petites valeurs du taux.

Ces graphiques permettent aussi de situer les deux règles majoritaires par rapport à une affectation du type Ising : les courbes obtenues pour  $\beta = 3$  et la règle forte coïncident, tandis que la croissance pour la règle faible est moins rapide que celle pour l'Ising avec  $\beta = 0.5$ .

Disposant d'un 400-échantillon de la fréquence finale de A, nous obtenons les distributions empiriques du taux final  $\mathfrak{h}_A(\tau)$  de standards A en fonction de  $\tau$  et de la règle d'affectation choisie. Nous représentons Figure 2 les distributions obtenues pour un taux initial de contamination de 10%. Plus généralement, lorsque  $\tau$  est petit, on observe un comportement gaussien dans tous les cas. A partir d'un seuil  $\tau_c$  variant selon la règle d'affectation, le test de conformité du khi-deux de niveau 5% rejette l'hypothèse gaussienne. De fait, pour  $\tau > \tau_c$ , la proportion finale de standard A devient très proche de 1, avec une dispersion quasi nulle. Ce seuil  $\tau_c$  vaut approximativement 40% pour la règle forte et celle d'Ising avec  $\beta = 3$ , et 50% avec l'Ising pour  $\beta = 1$ . Ces seuils s'observent graphiquement en prenant, sur la Figure 1, les abscisses des intersections de l'horizontale  $y = 0.97$  avec chacune des courbes  $\tau \mapsto \mathfrak{h}_A(\tau)$ . L'intérêt de vérifier le caractère Gaussien des distributions est de permettre de construire un intervalle de confiance pour la fréquence finale de A.

## 3.2 Corrélations spatiales

La corrélation spatiale est le deuxième indicateur classique pour décrire la configuration spatiale. Lorsque le choix d'un standard en un site dépend des choix déjà réalisés dans le voisinage, il va apparaître une corrélation entre les standards en des sites voisins, positive s'il y a imitation et négative s'il y a recherche de différenciation. Le modèle de choix progressif s'explique aisément mais l'expression analytique de la corrélation est impossible du fait de la complexité de la combinatoire géométrique du processus de balayage. Par contre, on obtient facilement ses caractéristiques par la méthode de Monte Carlo. Nous calculons ainsi la corrélation à distance 1 (basée sur les 4 plus proches voisins), à distance 2 et à distance  $\sqrt{2}$  (les 4 voisins diagonaux), notées respectivement  $\rho_1$ ,  $\rho_{\sqrt{2}}$ , et  $\rho_2$ , et enfin celle basée sur les 8 plus proches voisins, que l'on notera  $\rho_{8v}$ , et ce pour chaque règle d'affectation.

### 3.2.1 Evolution de la corrélation à distance 1 en fonction de $\tau$

Nous représentons Figure 3 l'évolution de  $\rho_1 = \frac{(2n)^{-1} \sum_{i=1, n} y_i y_{\partial i} - \bar{y}^2}{1 - \bar{y}^2}$  en fonction de  $\tau$  pour les différentes règles d'affectation. Par convention, nous posons  $\rho_1 = 0$  lorsque le champ est constant et de variance nulle.

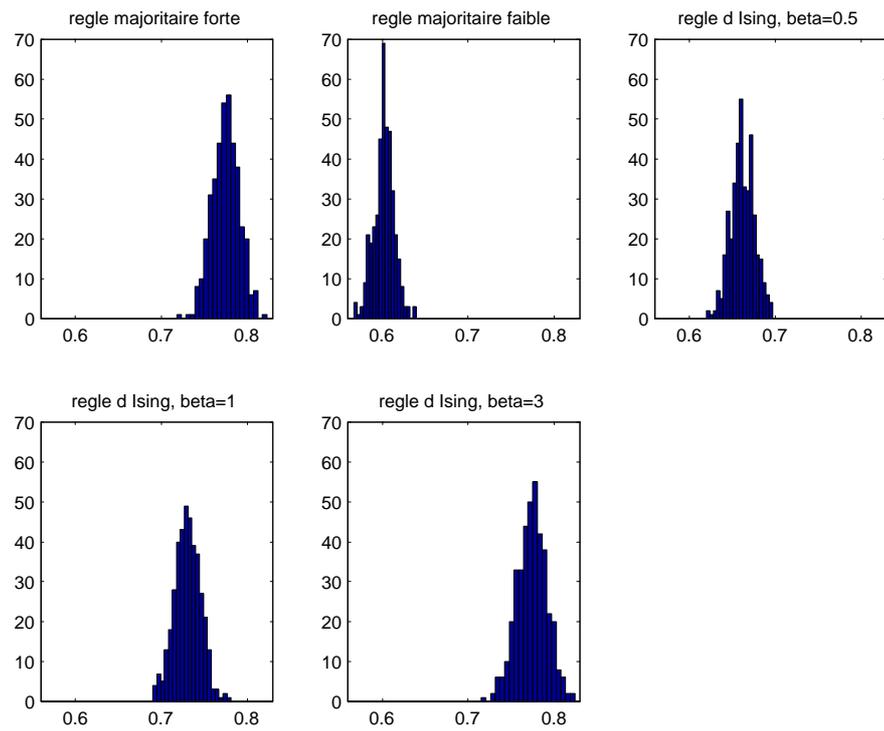


Figure 2: Histogrammes des fréquences finales de standards A obtenus avec un taux initial de contamination  $\tau = 10\%$ .

Quelle que soit la règle, la corrélation est positive et décroît vers zéro lorsque  $\tau$  augmente. On constate une hiérarchie entre les différentes règles ; pour un taux de dumping inférieur à 50%, la corrélation spatiale est plus importante pour les règles qui forcent davantage le choix du standard A ; par exemple, pour  $\tau = 2\%$ , la corrélation spatiale pour la règle majoritaire forte vaut presque le double (0.575) de celle calculée pour la règle faible (0.305). Entre les deux, on a les valeurs de  $\rho_1$  pour l'affectation Ising  $\beta = 0.5$  (0.377) et pour  $\beta = 1$  (0.506). La courbe de corrélation pour  $\beta = 3$  se superpose à celle obtenue pour la règle majoritaire forte. La décroissance vers zéro est ensuite d'autant plus rapide que la règle est "forte" ; la corrélation atteint zéro dès que  $\tau = 75\%$  pour la règle majoritaire forte (et le cas Ising  $\beta = 3$ ) alors qu'il faut attendre une contamination plus importante dans les autres cas ( $\tau = 0.95$  pour la règle faible). On constate que les courbes ont une intersection commune : la corrélation pour les différentes règles est quasiment la même lorsque le taux initial de contamination est de 50%.

### 3.2.2 Comparaison à la distribution au hasard uniforme ( $C_0$ )

Une autre façon d'appréhender l'effet spatial d'une contamination initiale sur la configuration finale pour une règle donnée, est de comparer cette configuration (C) avec celle qui résulte d'une répartition aléatoire uniforme ( $C_0$ ) pour un même nombre final de standards A. Ce nouveau champ aléatoire uniforme ( $C_0$ ) a une allure distincte du précédent, et ses caractéristiques statistiques diffèrent de celles de (C). Les exemples présentés ci-après soulignent cette différence dans l'organisation spatiale.

Comparons les corrélations spatiales des champs (C) et ( $C_0$ ). Les figures 3 et 4 donnent l'évolution de  $\rho_1$  en fonction de  $\tau$  pour les deux champs (C) et ( $C_0$ ), et ceci pour les différentes règles d'affectation dont est issu (C). Le comportement de la corrélation du champ ( $C_0$ ) est fondamentalement différent de celui des champs (C) : quelles que soient la règle d'affectation et la valeur de  $\tau$ , la corrélation est quasi nulle (l'échelle des ordonnées est en  $10^{-3}$ ), et évolue de façon désordonnée dans un petit intervalle autour de zéro (elle peut être négative). Il est donc clair que la corrélation spatiale constitue un bon critère de différenciation des champs issus d'une procédure de balayage, une corrélation positive supérieure à 0.002 correspondant à un champ de type (C). Cette corrélation s'observe pour tout taux de contamination initiale compris entre 2% et  $\tau_{\max}\%$ , la valeur de  $\tau_{\max}$  variant avec la règle d'affectation, mais étant supérieure dans tous les cas à 75%. Une corrélation supérieure à 0.5 par exemple, convient à un champ issu d'une règle d'affectation majoritaire forte ou de type Ising avec  $\beta$  élevé ( $> 1$ ) et un taux  $\tau$  faible ( $\leq 15\%$ ). L'effet du dumping se ressent d'autant plus que le taux initial de contamination est faible.

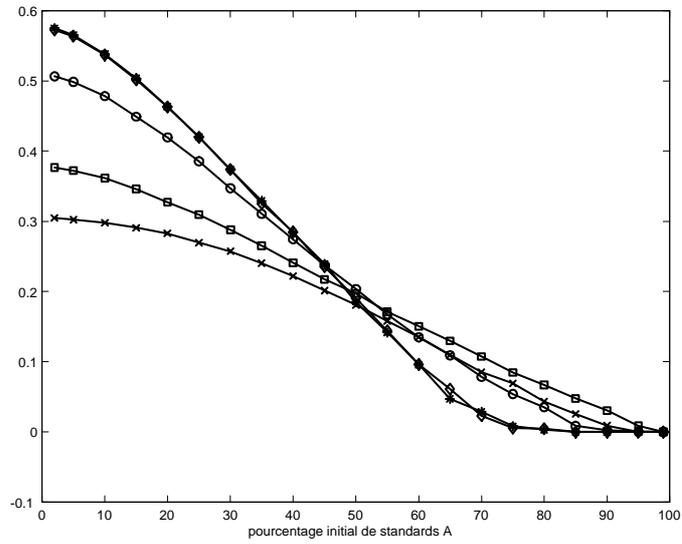


Figure 3: Corrélation à distance 1 suivant les règles d'affectation : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

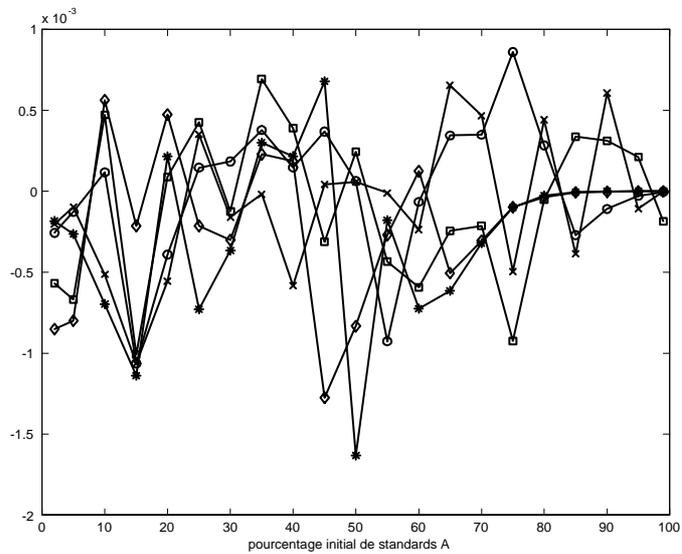


Figure 4: Corrélation à distance 1 pour les champs (C0) associés aux champs (C) : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

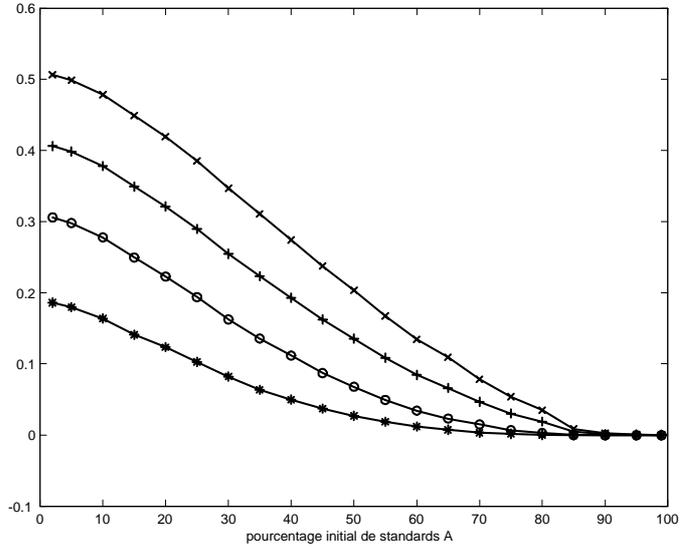


Figure 5: Corrélations pour la règle d’affectation Ising  $\beta = 1$  : x :  $\rho_1$  ; + :  $\rho_{8v}$  ; o :  $\rho_{\sqrt{2}}$  ; \* :  $\rho_2$

### 3.2.3 Les autres corrélations

Nous avons tracé les courbes d’évolution des corrélations à distance 2,  $\sqrt{2}$  et celle basée sur les 8 plus proches voisins pour les cinq règles d’affectation en fonction de  $\tau$  (champs (C)). Le comportement observé est analogue à celui observé pour la corrélation à distance 1 et les mêmes remarques s’appliquent. Nous pouvons également comparer les différentes corrélations  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_{\sqrt{2}}$ ,  $\rho_{8v}$  pour une même règle. Nous représentons Figure 5 ces corrélations pour la règle d’affectation Ising avec  $\beta = 1$  (le comportement pour les autres règles est analogue). On observe à nouveau la décroissance vers zéro de corrélations qui sont positives ; on voit que d’une part, la corrélation diminue lorsque la distance du voisinage qui sert de base à son calcul augmente :  $\rho_1 \geq \rho_{8v} \geq \rho_{\sqrt{2}} \geq \rho_2$  ; d’autre part, la vitesse de la décroissance des corrélations vers zéro est elle aussi conditionnée par ce voisinage : elle est d’autant plus forte que le voisinage est proche, les corrélations étant ici toutes égales à zéro à partir de  $\tau = 85\%$ .

Les différentes corrélations ayant des comportements analogues, on peut se contenter de l’étude de  $\rho_1$ . Cette corrélation dépend essentiellement du dumping initial ; plus le taux est petit, plus son impact sur la corrélation est important et plus celle-ci est élevée.

### 3.3 Mesures d'agrégation spatiale

Lorsque nous regardons des images de champs (C) et celles de champs (C<sub>0</sub>) résultant d'une répartition aléatoire uniforme du même nombre final de standards A, une différence visuelle essentielle est la formation d'aggrégats ou clusters pour les champs (C) (Cf. les exemples de la section 4). Nous proposons plusieurs indicateurs d'agrégation et de connexité pour évaluer cette caractéristique spatiale.

#### 3.3.1 Deux indicateurs d'agrégation

Nous définissons l'indicateur absolu d'agrégation  $IA$  comme le nombre d'arêtes joignant des sites voisins qui sont tous les deux au standard A, nombre rapporté au nombre total de sites au standard A. Ainsi,

$$IA = \frac{\sum_{i \in S} x_i x_{\partial i}}{2 \sum_{i \in S} x_i},$$

où  $x_i = \frac{y_i + 1}{2}$  vaut 1 si le site  $i$  a été affecté par A et 0 sinon.

L'indicateur relatif d'agrégation  $IR$  est le rapport des indicateurs absolus d'agrégation du champs (C) et du champ (C<sub>0</sub>) associé

$$IR = \frac{IA(C)}{IA(C_0)}.$$

Les figures 6, 7 et 8 montrent l'évolution de ces indicateurs en fonction du taux de contamination initiale  $\tau$ , pour les différentes règles d'affectation, et pour les deux types de champs.

En ce qui concerne l'indicateur absolu d'agrégation, son évolution, représentée figures 6 et 7, est similaire pour les deux types de champs : augmentation progressive de un peu plus de 1 jusqu'à 2 pour les différentes règles, la croissance étant la plus lente dans le cas de la règle majoritaire faible, puis augmentant avec la valeur de  $\beta$  dans le cas de la règle d'Ising, les cas  $\beta = 3$  et règle majoritaire forte étant confondus. C'est le taux de contamination initiale qui va permettre de différencier les deux types de champs ; lorsqu'il est élevé, dans tous les cas supérieur à 50%, les graphes de l'indicateur absolu d'agrégation sont quasiment identiques pour (C) et (C<sub>0</sub>) ; par contre, si  $\tau$  est petit, les valeurs de l'indicateur  $IA(C)$  calculé sur le champ (C) sont nettement supérieures à celles obtenues pour le champ (C<sub>0</sub>) correspondant. Ceci s'observe pour chacune des règles d'affectation ; plus le taux  $\tau$  est petit, plus la différence entre les valeurs des indicateurs pour les deux champs est importante. Le taux seuil à partir duquel la différence des indicateurs est inférieure à 0.1 (en valeur absolue) varie avec la règle d'affectation choisie. Par exemple, il est de  $\tau = 20\%$  pour l'affectation majoritaire forte et de  $30\%$  pour la règle

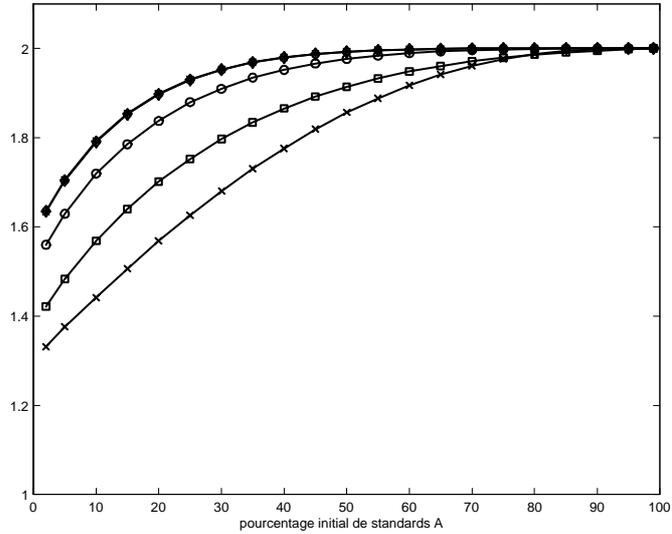


Figure 6: Indicateur absolu d'agrégation pour les champs (C) suivant la règle d'affectation : x : faible ; □ : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ; ◇ : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

d'Ising avec  $\beta = 0.5$ . Plus la règle renforce le choix du standard A et moins cette valeur seuil du taux initial séparant  $IA(C)$  et  $IA(C_0)$  est élevée. Le graphe de l'indicateur relatif d'agrégation (Figure 8) confirme cette observation. Il représente les courbes d'évolution de  $IR$  pour chaque règle d'affectation ; elles sont décroissantes vers 1, la décroissance étant plus forte si la règle favorise davantage le standard A ; par exemple, dans le cas de la règle majoritaire forte,  $IR$  vaut 1.44 si  $\tau = 2\%$  et atteint 1 (à  $10^{-2}$  près) pour  $\tau = 40\%$  ; alors que l'indicateur relatif d'agrégation vaut 1.28 lorsque  $\tau = 2\%$  et 1 (à  $10^{-2}$  près) dès que  $\tau = 65\%$ .

On peut ainsi envisager l'indicateur absolu d'agrégation comme un bon paramètre pour caractériser l'organisation spatiale des champs issus d'une procédure de choix en un balayage si on sait que le taux initial de contamination est peu élevé. On retrouve l'idée que l'effet d'un dumping initial est plus performant si le taux de dumping est bas.

### 3.3.2 Indicateurs de connexité

Un élément topologique qui caractérise bien les situations d'agrégats est la mesure de connexité des standards A dans la configuration finale (Cf. les exemples section 4). Les images des configurations finales obtenues par nos simulations montrent toutes le même phénomène ; pour les champs (C) issus des procédures de choix, il apparaît une

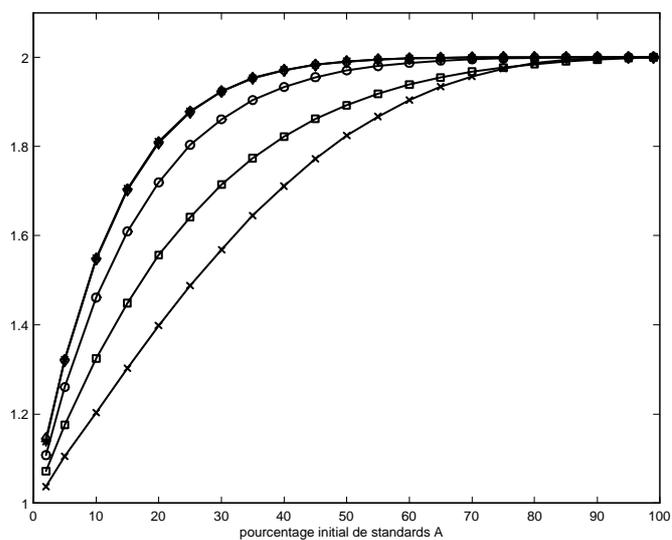


Figure 7: Indicateur absolu d'agrégation pour les champs (C0) associés aux champs (C) : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

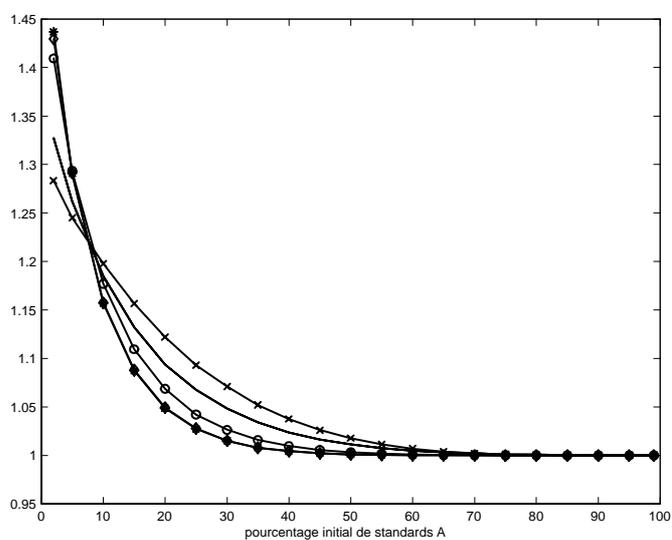


Figure 8: Indicateur relatif d'agrégation suivant la règle d'affectation du champ (C) : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

organisation des standards A en clusters, ceux-ci devenant moins nombreux mais plus importants en taille lorsque  $\tau$  augmente ; par contre, pour le même nombre final de standards A mais répartis de façon aléatoire uniforme, les standards A forment davantage de composantes connexes, chacune de petite taille. Nous calculons trois indicateurs de connexité pour les champs (C) et pour les champs ( $C_0$ ) correspondant :  $ncc$  le nombre de composantes connexes de sites A,  $mcc$  la taille moyenne de ces composantes, et  $\max cc$  la taille de la plus grande composante connexe.

Les figures 9 et 10 donnent l'évolution de  $ncc$  pour les différentes règles en fonction de  $\tau$ , et ce pour les champs (C) et ( $C_0$ ) ; on constate sans surprise que ce nombre décroît lorsque  $\tau$  augmente ; on retrouve encore la même hiérarchie dans les règles d'affectation : le nombre de composantes connexes est plus important pour la règle majoritaire faible que pour l'affectation de type Ising avec  $\beta$  successivement égal à 0.5, 1, puis 3, ce dernier cas coïncidant avec la règle majoritaire forte. Le plus intéressant est la comparaison des deux types de champs (C) et ( $C_0$ ) lorsque le taux de contamination initiale est faible ; si les courbes de l'évolution de  $ncc$  semblent similaires dans les deux figures ci-dessous, l'échelle des ordonnées différencie nettement les champs de type (C) et ( $C_0$ ) lorsque  $\tau$  est petit , pour chaque règle d'affectation, le nombre de composantes connexes est bien plus important dans le cas du champ ( $C_0$ ) à dispersion aléatoire, ce qui correspond à ce qu'on attendait. A partir d'une certaine valeur du taux initial, variable selon la règle de choix du standard mais n'excédant pas 30%, le nombre de composantes connexes devient identique pour les deux champs.

On s'intéresse maintenant à la taille moyenne des composantes connexes ;  $mcc$  est la moyenne des tailles des  $ncc$  composantes connexes déterminées préalablement (la taille de chaque composante étant le nombre de sites présents dans la composante). L'évolution de  $mcc$  en fonction du taux initial de contamination est représentée Figures 11 et 12 pour chaque règle d'affectation et pour les champs issus de ces règles d'affectation et les champs ( $C_0$ ) correspondant, à répartition uniforme. D'une part, les tailles moyennes des composantes connexes augmentent avec  $\tau$ , avec toujours la même vitesse de progression relative pour les différentes règles d'affectation ; d'autre part, les graphes de l'évolution de  $mcc$  en fonction de  $\tau$  sont ici à la même échelle pour les deux types de champs et il est difficile de distinguer visuellement les graphes résultant des configurations (C) ou ( $C_0$ ). Nous avons recours à un troisième type de graphe : pour une règle d'affectation fixée, nous représentons l'évolution de  $mcc$  pour les deux champs ; les deux courbes obtenues ne se distinguent alors l'une de l'autre que pour un taux de contamination initiale petit, inférieur à une certaine valeur seuil différant avec la règle d'affectation ; par exemple, dans le cas de la règle d'Ising pour  $\beta = 1$  (Figure 13) on peut différencier les cas pour  $\tau \in [0.02 ; 0.25]$  ; nous remarquons également que l'échelle des ordonnées étant importante, il faut regarder de près les courbes pour  $\tau$  petit ; dans le cas de la Figure 13, les points

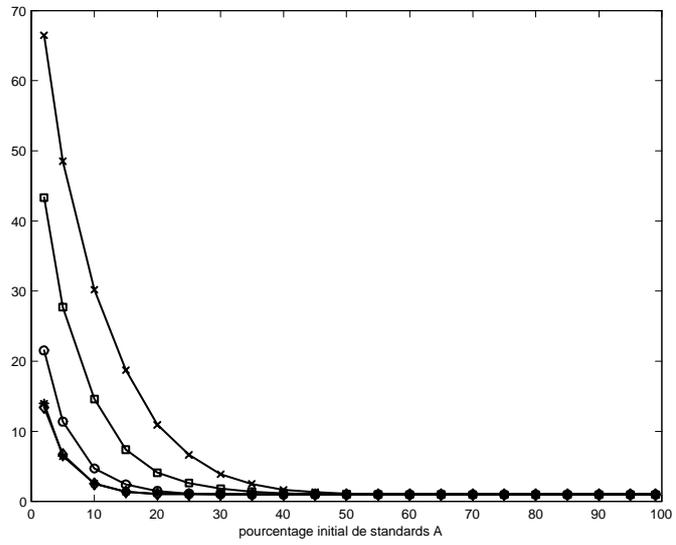


Figure 9: Nombre moyen de composantes connexes pour les champs (C) suivant la règle d'affectation : x : faible ; □ : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ; ◇ : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

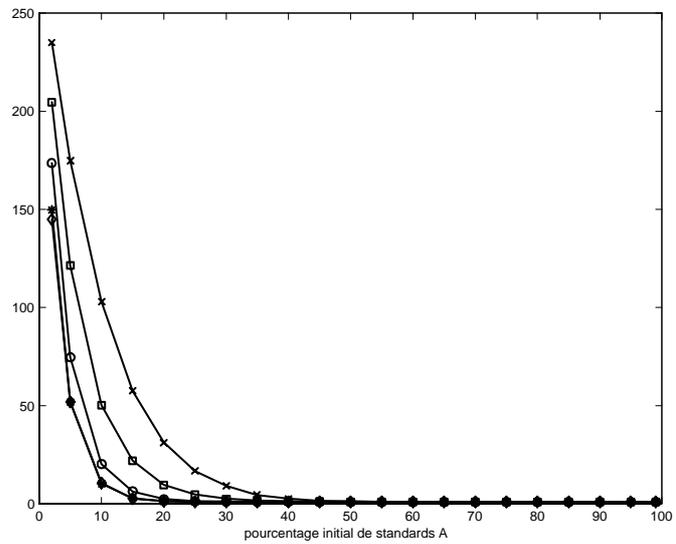


Figure 10: Nombre moyen de composantes connexes pour les champs ( $C_0$ ) associés aux champs (C) : x : faible ; □ : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ; ◇ : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

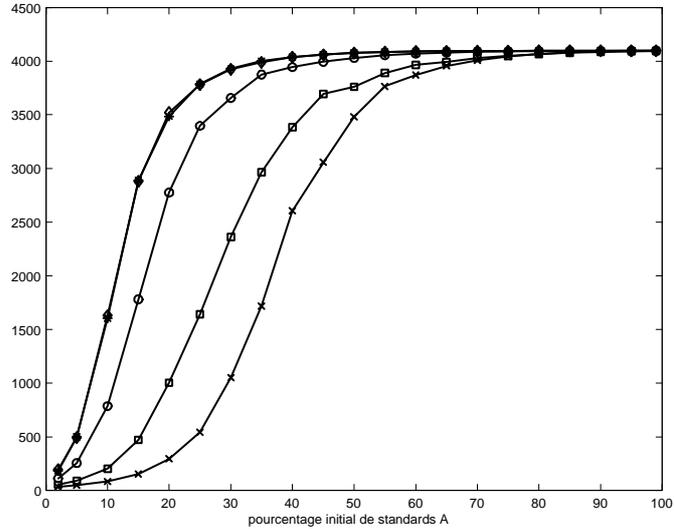


Figure 11: Taille moyenne des composantes connexes pour les champs (C) suivant la règle d'affectation : x : faible ; □ : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ; ◇ : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

des deux courbes d'abscisse  $\tau=2\%$  sont très proches l'un de l'autre, et l'on peut penser que  $mcc$  différencie mal les deux types de champs pour une faible valeur du taux de contamination. Or les valeurs de ces points sont respectivement 114 et 13.8 pour les champs (C) et ( $C_0$ ), c'est à dire que  $mcc(C_0)$  vaut plus de 8 fois  $mcc(C)$ . Ce rapport va ensuite diminuer progressivement, jusqu'à ce que les tailles moyennes des composantes connexes deviennent identiques pour les deux configurations. Il en va de même pour les autres règles. Il en résulte d'une part que  $mcc$  constitue encore un bon critère pour différencier les deux types de configurations pour un faible taux de contamination, d'autre part que l'effet de dumping se ressent davantage pour un taux de contamination initiale bas.

Pour terminer, nous présentons les résultats obtenus avec la taille  $\max cc$  de la plus grande composante connexe. Les figures 14 et 15 donnent les courbes d'évolution de ce paramètre en fonction de  $\tau$  pour les différentes règles d'affectation et pour les deux types de champs ; la figure 16 compare cette évolution pour les deux champs dans le cas de la règle d'Ising avec  $\beta = 1$ . Les commentaires précédents sur  $mcc$  s'appliquent à nouveau ici, et avec encore plus de pertinence. De même que la taille moyenne des composantes connexes, la taille de la plus grande composante augmente avec le pourcentage initial de standards A, mais la croissance de  $\max cc$  est encore plus rapide que celle de  $mcc$ . Les évolutions de ce paramètre sont semblables pour les champs de type (C) et ( $C_0$ ) dès

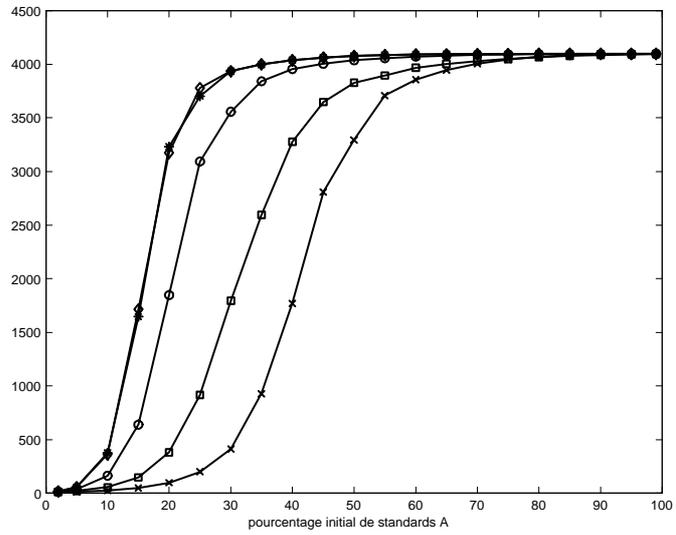


Figure 12: Nombre moyen de composantes connexes pour les champs ( $C_0$ ) associés aux champs (C) : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

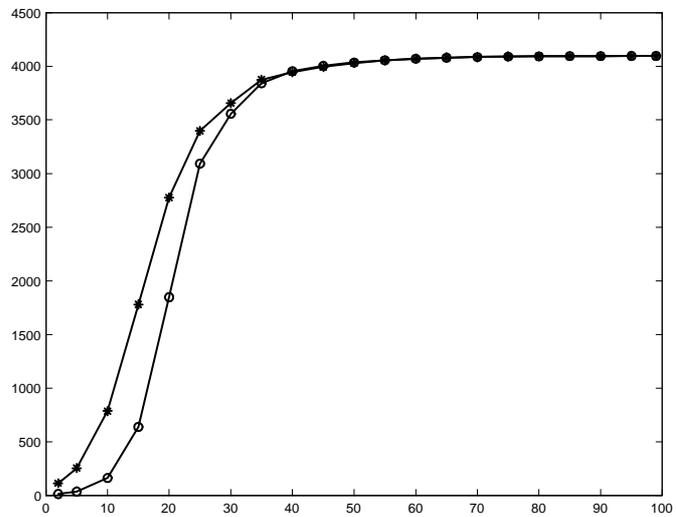


Figure 13: Taille moyenne des composantes connexes pour la règle d'Ising avec  $\beta = 1$  pour les champs (C) et ( $C_0$ ) correspondant. (C) : \* ; ( $C_0$ ) : o

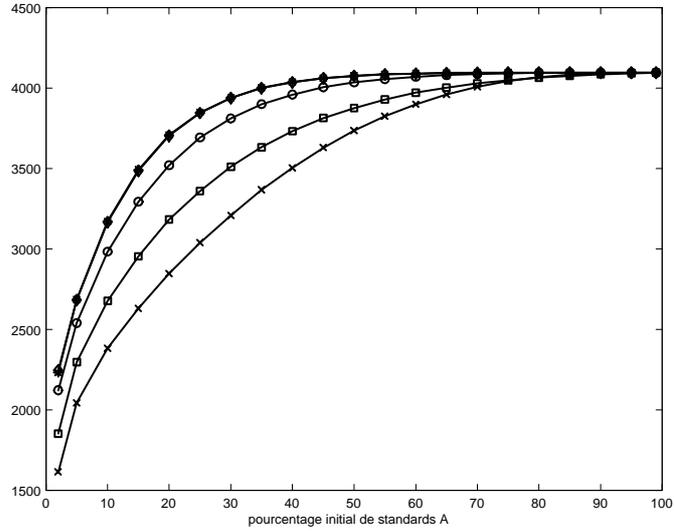


Figure 14: Taille de la plus grande composante connexe pour les champs (C) suivant la règle d’affectation : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

que le taux initial dépasse un certain seuil, par exemple 10% dans le cas de la règle d’Ising avec  $\beta = 1$  (Cf. figure 16). C’est pourquoi ce dernier paramètre de connexité ne paraît pas constituer un bon critère pour différencier les deux types de champs ; il ne montre clairement l’effet d’un dumping que pour les plus petites valeurs du taux initial de contamination. Ceci renforce encore l’idée que cet effet différentiel est plus important pour une contamination faible que pour une contamination élevée.

## 4 Exemples de configurations finales

Nous avons sélectionné neuf règles d’affectation que nous avons voulu raisonnablement représentatives de la diversité des règles. A chaque choix est associée la “paire d’images” (C,C<sub>0</sub>) simulée. On indiquera chaque fois la fréquence finale de standards A ainsi que les différentes caractéristiques présentées au paragraphe précédent ( $\rho_1$ , IA, ncc, mcc, maxcc). D’autres caractéristiques, souvent topologiques, différencient la configuration spatiale associée à une règle de la configuration spatiale au hasard uniforme de même taux. Pour chaque double figure, le champ (C) issu de la procédure d’affectation est à gauche, et le champ (C<sub>0</sub>) correspondant à droite, avec le même nombre de standards A

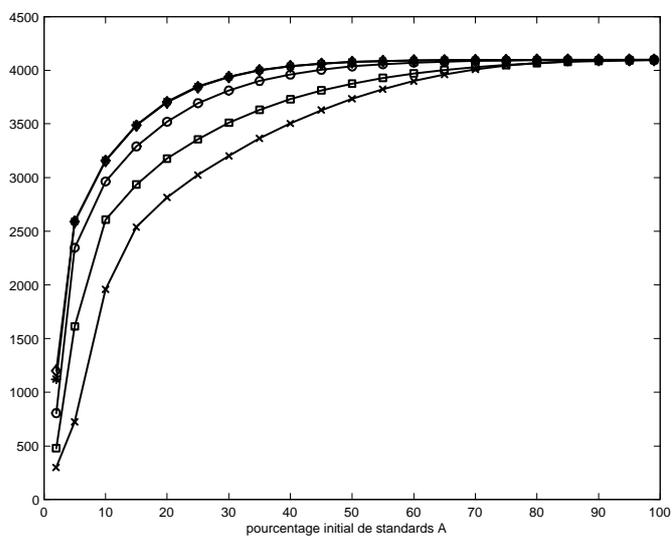


Figure 15: Taille de la plus grande composante connexe pour les champs  $(C_0)$  associés aux champs  $(C)$  : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

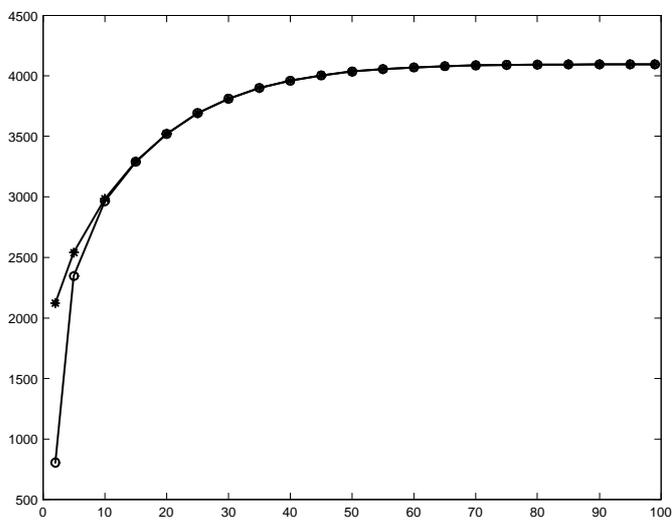


Figure 16: Taille de la plus grande composante connexe pour le champ  $(C)$  et le champ  $(C_0)$  correspondant dans le cas de la règle d'Ising avec  $\beta = 1$ .  $(C)$  : \* ;  $(C_0)$  : o

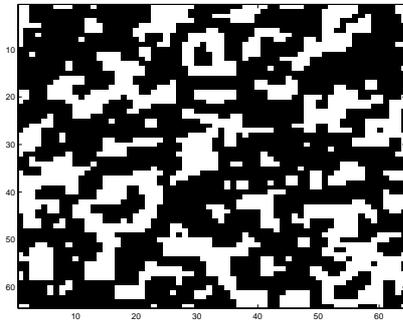
final. Enfin, les pixels noirs représentent les sites où le standard A a été choisi.

## 4.1 Trois règles et un taux initial de contamination de 5%

Nous représentons ci-dessous les deux champs (C) et (C<sub>0</sub>) obtenus pour trois règles d'affectation différentes et pour le même taux initial de dumping de 5%. Nous avons choisi de montrer les deux cas "extrêmes" de règles, les affectations majoritaires forte et faible, ainsi qu'un cas "intermédiaire", la règle d'Ising avec  $\beta = 1$ .

### Règle d'affectation majoritaire forte, taux initial $\tau = 0.05$

Fréquence finale de standards A : 63.67% ;  $IR = 1.3309$



$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.5778, \quad IA = 1.6933, \\ ncc &= 9, \quad mcc = 289.78, \\ maxcc &= 2531 \end{aligned}$$

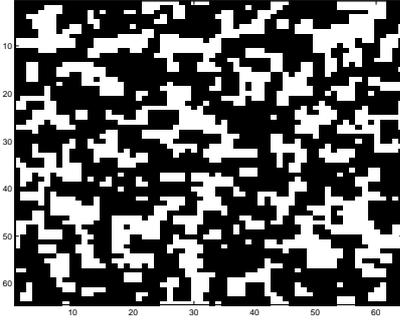


$$\begin{aligned} \rho_1 &= -0.0016, \quad IA = 1.2722, \\ ncc &= 48, \quad mcc = 54.33, \\ maxcc &= 2483 \end{aligned}$$

La fréquence finale de A pour chaque configuration spatiale est déjà de 64%. Les répartitions des deux champs (C) et (C<sub>0</sub>) se différencient fondamentalement par leur corrélation spatiale, par leur nombre et la taille moyenne de leur composantes connexes, mais aussi par leur indice d'agrégation IA. Par contre, la taille de la plus grande composante connexe n'est pas un bon indicateur. D'autres indicateurs topologiques sont fortement discriminants, comme, par exemple, la forme d'une composante connexe, compacte pour (C), filiforme pour (C<sub>0</sub>).

### Règle d'affectation Ising avec $\beta = 1$ , taux initial $\tau = 0.05$

Fréquence finale de standards A : 63.04% ;  $IR = 1.2856$



$$\rho_1=0.4829, IA = 1.6177,$$

$$ncc = 9, mcc = 286.89,$$

$$maxcc = 2553$$



$$\rho_1=-0.0033, IA = 1.2583,$$

$$ncc = 61, mcc = 42.33,$$

$$maxcc = 2465$$

La fréquence finale de standards A est un peu moins élevée que dans le cas précédent. On retrouve ici les mêmes caractéristiques que pour la règle majoritaire forte : à nouveau, la corrélation spatiale, l'indicateur absolu d'agrégation, le nombre et la taille moyenne des composantes connexes différencient bien les deux configurations (C) et (C<sub>0</sub>). De plus, si on compare maintenant les configurations d'un même type de champ pour les deux règles, visuellement, les configurations (C<sub>0</sub>) semblent similaires, tandis que l'agglomération des standards A pour le champ (C) et la règle d'Ising est moins accentuée dans le cas de l'affectation majoritaire forte ; les contours des composantes connexes sont plus découpés.

#### Règle d'affectation majoritaire faible, taux initial $\tau = 0.05$

Fréquence finale de standards A : 54.86% ; IR = 1.2270



$$\rho_1=0.2823, IA = 1.3520,$$

$$ncc = 59, mcc = 38.08,$$

$$maxcc = 2132$$



$$\rho_1=0.0053, IA = 1.1019,$$

$$ncc = 185, mcc = 12.15,$$

$$maxcc = 268$$

La configuration du champ (C) est bien différente de celles des deux exemples précédents ; d'une part, le taux final de standards A est moindre, d'autre part, l'organisation en clusters est moins prononcée. Si l'image semble s'apparenter à celle du champ (C<sub>0</sub>) correspondant, on observe cependant que tous les paramètres différencient clairement les

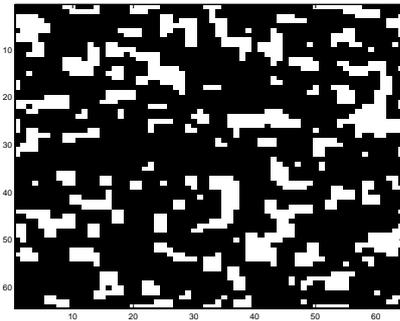
deux types de champ, y compris  $\max cc$ .

## 4.2 Trois règles et un taux initial de contamination de 10%

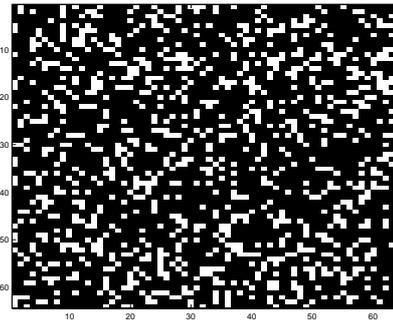
Nous augmentons le taux initial de contamination à 10%. A nouveau, nous présentons les deux règles extrêmes, et celle de la règle d'Ising avec  $\beta = 0.5$ .

**Règle d'affectation majoritaire forte, taux initial  $\tau = 0.10$**

Fréquence finale de standards  $A$  : 75.78% ;  $IR = 1.1668$



$\rho_1=0.5364$ ,  $IA = 1.7755$ ,  
 $ncc = 4$ ,  $mcc = 776$ ,  
 $\max cc = 3101$



$\rho_1=0.0123$ ,  $IA = 1.5216$ ,  
 $ncc = 10$ ,  $mcc = 310.4$ ,  
 $\max cc = 3093$

Par rapport au taux de contamination de 5%, les indicateurs de connexité sont moins performants pour distinguer les champs de type (C) et (C<sub>0</sub>) ;  $\max cc$  n'est plus discriminant ;  $ncc$  et  $mcc$  sont encore différentiant, mais leur écart est moindre. De même, les valeurs des indicateurs d'agrégation se rapprochent. Par contre, la corrélation spatiale reste fondamentalement différente dans les deux cas.

**Règle d'affectation Ising avec  $\beta = 0.5$ , taux initial  $\tau = 0.10$**

Fréquence finale de standards  $A$  : 65.80% ;  $IR = 1.2014$



$\rho_1=0.3578, IA = 1.5607,$   
 $ncc = 12, mcc = 224.58,$   
 $maxcc = 2676$

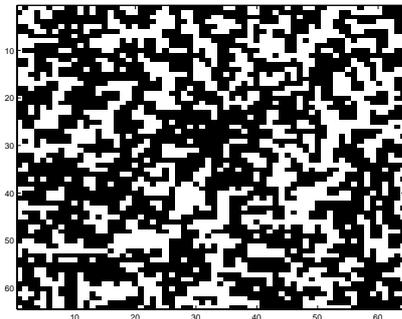


$\rho_1=-0.0246, IA = 1.2991,$   
 $ncc = 64, mcc = 42.11,$   
 $maxcc = 2564$

Dans le cas de la règle d'Ising avec  $\beta = 0.5$ , la progression est moins rapide. Le taux final de standards est inférieur de 10% et la répartition en agrégats s'ébauche. Les rapports entre les indicateurs de connexité sont plus grands,  $maxcc$  excepté ; par exemple, le nombre de composantes connexes du champ ( $C_0$ ) est plus de cinq fois plus élevé que celui du champ ( $C$ ).

#### Règle d'affectation majoritaire faible, taux initial $\tau = 0.10$

Fréquence finale de standards  $A : 58.89\% ; IR = 1.2310$



$\rho_1=0.3087, IA = 1.4316,$   
 $ncc = 24, mcc = 100.5,$   
 $maxcc = 2272$



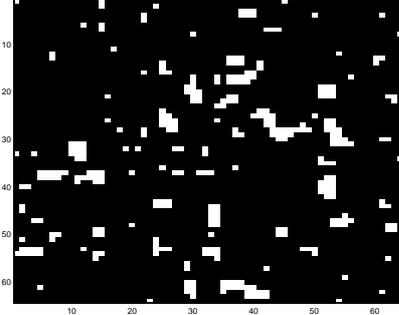
$\rho_1=-0.0180, IA = 1.1629,$   
 $ncc = 128, mcc = 18.84,$   
 $maxcc = 1837$

Le taux final de standards  $A$  est encore inférieur à 60%. Si visuellement les configurations apparaissent plus semblables, tous les paramètres sont discriminants pour différencier les deux types de champs.

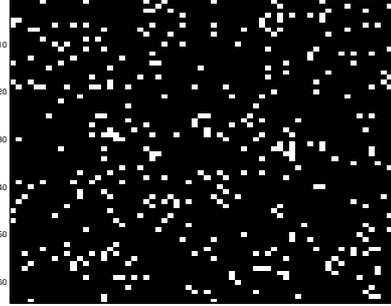
### 4.3 Trois règles et un taux initial de contamination de 20%

**Règle d'affectation majoritaire forte, taux initial  $\tau = 0.20$**

Fréquence finale de standards  $A$  : 89.87% ;  $IR = 1.0504$



$\rho_1=0.4369$ ,  $IA = 1.8859$ ,  
 $ncc = 1, mcc = 3681$ ,  
 $maxcc = 3681$

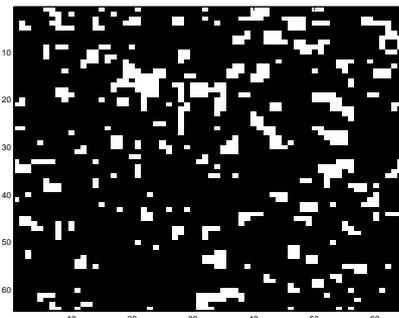


$\rho_1=-0.0095$ ,  $IA = 1.7954$ ,  
 $ncc = 2, mcc = 1840.5$ ,  
 $maxcc = 3680$

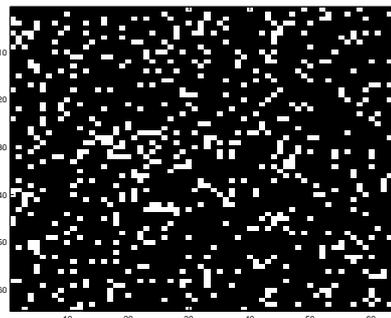
On observe ici que dès que le pourcentage final de standards  $A$  devient très élevé, les indicateurs de connexité ne sont plus guère utiles. Cette réalisation particulière de  $(C_0)$  ne comporte plus que deux composantes connexes ; d'autres pourront en avoir un peu plus (4 ou 5), ou bien une seule. De même, les indicateurs d'agrégation ont des valeurs proches ( $IA = 1.05$ ), et le seul paramètre distinguant vraiment bien les deux configurations est la corrélation spatiale.

**Règle d'affectation Ising avec  $\beta = 1$ , taux initial  $\tau = 0.20$**

Fréquence finale de standards  $A$  : 85.64% ;  $IR = 1.0698$



$\rho_1=0.4221$ ,  $IA = 1.8341$ ,  
 $ncc = 1, mcc = 3508$ ,  
 $maxcc = 3508$



$\rho_1=0.0051$ ,  $IA = 1.7144$ ,  
 $ncc = 1, mcc = 3508$ ,  
 $maxcc = 3508$

Bien que la fréquence finale de standards  $A$  soit moins élevée que dans le cas précédent de la règle d'affectation majoritaire forte, les indicateurs de connexité sont ici exactement

égaux et ne différencient donc pas les champs (C) et (C<sub>0</sub>). A nouveau, c'est la corrélation spatiale qui va être le paramètre discriminant des configurations.

**Règle d'affectation majoritaire faible, taux initial  $\tau = 0.20$**   
Fréquence finale de standards A : 70.90% ; IR = 1.1217



$\rho_1 = 0.2894$ ,  $IA = 1.5864$ ,  
 $ncc = 6$ ,  $mcc = 484$ ,  
 $maxcc = 2897$



$\rho_1 = -0.0064$ ,  $IA = 1.4143$ ,  
 $ncc = 34$ ,  $mcc = 85.41$ ,  
 $maxcc = 2856$

Dans le cas de la règle majoritaire faible, pour un taux de contamination initiale de 20%, le taux de progression du nombre final de standards A est beaucoup moins rapide que pour les autres règles d'affectation ; par conséquent, tous les paramètres sont utiles pour décrire les deux configurations issues des champs (C) et (C<sub>0</sub>).

## 5 Loi du nombre de voisins occupés du site visité à l'instant k

On peut mener quelques calculs dans ce cadre non asymptotique. Nous nous intéressons à la visite d'un site fixé au cours du balayage ; quelle que soit la règle d'affectation, le choix réalisé par l'agent à ce site dépend du nombre de voisins ayant déjà opéré leur choix. Nous déterminons la loi de ce nombre de voisins "occupés" à cet instant.

On considère le réseau  $S$  à  $n$  sites tel que chaque site a le même nombre  $\nu$  de voisins ; par exemple,  $S$  est  $Z^2$  avec la relation de voisinage aux quatre plus proches voisins, ou bien un réseau hexagonal avec la relation des six plus proches voisins ; à l'instant  $k = 0$ ,  $n_\tau$  sites sont occupés par le standard A ( $n_\tau = n\tau$  où  $\tau$  est le taux de contamination initiale) ; puis à chaque instant, un site libre est visité puis occupé de façon aléatoire. Il y a donc  $n - n_\tau$  occupations successives. Pour un site arbitraire mais fixé, on définit la variable aléatoire  $Y_k$  égale au nombre de voisins de ce site occupés à l'instant  $k$ . On suppose que  $n_\tau < n$ ,  $n \gg 2\nu + 1$  ;  $Y_k$  est à valeurs dans  $\{\max(0, n_\tau + k - n + \nu), 1, \dots, \min(\nu, k - 1 + n_\tau)\}$ . A

l'instant  $k$  d'occupation du site considéré, la configuration comporte outre ce site,  $n_\tau + k - 1$  sites déjà occupés et  $n - k - n_\tau$  sites libres. On a donc

$$P(Y_k = l) = \frac{C_\nu^l C_{n-1-\nu}^{k-1+n_\tau-l}}{C_{n-1}^{k-1+n_\tau}}$$

La loi du nombre de voisins occupés à un instant donné  $k$  suit donc une loi hypergéométrique.

On peut compléter ce résultat par deux calculs simples des probabilités des évènements suivants :

$A_k$  : "Le site  $j$  est occupé exactement à l'instant  $k$ "

$B_k$  : "Le site  $j$  est déjà occupé à l'instant  $k$ "

L'indice  $j$  n'apparaît pas dans ces probabilités puisque le chemin d'occupation est aléatoire ; ces probabilités ne dépendent donc que de  $n$  et de  $k$ .

$$P(A_k) = \begin{cases} (1 - \frac{n_\tau}{n})(1 - \frac{1}{n-n_\tau})(1 - \frac{1}{n-n_\tau-1}) \dots (1 - \frac{1}{n-n_\tau-k+2}) \frac{1}{n-n_\tau-k+1} = \frac{1}{n} & \text{si } k \geq 1 \\ \frac{n_\tau}{n} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

$$\text{On en déduit } P(B_k) = \frac{n_\tau + k - 1}{n}.$$

Déterminons alors la probabilité moyenne  $P_l$  du nombre de voisins occupés au cours du temps.

$$\begin{aligned} P_l &= \frac{1}{n-n_\tau} \sum_{k=1}^{n-n_\tau} P(Y_k = l) = \frac{1}{n-n_\tau} \sum_{k=1}^{n-n_\tau} \frac{C_\nu^l C_{n-1-\nu}^{k-1+n_\tau-l}}{C_{n-1}^{k-1+n_\tau}} \\ &= \frac{C_\nu^l (n-1-\nu)!}{(n-n_\tau) \cdot (n-1)!} \sum_{k=1}^{n-n_\tau} \sum_{s=1}^{n-k-n_\tau} (k+n_\tau-s) \sum_{u=0}^{n-k-n_\tau-u} 1 \end{aligned}$$

Notons  $N_\tau = n - n_\tau = n(1 - \tau)$  le nombre de sites non initialisés.

$$P_l = \frac{C_\nu^l N_\tau^\nu}{(n-1)(n-2)\dots(n-\nu)} \cdot \frac{1}{N_\tau} \sum_{k=1}^{N_\tau} \sum_{s=1}^{N_\tau-k} \left( \frac{k}{N_\tau} + \frac{\tau}{1-\tau} - \frac{s}{N_\tau} \right) \sum_{u=0}^{N_\tau-k-s} 1$$

$l$  et  $\nu - l$  étant fixes, on trouve lorsque le nombre de sites croît vers l'infini :

$$P \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C_\nu^l (1-\tau)^\nu \int_0^1 \left( x + \frac{\tau}{1-\tau} \right)^l (1-x)^{\nu-l} dx.$$

Si le taux initial de contamination est nul, alors la limite de  $P_0$  est  $\frac{1}{\nu+1}$ . Sinon, on obtient par intégrations successives  $P_l \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C_\nu^l (1-\tau)^\nu \prod_{k=0}^l \frac{l!}{(l-k)!} \left( \frac{\tau}{1-\tau} \right)^{l-k} \frac{(\nu-l)!}{(\nu-l+1+k)!}$  ou encore



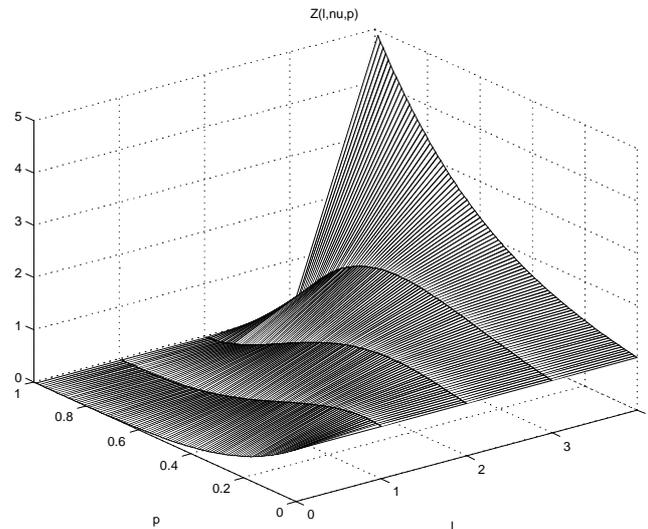


Figure 17: Evolution de  $Z_{l,\nu,\tau}$  en fonction de  $l$  et de  $\tau$  pour  $\nu = 4$

le même pourcentage final de standards  $A$  ; parmi les paramètres que nous avons étudiés, la corrélation spatiale évolue très différemment dans un cas ou dans l'autre ; elle diffère de par sa valeur et de par son évolution lorsque le taux de contamination initiale varie, et ce pour toute valeur du taux de dumping. Si nous avons privilégié la corrélation spatiale à distance 1, les autres corrélations spatiales sont aussi discriminantes.

Les indicateurs d'agrégation et de connexité sont utiles à la discrimination des types de champs pour de petites valeurs du taux de contamination initiale ; on retrouve là encore que l'effet différentiel du dumping est plus important pour de petites valeurs de ce dumping ; les indicateurs d'agrégation comme ceux basés sur la connexité diffèrent essentiellement pour une faible contamination initiale. Pour des dumpings plus importants, on pourra continuer à utiliser ces indicateurs ou non suivant la règle d'affectation en usage ; plus celle-ci est "faible" et plus les paramètres diffèrent de la situation dumping avec règle d'affectation locale à celle de la configuration aléatoire uniforme.

Cette étude peut être complétée sur de multiples points. Par exemple, en changeant la géométrie du réseau et examiner le cas d'un réseau triangulaire ou hexagonal. Ou bien, en modifiant la relation de voisinage (en passant par exemple de quatre à huit voisins). Ou encore initialiser la configuration avec les deux standards, présents en deux proportions différentes. Nous pensons que ce type d'altérations du modèle n'entraînera pas de modification substantielle dans les résultats obtenus. Une autre situation intéressante est de

faire intervenir dans la procédure de choix l'information privée de l'agent, en substituant à  $\beta$  dans la règle d'Ising le double paramètre  $\alpha + 2\beta \neq 0$ , où  $\alpha$  fait référence à l'agent lui-même et  $\beta$  contrôle toujours l'influence de ses voisins. Ces généralisations ouvrent la porte à d'autres questions et doivent faire l'objet d'une autre étude.

## References

- [1] Arthur W.B., 1989, Competing technologies, increasing returns, and lock-in by historical events. *The economic journal*, 99, 116-131
- [2] Banerjee A.V. A simple model of herd behaviour, 1992, *The quarterly journal of economics*, Vol. CVII.
- [3] Besag J., 1974, Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems, *JRSS B*, 36, 192-236
- [4] J. Besag and P.A.P. Moran, On the estimation and testing of spatial interaction for Gaussian lattice processes, *Biometrika*, 62, 3, 555-562, 1975
- [5] Bikhchandani S., Hirshleifer D., Welch I., 1992, A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades. *Journal of political economy*, Vol. 100 n°5
- [6] Bikhchandani S., Hirshleifer D., Welch I., 1998, Learning from the behaviour of others: conformity, fads, and informational cascades. *Journal of economic perspectives* Vol 12 n°3
- [7] Chopard B., Dupuis A., Masselot A., Luthi P., 2002, Cellular automata and lattice Boltzmann techniques : an approach to model and simulate complex systems. *Adv. Complex systems* 5 Vol 2-3, 103-246.
- [8] A.D. Cliff and J.K. Ord, *Spatial autocorrelation*, Pion, Londres, 1981, 2d. Ed.
- [9] Cox J.T., 1989, Coalescing random walks and voter model consensus times on the torus  $Z^d$ , *Ann. Proba.*, Vol. 17, n°4, 1333-1366
- [10] Galam S. 1997, Rational group decision making: a random field ising model at  $T=0$ . *Physica A* 238. 66-80.
- [11] Galam S., Chopard B., Masselot A., Droz M. Competing species dynamics: qualitative advantage versus geography.

- [12] Geman D. et Geman S., 1984, Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, IEEE-PAMI, 6, 721-741
- [13] Geman D., 1990, Random fields and inverse problem in imaging, Ecole de Saint Flour, Lect. Notes in Maths. n°1427, Springer
- [14] Guyon X., 1995, Random fields on a network : modeling, statistics and applications, Springer
- [15] Guyon X. et Hardouin C., 2001, Standards adoption dynamics and tests for non spatial coordination, Lecture Notes in Statistics 159, 39-56, Springer
- [16] Marengo L. Knowledge distribution and coordination in organisations. in Trust and economic learning. Lazaric et Lorenz Eds. Cheltenham, UK & Northampton, Ass. : Elgar ; distributed by meriacn International Distribution Corporation, Wiliston, Vt., 227-46.
- [17] Orléan A., 1998, Informational influences and the ambivalence of imitation. Lesourne & Orléan Eds. Advances in self organization and evolutionary economics. 39-56. *Economica*.
- [18] Lesourne & Orléan Eds. Advances in self organization and evolutionary economics : Introduction. 1-7. *Economica*.
- [19] Orléan A., 1998, The evolution of imitation. Contribution to The economics of networks : interaction and behaviours. Springer-Verlag.
- [20] Phan D., Beugnard A., (2001) "Moduleco, a multi-agent modular framework, for the simulation of network effects and population dynamics in social sciences, market & organisations" ; 8° Rencontre Internationale ACSEG (Approches Connexionnistes en Sciences Economiques et de Gestion), Université de Rennes, IGR 22-23 novembre.
- [21] Paulré B., 1997, Evolutionisme contemporain et auto-organisation, *Economie appliquée* Tome L n°3, 121-150
- [22] Steyer A., Zimmermann J-B., 1996, Externalités de réseau et adoption d'un standard dans une structure résiliaire. *Revue d'économie industrielle*, n°76.
- [23] Weisbuch G., Stauffer D., 2000, Hits and flops dynamics. Economic dynamics from the physics point of view. *Physica A*. n°3 – 4. pp. 563 – 576.