

Caractérisation de crises financières à l'aide de modèles hybrides (HMC-MLP)*

Bertrand Maillet[†] Madalina Olteanu[‡] Joseph Rynkiewicz[§]

- Mars 2004 -

Abstract

Les marchés financiers sont souvent le lieu de violentes turbulences des cours et un indice de crise - appelé IMS (Index of Market Shocks, voir Maillet et Michel, 2002) - a été récemment introduit pour tenter de quantifier les turbulences de marchés se produisant à l'occasion de ces crises financières.

La volatilité conditionnelle des rentabilités boursières (voir Hamilton, 1994), tout comme les crises bancaires et financières du siècle dernier (Coe, 2002) ont déjà été représentées à l'aide de modèles à changements de régimes. Par ailleurs, la modélisation via des perceptrons multi-couches et chaînes de Markov cachées a été utilisée dans l'étude de phénomène de pics de pollution (voir Rynkiewicz, 2000), partageant a priori quelques similitudes avec les phénomènes de crises observées sur les marchés financiers.

L'objet du présent article est de fournir une description modélisée du comportement de l'indicateur IMS, calculé sur le marché français (CAC40 en haute fréquence, 1995-2004), en essayant de caractériser la présence de régimes dans la série. Nous commençons par étudier une série d'IMS à l'aide de modèles auto-régressifs simples, puis à l'aide d'un modèle hybride intégrant des perceptrons multi-couches et des chaînes de Markov cachées.

Mots clefs : crises financières, réseaux de neurones, chaîne de Markov, changements de régimes.

Classification J.E.L. : G.10, G.14.

*Nous remercions Thierry Michel pour la construction de la base utilisée dans l'article. Nous le remercions aussi, ainsi qu'Emmanuel Jurczenko, Mikael Rockinger et les participants à la conférence de l'ACSEG03 (Nantes, Novembre 2003) pour leurs commentaires et suggestions. Nous restons responsables des erreurs et omissions qui subsisteraient dans l'article.

[†]TEAM/CNRS - Université Paris-1 (Panthéon-Sorbonne), ESCP-EAP et A.A.Advisors (ABN-Amro Group).
Correspondance : Bertrand Maillet, MSE, TEAM/CNRS, 106-112 Bd de l'Hôpital F-75647 Paris Cedex 13. Tel: 01 44 07 82 68/70 (facsimile). E-mail: bmaillet@univ-paris1.fr.

[‡]SAMOS-MATISSE - University Paris-1 (Panthéon-Sorbonne). E-mail: Madalina.Olteanu@univ-paris1.fr.

[§]SAMOS-MATISSE - University Paris-1 (Panthéon-Sorbonne). E-mail: rynkiewi@univ-paris1.fr.

Caractérisation de crises financières

à l'aide de modèles hybrides (HMC-MLP)

- Mars 2004 -

Abstract

Les marchés financiers sont souvent le lieu de violentes turbulences des cours et un indice de crise - appelé IMS (Index of Market Shocks, voir Maillet et Michel, 2002) - a été récemment introduit pour tenter de quantifier les turbulences de marchés se produisant à l'occasion de ces crises financières.

La volatilité conditionnelle des rentabilités boursières (voir Hamilton, 1994), tout comme les crises bancaires et financières du siècle dernier (Coe, 2002) ont déjà été représentées à l'aide de modèles à changements de régimes. Par ailleurs, la modélisation via des perceptrons multi-couches et chaînes de Markov cachées a été utilisée dans l'étude de phénomène de pics de pollution (voir Rynkiewicz, 2000), partageant a priori quelques similitudes avec les phénomènes de crises observées sur les marchés financiers.

L'objet du présent article est de fournir une description modélisée du comportement de l'indicateur IMS, calculé sur le marché français (CAC40 en haute fréquence, 1995-2004), en essayant de caractériser la présence de régimes dans la série. Nous commençons par étudier une série d'IMS à l'aide de modèles auto-régressifs simples, puis à l'aide d'un modèle hybride intégrant des perceptrons multi-couches et des chaînes de Markov cachées.

Caractérisation des crises financières à l'aide de modèles hybrides (*HMC-MLP*)

1 Introduction

Les marchés financiers sont le lieu de violents mouvements qui font régulièrement l'actualité de la presse économique. Qu'il s'agisse de la Grande Dépression des années trente, du krach violent d'octobre 1987, de la chute brutale des cours suite aux attaques terroristes du 11 septembre 2001, de la lente dégradation de forte ampleur du second semestre 2002, les marchés financiers sont passés par des fortes turbulences depuis leur création.

Néanmoins, caractériser les formes de ces turbulences - violentes et de courtes durées *versus* étalées dans le temps et de durées plus longues, et fournir une mesure objective de leurs conséquences financières et réelles, restent un exercice délicat qui se résume souvent à une analyse *post-mortem* au final peu utile. Récemment, un indicateur de crise (*Index of Market Shocks*, voir Maillet et Michel, 2002) a été proposé pour traduire de manière simple la turbulence des marchés. Fondé sur l'approche originale de Zumbach *et alii* (2000-a et 2000-b) sur le marché des changes, l'indicateur *IMS* est une mesure multi-échelle de risque qui s'inspire d'une analogie avec l'échelle de Richter couramment utilisée pour caractériser l'importance des tremblements de terre. Il représente la probabilité d'occurrence d'un vecteur de volatilités débruitées, calculées sur différentes échelles de temps, de manière à rendre compte de l'hétérogénéité des agents financiers et de leurs perceptions différentes des mouvements de prix. Maillet et Michel (2003) montrent que l'indicateur *IMS* est relativement robuste aux hypothèses utilisées pour sa construction (*Cf.* encadré 2 *infra*), ce qui autorise des comparaisons historiques et des mises en perspective des différentes crises. Reste cependant à définir précisément une crise financière au sens de la mesure présentée. Maillet et Michel (2002)

proposent une définition d'une crise financière quand l'indicateur *IMS* franchi à la hausse la valeur arbitraire de 3, qui correspond approximativement à la valeur du dernier décile de l'indicateur calculé sur les échantillons français et américains étudiés. Cette valeur seuil a un caractère *ad hoc* certain, et une caractérisation endogène plus fine reste à fournir. C'est le principal objet du présent article.

Les travaux pionniers d'Engle (1982) et de Bollerslev (1986) sur la volatilité conditionnelle ont été suivis par de nombreux développements des modèles ARCH. Un courant de la littérature sur ces modèles fait clairement apparaître soit l'existence de régimes (par exemple dans le modèle *SWARCH* de Hamilton et Susmel, 1994) ou de seuils (par exemple dans le modèle *TARCH* de Rabemananjara et Zakoian, 1993), avec des transitions ou franchissements plus ou moins doux (voir par exemple le modèle *ANST-GARCH* d'Anderson *et alii*, 1996). La volatilité - mesure traditionnelle du risque financier - se prête ainsi bien à ce type de modélisation. Par ailleurs, le paroxysme du risque est atteint pendant les crises financières et c'est aussi un modèle à changement de régimes que choisit Coe (2002) pour étudier l'histoire mouvementée du monde bancaire américain au siècle dernier. Enfin, certaines crises financières ont ceci de particulier que leurs amplitudes sont hors de proportions par rapport aux événements rythmant la vie quotidienne des marchés. Une telle démesure s'accomode donc facilement avec une représentation à plusieurs régimes : un régime exceptionnel - qui régit les événements extrêmes, et un régime (ou plusieurs) qui correspond(ent) aux évolutions "normales" des marchés. On retrouve ici *a priori* quelques similitudes avec d'autres phénomènes de "pics", étudiés en utilisant des modèles hybrides (voir l'étude de pics de pollution dans Rynkiewicz, 2000).

La distinction endogène des épisodes de turbulence de marchés est importante à plusieurs points. Une caractérisation fine des crises et du risque systémique permettrait un meilleur contrôle de leurs évolutions : les acteurs de marchés et les autorités de tutelle sachant

mieux distinguer les crises, les mesures préventives et curatoires pourraient être mieux proportionnées. Une mesure plus fine du risque systématique peut aussi jouer un rôle dans une meilleure optimisation des choix micro-économiques d'allocation stratégique et tactique. Si la relation de long-terme entre risque et rendement est effectivement inversée pendant les périodes de crises financières, les conclusions à en tirer en terme d'optimisation de portefeuille ne sont pas négligeables. Enfin, plusieurs auteurs (voir par exemple Sornette *et alii*, 2003) ont mis en avant la distinction entre crises endogènes et crises exogènes. Une caractérisation par états des crises financières peut servir de première étape à une classification - exogène *versus* endogène - des chocs de marché. Il est en effet intuitif de considérer que certaines crises sont purement imprévisibles (la crise de septembre 2001 liée aux attaques terroristes par exemple), tandis que d'autres épisodes de turbulences pourraient avoir été précédés de signes larvés de krach éminent.

Le présent article est organisé comme suit. Après avoir décrit certaines caractéristiques de la série d'*IMS* hebdomadaire, calculés à partir de quotations intra-journalière sur la série de l'indice CAC40 (indice relatif à l'évolution des principales actions du marché français) à l'aide de modèles linéaires et non-linéaires simples, nous cherchons à caractériser l'indice de crise en utilisant un modèle un modèle hybride intégrant des perceptrons multi-couches et des chaînes de Markov cachées. L'ajustement aux données, les qualités de prévisions et l'étude de la séparation des états - crises *versus* accalmies - sont ensuite proposées. La conclusion résume les résultats obtenus et propose de nouvelles pistes de recherche concernant l'étude de la variabilité du risque systématique.

2 Modèles auto-régressifs et changements de régimes markoviens

L'analyse visuelle des chroniques de prix boursiers, considérées sur des longues périodes de temps, conduit à remarquer des ruptures importantes dans le comportement des séries. Ces ruptures sont souvent dues à de multiples raisons, comme, sans souci d'exhaustivité, de grandes faillites, des moments de doutes voire de paniques sur les marchés, des mauvaises nouvelles non-anticipées, des changements politiques, des guerres ou des crises de liquidité. Pour rendre compte de ces changements de structure des séries, l'utilisation des chaînes de Markov cachées a souvent été employée.

Le modèle canonique des chaînes de Markov cachées peut se présenter simplement de la manière suivante (voir Hamilton, 1994). Considérons $\{y_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ les valeurs de la série observée et $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ une chaîne de Markov homogène, définie par l'espace de ses états \mathbf{e}_i , $i = [1, \dots, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, et par la matrice de transition \mathbf{A} dont les éléments a_{ij} correspondent aux probabilités de transition d'un état vers un autre, soient pour $[i, j] = [1, \dots, N]^2$, $a_{ij} = P[\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{e}_i | \mathbf{X}_t = \mathbf{e}_j]$. En supposant, sans perte de généralité, que l'espace d'états de la chaîne est la base canonique de \mathbb{R}^N et en posant $\mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{X}_{t+1} - E[\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t]$, un modèle auto-régressif à changements de régime markoviens s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t + \mathbf{v}_{t+1} \\ y_{t+1} = F_{\mathbf{X}_{t+1}}(\mathbf{Y}_{t,t-p+1}) + \sigma_{\mathbf{X}_{t+1}} \varepsilon_{t+1} \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathbf{Y}_{t,t-p+1} = [y_t \ \dots \ y_{t-p+2} \ y_{t-p+1}]$ est le vecteur des valeurs retardées de la série observée $\{y_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, $F_{\mathbf{X}_{t+1}} \in \{F_{\mathbf{e}_1}, \dots, F_{\mathbf{e}_N}\}$ est une fonction auto-régressive d'ordre p associée à l'état \mathbf{e}_i , et $\sigma_{\mathbf{X}_{t+1}} \in \{\sigma_{\mathbf{e}_1}, \dots, \sigma_{\mathbf{e}_N}\}$ est un réel strictement positif dépendant de l'état \mathbf{e}_i ; les résidus $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ sont supposés être indépendants et identiquement distribués selon une loi normale

standardisée. Le modèle ci-dessus peut être schématisé comme dans l'encadré 1.

- Insérer l'encadré 1 quelque part par ici -

Une étude d'Hamilton (1989) sur la croissance du PIB aux États-Unis est une des premières applications des modèles *HMC* (*Hidden Markov Chain*), la série étant supposée caractérisée par un mélange de processus AR classiques. Une extension de ce modèle avec des fonctions autorégressives non linéaires - comme le cadre d'un perceptron multicouches - est immédiate (voir Rynkiewicz, 2000). Nous présentons dans la suite de ce document, l'étude de plusieurs hypothèses pour représenter le comportement de la série d'*IMS* étudiée.

3 Etude de la série d'*IMS* sur le marché action mondial

L'*IMS* proposée par Maillet et Michel (2002) représente la probabilité d'observer un niveau de turbulence sur le marché financier. L'encadré 2 rappelle succinctement la méthode de construction de l'indicateur.

- Insérer l'encadré 2 quelque part par ici -

L'étude des récentes crises financières repose dans ce texte sur le calcul d'un *IMS* hebdomadaire (fin de semaine), fondé sur les valeurs de l'indice CAC40 (principal indice français du marché actions publié par *Euronext*), sur la période courant du 18 Avril 1995 au 12 Janvier 2004 (soient 216 996 observations intra-journalières donnant lieu au calcul de 460 *IMS* hebdomadaires calculés tous les vendredis).¹

¹Afin d'éviter les problèmes numériques, les données ont été préalablement centrées et réduites.

3.1 Le modèle linéaire ($ARMA(p, q)$)

La série d'*IMS* étant fortement autocorrélée (voir l'encadré 3 pour une synthèse des principales caractéristiques de la série) - du fait de la redondance des informations prises en compte dans les calculs successifs des *IMS* et de l'autoregressivité des variances conditionnelles généralement constatées, nous présentons ci-après les résultats de la recherche par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance du meilleur ajustement en considérant un modèle autorégressif à moyenne mobile en considérant vingt retards au plus ($ARMA(10, 10)$ pour le moins parcimonieux des modèles).

- Insérer l'encadré 3 quelque part par ici -

Le modèle linéaire optimal au sens du critère *BIC* est un $AR(4)$ dont les résultats d'estimation sont reportés dans l'encadré 4.

- Insérer l'encadré 4 quelque part par ici -

3.2 Le modèle issu d'un perceptron multicouches (*MLP*)

L'utilisation d'un perceptron multicouches permet de prendre en compte d'éventuelle lien non-linéaire entre la variable en t et son passé. La détermination du meilleur modèle au sens du critère *BIC* est obtenu à l'aide de l'algorithme appelé "*Statistical Stepwise*" (voir Cottrell *et alii*, 1995).² Le modèle final retenu a une couche cachée avec quatre unités et cinq paramètres à estimer (voir encadré 5).

- Insérer l'encadré 5 quelque part par ici -

²Le logiciel REGRESS (voir Rynkiewicz, 2000) a été utilisé pour obtenir les résultats présentés dans cette sous-section.

Le modèle non-linéaire présenté dans l’encadré 5 permet d’obtenir une légère amélioration de l’erreur quadratique moyenne par rapport au modèle linéaire de la sous-section précédente (.6163 *versus* .6179 pour le modèle linéaire). Ces résultats en échantillon sont confirmés en dehors de l’échantillon. En effet, en divisant arbitrairement en deux l’échantillon total (350 premières observations dans l’échantillon d’apprentissage sur lequel on estime un modèle $AR(4)$ et le meilleur modèle MLP - de même structure que celle représentée dans l’encadré 5 ; 110 dernières observations pour l’échantillon de test), les erreurs moyennes quadratiques d’ajustement obtenues sont légèrement plus faibles dans le cas du modèle non-linéaire (.5677 contre .6120 pour le modèle linéaire), tout comme les erreurs moyennes quadratiques en dehors de l’échantillon (.7285 *versus* .9124 pour le modèle linéaire). Néanmoins, au sens du critère du BIC , le modèle non-linéaire est dominé le modèle linéaire (-.4169 *versus* -.4414 pour le modèle linéaire) et celui-ci, plus parcimonieux, semble donc dominer le modèle non-linéaire considéré ici. Notons de plus que le modèle MLP retenu conduit à des résidus qui sont fortement autocorrélés (voir l’encadré 5).

3.3 Estimation d’un modèle hybride ($HMC-MLP$)

Après avoir envisagé le cas linéaire des $ARMA$, et un modèle MLP , nous présentons ci-après les résultats obtenus à l’aide d’un modèle hybride intégrant des perceptrons multi-couches et une chaîne de Markov cachée ($HMC-MLP$). L’avantage de ce type modèle, outre la possibilité de prendre en considération des inter-relations non-linéaires complexes, est de permettre d’obtenir une séparation endogène des états du système. Plusieurs architectures - définies à partir du nombres de couches, de retards considérés et des valeurs des paramètres estimés - ont été au final retenues au regard du critère de la trace de la matrice de transition.³

³Plusieurs critères peuvent être retenus pour la sélection du modèle final. Nous avons envisagé par exemple le critère de la plus petite erreur quadratique, mais le modèle obtenu, plus complexe et moins stable

L'estimation des différents modèles hybrides est effectuée avec la méthode du quasi-maximum de vraisemblance en utilisant un algorithme de second ordre (ici l'algorithme de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno ; Cf. Press *et alii*, 1993). Pour éviter la convergence vers des minimas locaux, deux cents initialisations différentes (tirées au hasard selon une loi uniforme $u(-.1, .1)$) ont été effectuées pour chacune des estimations. Les éléments des matrices de transitions initiales sont initialisées à des valeurs identiques et les poids des perceptrons sont quant à eux fixés à 1 au début de l'algorithme pour les retards considérés (et à zéro sinon). Les fonctions d'activation considérées sont des tangentes hyperboliques et les innovations sont supposées être gaussiennes.

Le critère de sélection du modèle est celui de la trace de la matrice de transition (divisée par sa dimension) la plus grande possible⁴. Ce critère permet d'obtenir la "meilleure" des séparations en maximisant les probabilités de rester dans chacun des états cachés. Un modèle à deux experts est retenu et la matrice de transition estimée est :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0.9434 & 0.0776 \\ 0.0566 & 0.9224 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Le premier expert a une couche cachée (et quatre unités) avec un bruit associé de variance .1227 ; le second expert retenu a aussi une couche cachée (et quatre unités) avec une variance associée .9119. On constate donc une variance associée au second état nettement plus forte que celle relative au premier état. L'architecture du modèle retenu est représentée en dehors de l'échantillon (cinq unités cachées - 38 paramètres à estimer), ne permettait pas d'améliorer sensiblement les résultats d'estimation. Le critère de la trace permet - outre la parcimonie du modèle trouvé ici - d'obtenir la "meilleure" des séparations empiriques possibles entre les différents états du marché (crises *versus* périodes de calme). Des essais d'autres types d'architectures - non-reportés ici par souci de concision - ont été tentés (trois états par exemple) sans que les résultats ne soient au final jugés pertinents.

⁴Un premier modèle, maximisant la log-vraisemblance, conduit à considérer trois états. Les résultats de l'analyse des résidus nous ont conduit, par souci de parcimonie, à abandonner ce type de représentation.

schématiquement dans l'encadré 6.

- Insérer l'encadré 6 quelque part par ici -

Pour tester les prévisions obtenues avec ce modèle, une comparaison des erreurs en échantillon et en dehors de l'échantillon est à nouveau effectuée (sur le même principe que celui présenté dans la précédente sous-section). Même si l'erreur quadratique globale est la plus faible (.5549) des différents modèles estimés, l'on obtient une erreur quadratique moyenne de .6169 sur l'ensemble d'apprentissage et de .7830 sur l'ensemble de validation. Ces résultats ne sont donc pas ici meilleurs que ceux fournis par le modèle non-linéaire précédent. Néanmoins, cette représentation à l'aide d'un modèle hybride permet d'obtenir une séparation claire des deux états supposés comme l'illustre le graphique suivant.⁵

- Insérer l'encadré 7 quelque part par ici -

Le graphique dans l'encadré 7 représente la série d'*IMS* et les probabilités conditionnelles correspondant au second expert. Une première analyse visuelle du graphique indique que le second perceptron pourrait correspondre aux périodes de turbulences de marché. En effet, et c'est particulièrement visible sur la première partie et dernière partie de l'échantillon (avril 95 - avril 97, et depuis mai 2003), les probabilités conditionnelles liées au second expert sont particulièrement basses (proches de 0) quand l'indicateur est faible (en dessous de 2). Inversement, ces probabilités sont fortes (proches de 1) quand l'indicateur est supérieur à 3. La fréquence de mauvais classements (indicateur faible - fort, et probabilité forte - faible) est relativement peu élevée quand on considère des seuils d'*IMS* raisonnables. La séparation des deux états de marchés, définis à partir des valeurs de l'indicateur de chocs, permet ainsi de séparer les périodes agitées des périodes plus calmes.

⁵Notons de plus qu'une grande partie de l'autorégressivité des résidus a disparu par rapport à celle impliquée par le modèle non-linéaire précédent.

4 Caractérisation des crises financières à l'aide d'un modèle hybride (*HMC-MLP*)

L'utilisation des modèles hybrides ne permet certes pas d'améliorer l'erreur de prédiction de la série d'*IMS*. Ceci est somme toute assez intuitif compte tenu du caractère imprévisible des crises financières. L'étude des probabilités conditionnelles est toutefois intéressante puisque l'on obtient une séparation entre deux états relatifs à deux comportements différents de l'indice et du marché. Le second expert - dans le modèle relatif à la meilleure séparation des états - semble correspondre aux périodes de crises et de fortes turbulences (état 2), tandis que le premier s'adapte aux périodes moins agitées (état 1). Quand on s'intéresse plus précisément à certaines périodes troublées de l'histoire récente des marchés financiers, cette intuition semble nettement se confirmer. A titre d'exemple, le graphique dans l'encadré 8 représente l'évolution du CAC40 (cours journaliers de fin de séance) et les probabilités conditionnelles (hebdomadaires) du second expert pendant la crise qui a suivi les événements de septembre 2001 (second semestre 2001). Le niveau record de l'indicateur *IMS*, ainsi que celui de la probabilité conditionnelle d'être dans l'état 2, signalent clairement un marché très turbulent à partir de la fin août 2001 - suite à une série de mauvaises nouvelles sur la santé des entreprises américaines - avant même que les attaques terroristes sur le *World Trade Center* ne se déclenchent. On constate aussi sur ce graphique que la turbulence durera au final plusieurs semaines interrompues, pendant lesquelles la probabilité conditionnelle reste très proche de la valeur limite unitaire.

5 Conclusion

L'étude de la série d'IMS à l'aide d'un modèle hybride HMC-MLP ne permet certes pas d'aboutir à de meilleurs résultats en terme de prévision qu'un simple modèle linéaire. Ce résultat est conforme à l'hypothèse d'efficience faible des marchés financiers et correspond à la difficulté de prévoir les variations des cours, spécifiquement quand de grands événements surviennent sur les marchés. Néanmoins, cette modélisation fournit une séparation des états du marchés représentée par deux experts, l'un caractérisant les crises et l'autre les périodes stables. Quand on représente l'évolution des probabilités de transition conditionnelles pour le second expert, on est précisément à même d'extraire les dates correspondantes aux décisions ou aux événements générant de larges fluctuations de marché, et plus généralement de évaluer la durée totale d'une crise. Cette modélisation permet aussi d'obtenir une caractérisation des crises sans recourir à des éléments *ad hoc* d'une définition arbitraire. C'est ici en effet le modèle, et plus précisément l'état de la chaîne de Markov à un instant donné, qui autorise la classification de tel ou tel événement de marché comme crise majeure sur les marchés financiers.

La prochaine étape de ce travail d'identification des crises à l'aide d'un indicateur de chocs de marché consistera en une classification des périodes de marchés faisant intervenir l'indicateur, les probabilités conditionnelles liées aux différents états de marchés, et les rentabilités associées aux différents régimes de turbulence, dans le but de caractériser plus avant la nature des crises financières.

References

Anderson H., K. Nam et F. Vahid, (1999), "Asymmetric Nonlinear Smooth Transition GARCH Models", in *Nonlinear Time Series Analysis of Economic and Financial Data*, Rothman (Ed.), Kluwer, 191-207.

Bollerslev T., (1986), “Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.

Brockwell P. et R. Davis, (2002), *Introduction to Time Series and Forecasting*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 434 pages.

Coe P., (2002), “Financial Crisis and the Great Depression: A Regime Switching Approach”, *Journal of Money, Credit and Banking* 34 (1), 76-93.

Cottrell M., B. Girard, Y. Girard, M. Mangeas et C. Muller, (1995), “Neural Modeling for Time Series: A Statistical Stepwise Method for Weight Elimination”, *IEEE Transaction on Neural Networks* 6, 1355-1364.

Engle R., (1982) “AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica* 50 (4), 987-1007.

Hamilton J., (1989), “A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series subject to Changes in Regime”, *Econometrica* 57, 357-384.

Hamilton J., (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 799 pages.

Hamilton J. and R. Susmel, (1994), “AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime”, *Journal of Econometrics* 64, 307-333.

Maillet B. et Th. Michel, (2002), “Quelle a été l’ampleur de la crise financière de Septembre 2001 ? Une mise en perspective”, *Revue d’Economie Financière* 67, 269-276

Maillet B. et Th. Michel, (2003), “An Index of Market Shocks based on Multiscale Analysis”, *Quantitative Finance* 3 (2), 88-97.

Press W., S. Teukolsky et W. Vetterling, (1993), *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, 994 pages.

Rabemananjara R. et J. Zakoian, (1993), “Threshold ARCH Models and Asymmetries in Volatility”, *Journal of Applied Econometrics* 8 (1), 31-49.

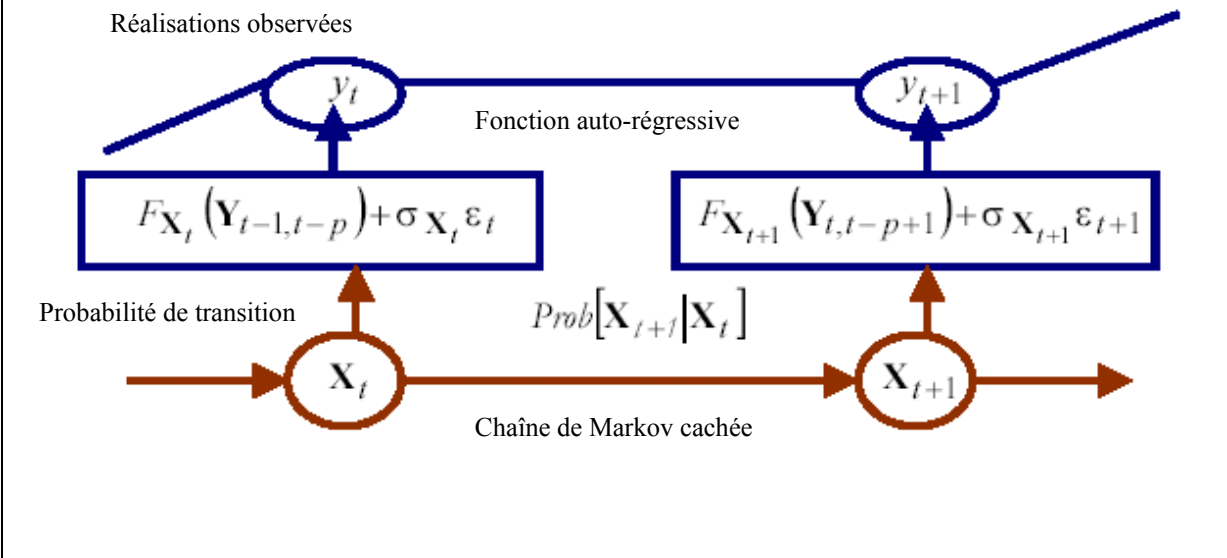
Rynkiewicz J., (2000), “Modèles hybrides intégrant des réseaux de neurones artificiels

à des modèles de chaînes de Markov cachées : applications à la prédiction des séries temporelles”, thèse de doctorat de l’université de Paris-1, 243 pages.

Zumbach G., M. Dacorogna, J. Olsen et R. Olsen, (2000-a), “Measuring Shocks in Financial Markets”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 3 (3), 347-355.

Zumbach G., M. Dacorogna, J. Olsen et R. Olsen, (2000-b), “Shock of the News”, *Risk* 13 (3), 110-114.

Encadré 1 :
représentation d'un modèle auto-régressif à changements de régimes markoviens



Encadré 2 : construction de l'IMS

La première étape du calcul de l'IMS repose sur le calcul de volatilités instantanées (non-centrées) associées à un pas de temps (ici une semaine) noté Δt_σ , et ce sur plusieurs échelles d'observation (ici 30 minutes à 5 jours) Δt_r , chacune s'écrivant :

$$\sigma_t(\Delta t_\sigma, \Delta t_r) = \left[\eta \sum_{i=1}^I (p_{t_i} - p_{t_i + \Delta t_r})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

où Δt_σ est l'horizon de temps considéré dans le calcul de l'IMS, I le nombre d'observations entrant dans le calcul de chaque volatilité, $\Delta t_r = \Delta t_\sigma / I$ est l'incrément de temps (correspondant à la résolution d'échantillonnage), $\{p_{t_i}\}$ est la séquence des log des l'indice CAC40 à la date t_i avec $t_i = t - i\Delta t_r$ (la date d'observation des rendements impliquée dans le calcul de la volatilité observée dans la période Δt_σ), N est le nombre de jours ouvrés par année servant à standardiser la volatilité, $\eta = N/\Delta t_\sigma$ est un facteur sans dimension servant à annualiser les volatilités calculées.

En appliquant l'opérateur logarithmique aux différentes volatilités tel que :

$$\ln \hat{\sigma}_t \equiv [\ln \hat{\sigma}_t(\underline{\Delta t_r}), \dots, \ln \hat{\sigma}_t(\overline{\Delta t_r})]$$

puis en appliquant une analyse en composante principale, pour extraire les premières composantes de la matrice $\ln \hat{\sigma}_t$, nous obtenons un vecteur de volatilités débruitées :

$$\hat{v}_t \equiv [\lambda_{1,t}, \dots, \lambda_{K,t}]$$

Finalement, l'*IMS* à la date t pour un horizon donné Δt_σ se calculera selon la formule suivante :

$$IMS_t = - \sum_{k=1}^K \omega_k \log_2 [1 - F(\lambda_{k,t})]$$

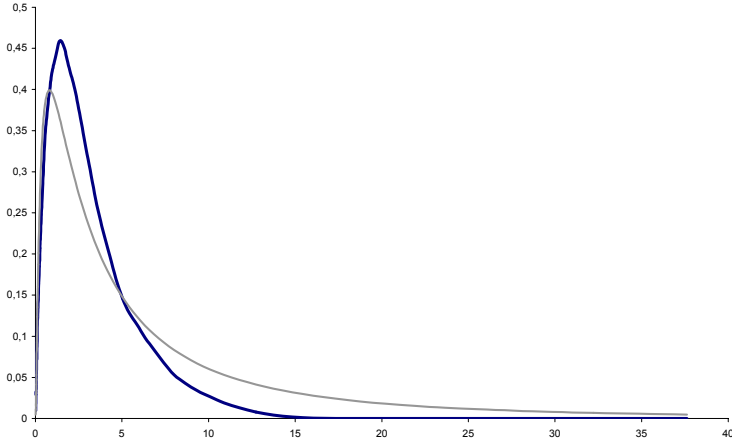
où les ω_k sont des poids dépendant des contributions des K facteurs à la variance totale (le ratio de la k -ième valeur propre sur la somme de toutes les valeurs propres de la matrice $\ln \hat{\sigma}_t$), $F(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale et $\log_2[\cdot]$ est le logarithme base 2 (voir Maillet et Michel, 2003, pour plus de détails sur les choix méthodologiques)

Encadré 3 : statistiques descriptives de l'IMS

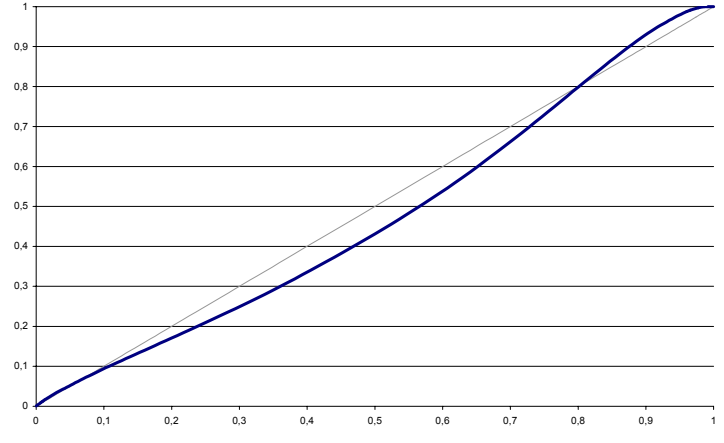
Mean	Std	Median	Skew	Kurtosis	JB	KS	DW	C-LB(10)	McL-L(7)
1.4506	1.4486	0.9759	1.8181	6.8089	526.8500*	0.1523*	0.9323*	17.4824	11.0383

JB est la statistique de Jarque et Bera ; KS est celle de Kolmogorov-Smirnov ; DW est la statistique de Durbin-Watson ; C-LB(x) est la statistique du test de Lung-Box corrigée pour un retard x (le premier pour lequel l'ensemble des premiers coefficients n'est pas significatif) ; McL-L(x) est la statistique du test de McLeod et Li pour un retard x (le premier pour lequel l'ensemble des premiers coefficients n'est pas significatif). L'asterix (*) signale la significativité du test au seuil de 5%.

Densité de probabilité

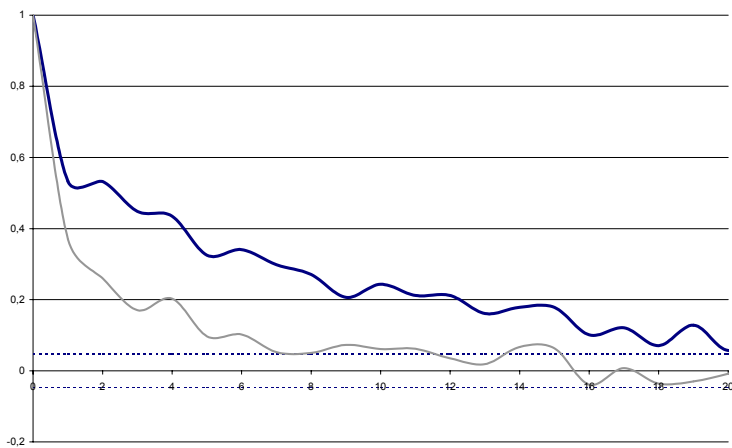


P-P Plot**



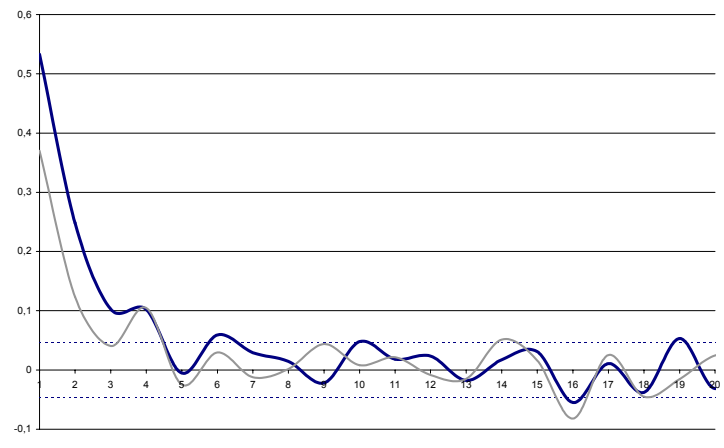
** versus la loi théorique de l'IMS (voir Maillat et Michel, 2003)

Autocorrélogramme***



*** Le trait bleu épais représente l'autocorrélogramme de la série brute tandis que le trait gris fin représente celui du carré de la série

Autocorrélogramme partiel***



Encadré 4 : une modélisation $ARMA(p,q)$ de l'IMS

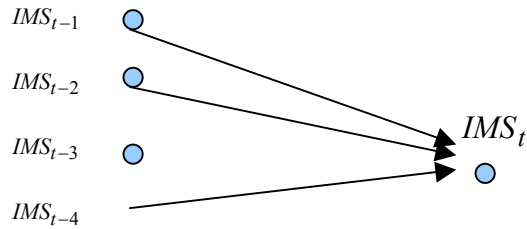
- Estimation

$$IMS_t = .3160 IMS_{t-1} + .2909 IMS_{t-2} + .1393 IMS_{t-4} + \varepsilon_t$$

Log-vraisemblance : -.4814 ; BIC : -.4414

MSE (globale)⁶ : .6179 ; MSE (apprentissage) : .6120 ; MSE (validation) : .9124

- Représentation

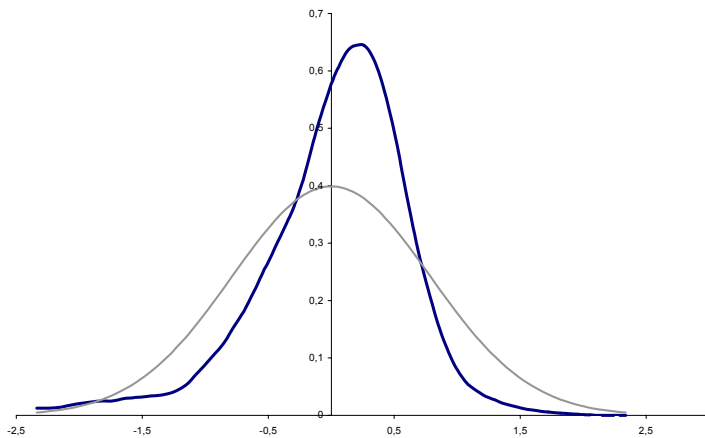


- Résidus

Mean	Std	Median	Skew	Kurtosis	JB	KS	C-LB(2)	McL-L(3)
0.0000	0.7869	1.0014	-1.4577*	7.2187*	499.6430*	0.1021*	0.3962	5.8991

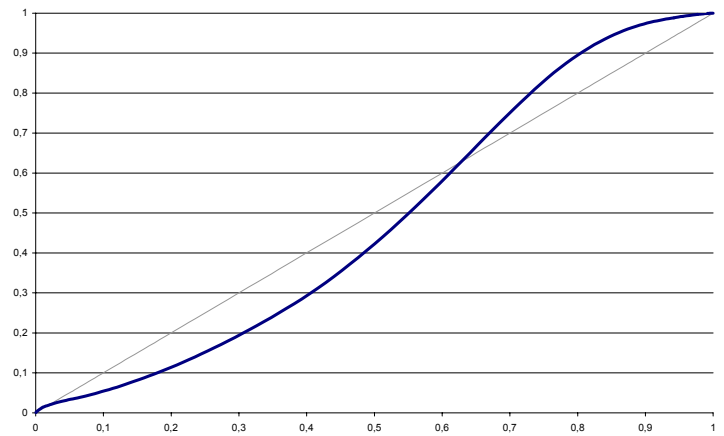
JB est la statistique de Jarque et Bera ; KS est celle de Kolmogorov-Smirnov ; C-LB(x) est la statistique du test de Lung-Box corrigée pour un retard x (le premier pour lequel l'ensemble des premiers coefficients n'est pas significatif) ; McL-L(x) est la statistique du test de McLeod et Li pour un retard x (le premier pour lequel l'ensemble des premiers coefficients n'est pas significatif). L'asterix (*) signale la significativité du test au seuil de 5%.

Densité de probabilité*



* versus la loi normale

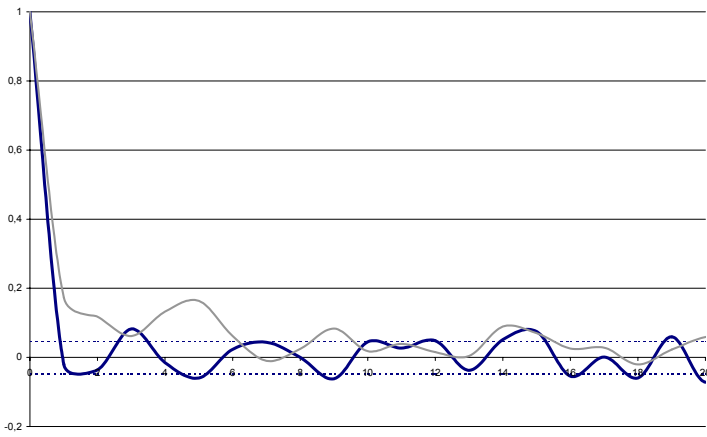
P-P Plot**



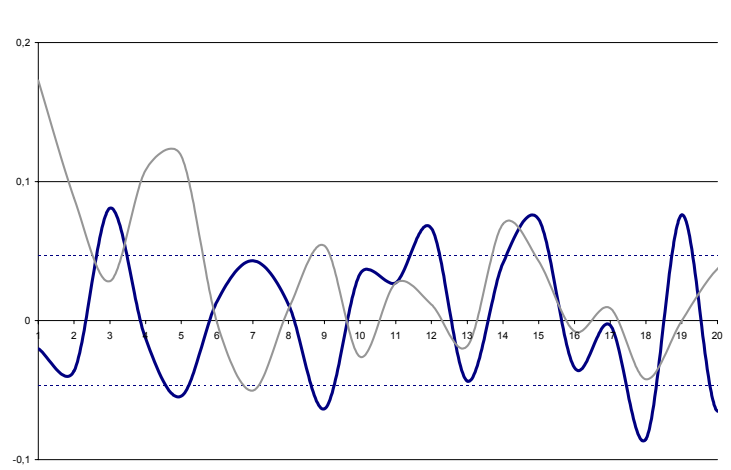
** versus la loi normale

⁶ Les trois MSE correspondent respectivement à l'échantillon total (460 dates d'observation), à un échantillon d'apprentissage (350 premières observations) et un échantillon de validation (110 dernières données) - voir texte.

Autocorrélogramme***



Autocorrélogramme partiel***



*** Le trait bleu épais représente l'autocorrélogramme de la série brute tandis que le trait gris fin représente celui du carré de la série

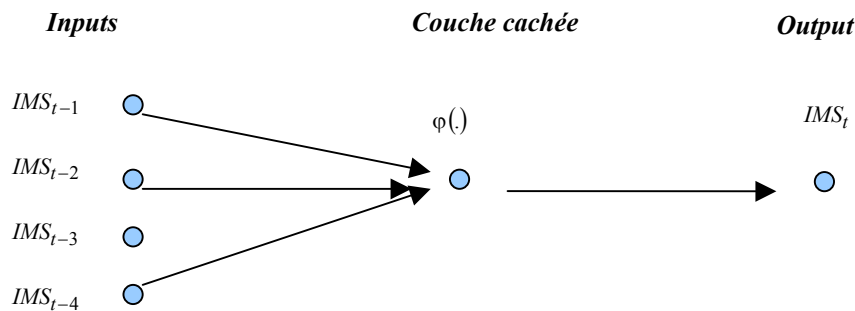
Encadré 5 : une modélisation MLP de l'IMS

• **Estimation**

$$IMS_t = -3.3802 \varphi \left(-0.0985 IMS_{t-1} - 0.09441 IMS_{t-2} - 0.0428 IMS_{t-4} \right) + .7850 \varepsilon_t$$

avec : $\varphi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ la fonction tangente hyperbolique.

• **Représentation**



Log-vraisemblance : -4702 ; BIC : -0.4169.

MSE (globale)⁷ : .6163 ; MSE (apprentissage) : .5677 ; MSE (validation) : .7285

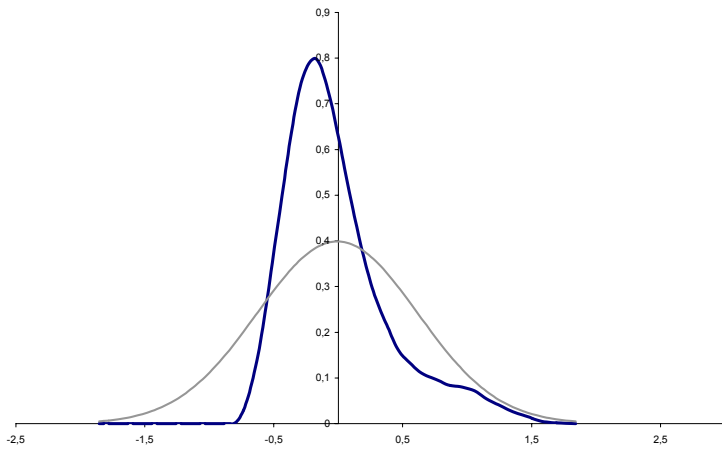
• **Résidus**

Mean	Std	Median	Skew	Kurtosis	JB	KS	C-LB(15)	McL-L(14)
-.0068	0.6221	-.1815	1.4352*	4.7445*	274.3750*	.1486*	23.5959	21.7133

JB est la statistique de Jarque et Bera ; KS est celle de Kolmogorov-Smirnov ; C-LB(x) est la statistique du test de Lung-Box corrigée pour un retard x (le premier pour lequel l'ensemble des premiers coefficients n'est pas significatif) ; McL-L(x) est la statistique du test de McLeod et Li pour un retard x (le premier pour lequel l'ensemble des premiers coefficients n'est pas significatif). L'asterisk (*) signale la significativité du test au seuil de 5%.

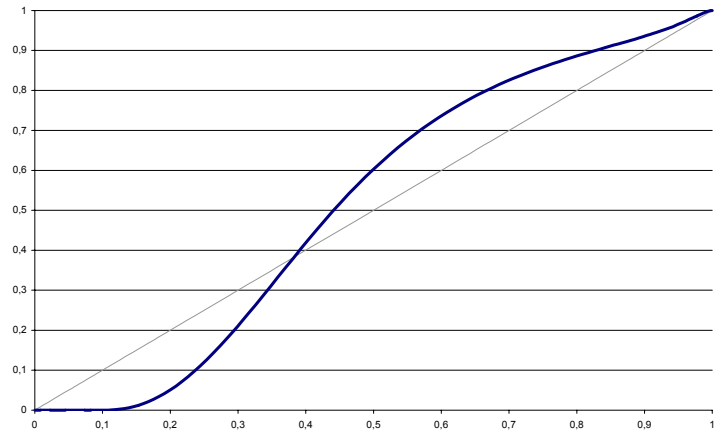
⁷ Les trois MSE correspondent respectivement à l'échantillon total (460 dates d'observation), à un échantillon d'apprentissage (350 premières observations) et un échantillon de validation (110 dernières données) - voir texte.

Densité de probabilité*



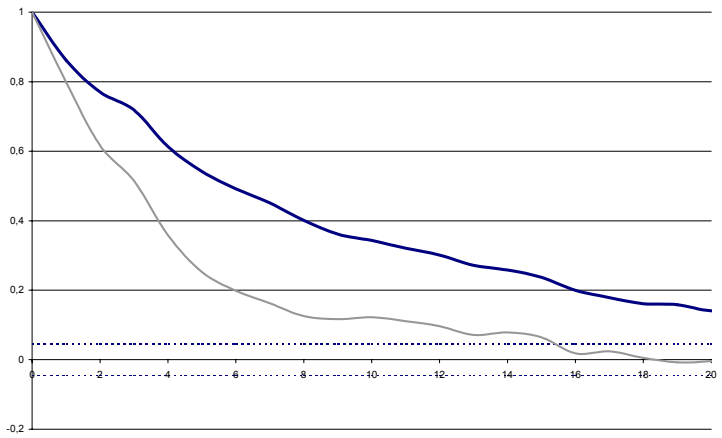
* versus la loi normale

P-P Plot**



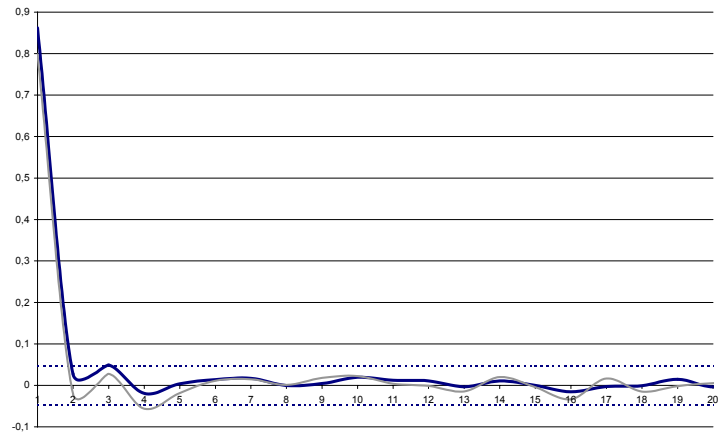
** versus la loi normale

Autocorrélogramme***



*** Le trait bleu épais représente l'autocorrélogramme de la série brute tandis que le trait gris fin représente celui du carré de la série

Autocorrélogramme partiel***



Encadré 6 : une modélisation *HMC-MLP* de l'*IMS*

- Estimation

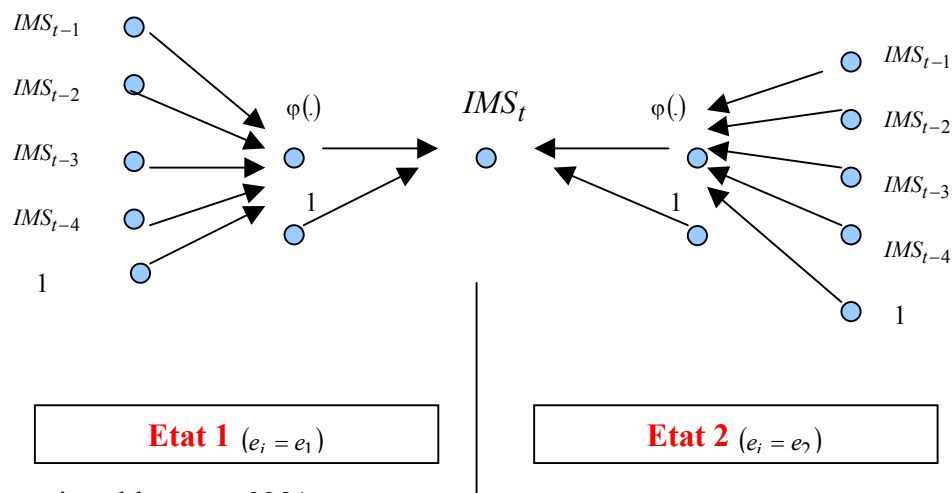
$$IMS_t = \left[\begin{array}{c} -.1791 \varphi \left(-1370.78 IMS_{t-1} - 499.01 IMS_{t-2} - 529.23 IMS_{t-3} - 591.59 IMS_{t-4} - 2163.76 \right) \\ -.6181 \end{array} \right] \times I_{e_1} + \left[\begin{array}{c} .8840 \varphi \left(3118.48 IMS_{t-1} - 6305.03 IMS_{t-2} - 4342.70 IMS_{t-3} - 1823.70 IMS_{t-4} - 18099.9 \right) \\ +.13117 \end{array} \right] \times (1 - I_{e_1}) + [.3503 \times I_{e_1} + .9549 \times (1 - I_{e_1})] \varepsilon_t$$

et :

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} .9434 & .0776 \\ .0566 & .9224 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

avec : $I_{e_1} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i = e_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ une fonction indicatrice et $\varphi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ la fonction tangente hyperbolique.

- Représentation



Log-vraisemblance : -.9281.

MSE (globale)⁸ : .5549 ; MSE (apprentissage) : .6169 ; MSE (validation) : .7830

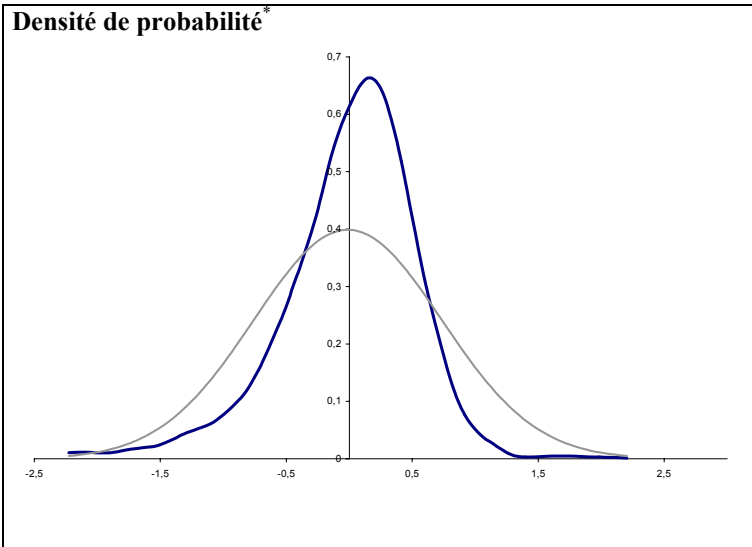
Trace de la matrice de transition normée : .9329

⁸ Les trois MSE correspondent respectivement à l'échantillon total (460 dates), à un échantillon d'apprentissage (350 premières dates) et un échantillon de validation (110 dernières dates) - voir texte.

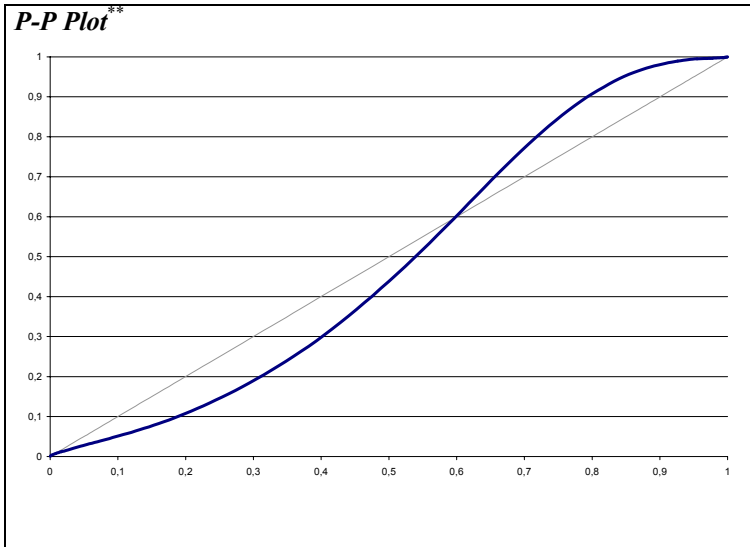
• **Résidus**

Mean	Std	Median	Skew	Kurtosis	JB	KS	C-LB(2)	McL-L(2)
-.0114	.7456	.1259	-1.4624*	8.0347*	644.151*	.1002*	.2581	4.7424

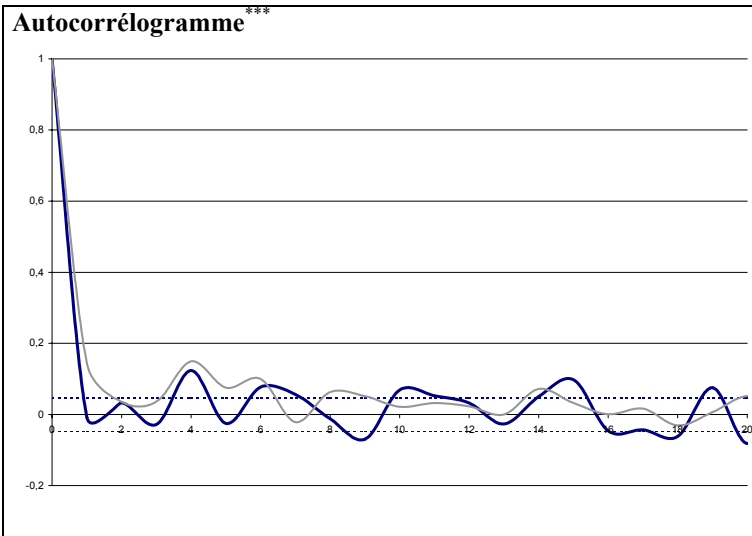
JB est la statistique de Jarque et Bera ; KS est celle de Kolmogorov-Smirnov ; C-LB(x) est la statistique du test de Lung-Box corrigée pour un retard x (le premier pour lequel l'ensemble des premiers coefficients n'est pas significatif) ; McL-L(x) est la statistique du test de McLeod et Li pour un retard x (le premier pour lequel l'ensemble des premiers coefficients n'est pas significatif). L'asterix (*) signale la significativité du test au seuil de 5%.



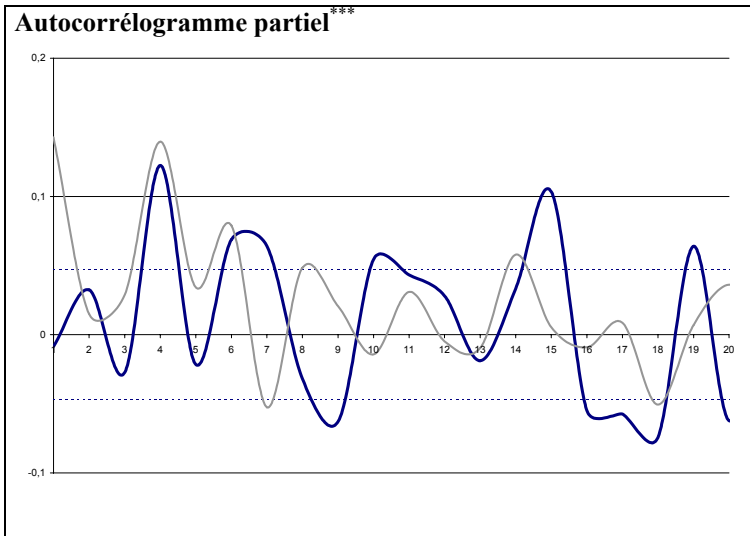
* versus la loi normale



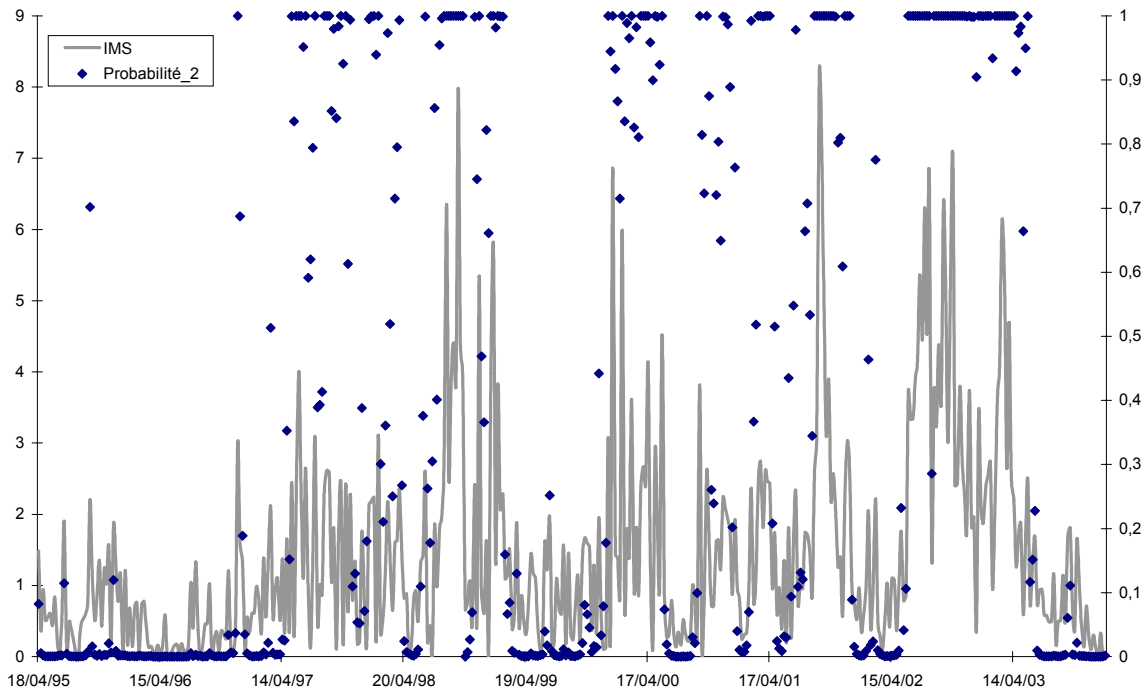
** versus la loi normale



*** Le trait bleu épais représente l'autocorrélogramme de la série brute tandis que le trait gris fin représente celui du carré de la série

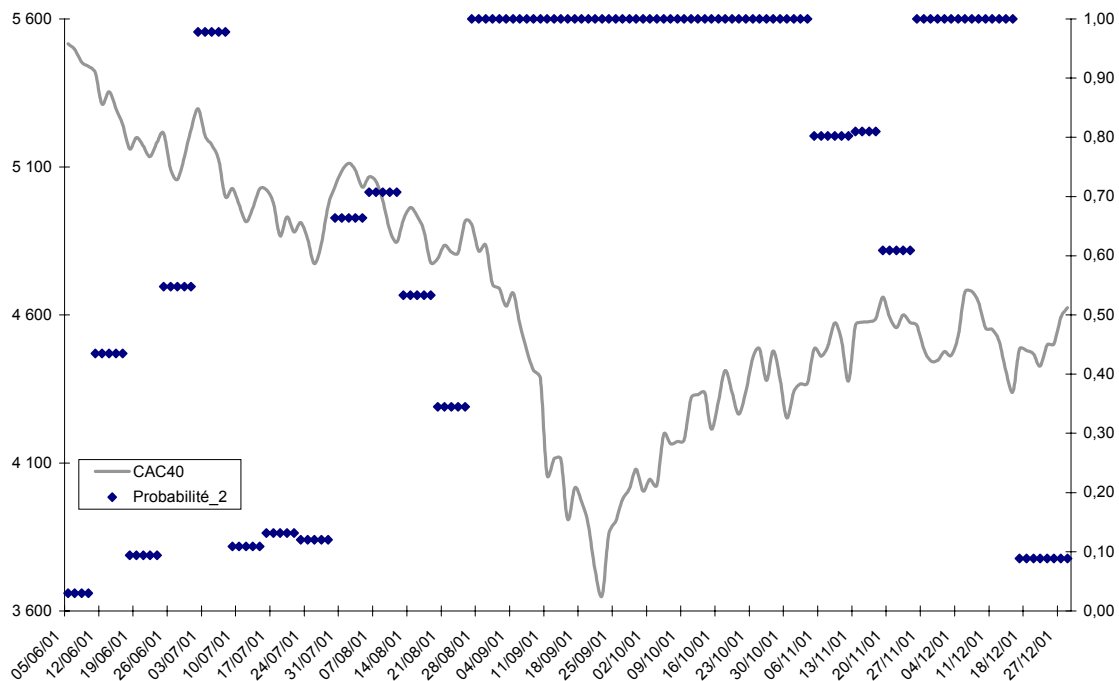


Encadré 7 : évolutions de l'IMS hebdomadaire sur le marché français et de la probabilité conditionnelle d'être dans le second état de marché



Source : Euronext - calcul de l'IMS hebdomadaire (vendredi) à partir des données de haute fréquence (échelle de gauche) et probabilité conditionnelle d'être dans l'état 2 dans le cadre du modèle hybride (HMC-MLP) à deux états maximisant la trace de la matrice de transition (échelle de droite).

Encadré 8 : évolutions du CAC40 et de la probabilité conditionnelle d'être dans le second état de marché pendant la crise de 2001



Source : Euronext - cours journalier de clôture du CAC40 sur le second semestre 2001 (échelle de gauche) et probabilité conditionnelle (hebdomadaire) d'être dans l'état 2 dans le cadre du modèle hybride (HMC-MLP) à deux états maximisant la trace de la matrice de transition (échelle de droite).