Systèmes de particules en interaction : quelques résultats

Xavier Guyon[*]

Février 1998

Résumé

Un système de particules en interaction est un processus $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ défini sur $E = F^S$: les particules (les individus) sont disposées sur un ensemble de sites $S \subset Z^d$ et prennent leurs valeurs dans un ensemble d'états F fini. La dynamique, indexée par $t \in R^+$, est markovienne, locale et invariante pour la translation sur S. Ces processus modélisent la croissance spatiale, le mode de diffusion ou la compétition pour des individus qui interagissent : extension d'une espèce végétale, choix d'un individu entre plusieurs standards, dynamique de reforestation, modèle de proie-prédateur, diffusion d'une épidémie. On décrira le comportement du système en temps grand lorsque S est infini ($S = Z^d$), ceci pour deux familles de modèles, les processus de contact et les modèles de votants : piégeage du processus dans un état absorbant, coexistence d'états, seuil critique.

Une dichotomie radicale apparaît selon que S est fini ou non. Pour S fini, le processus finit toujours dans un état absorbant. Nous présenterons deux résultats, chiffrés en terme du cardinal de S, sur ce temps d'absorption.

Cette présentation s'appuie sur le cours de Saint Flour de Durrett (1993) et quelques autres articles cités en référence. Elle est une invitation à ce joli domaine, fécond, très original dans ses méthodes et riche d'applications.

Mots clefs : système de particules, taux de naissance, taux de mort, dynamique markovienne locale, processus markovien de sauts, processus de contact, processus de votant, loi stationnaire, coexistence d'états, seuil critique, état absorbant, durée de vie, simulation.

---

[*]SAMOS, Université Paris 1, 90 rue de Tolbiac, 75634-Paris Cedex 13 guyon@univ-paris1.fr

Table des matières

1 Introduction

Un système de particules en interaction est un processus $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ défini sur $E = F^S$. Les particules (les individus) sont disposées sur un ensemble de sites $S \subset \mathbb{Z}^d$. Chaque particule prend ses valeurs dans un ensemble fini d'états $F = \{0; 1; 2; \cdots; \ - 1\}$, $\ \geq 2$:

$$Z = (Z_t)_{t\in \mathbb{R}^+} \text{ où } Z_t = (Z_t(x); x \in S);\ Z_t(x) \in F$$

$Z_t(x)$ est l'état de la particule x au temps t. La dynamique définissant Z est stochastique, indexée par le temps continu ($t \in \mathbb{R}^+$). Elle est définie par des règles locales, markoviennes et invariantes pour la translation sur S.

Lorsque $S = \mathbb{Z}^d$, on parle de système infini. Si $S \subset \mathbb{Z}^d$ est fini, on parle de système fini. Les sites seront notés $x; y$. Les états seront notés $i; j; k$.

Nous commençons par rappeller quelques résultats sur les processus markoviens de sauts (cf. Cocozza [16], §8), modèles qui recouvrent le cas des systèmes finis. Puis nous présentons le modèle général de système de particules (s.d.p.), avant d'en examiner certaines spécifications.

Le processus de contact de base est à 2 états $F = \{0; 1\}$: 0 pour absence et 1 pour présence d'une espèce. A travers deux fonctions de taux, l'une taux de naissance, l'autre taux de mort, il décrit le développement spatial d'une espèce. Il existe deux variantes de ce modèle : le processus de contact à seuil et le processus de contact multitype (cas où deux espèces ou plus sont en compétition).

Le processus du votant modélise le choix d'un individu entre $\ \geq 2$ standards (ou candidats, $F = \{1; 2; \cdots; \ \}$). Cette fois ci, deux fonctions de taux équilibrés modélisent l'influence spatiale mutuelle conduisant à un changement d'opinion. Le processus du votant à seuil est une variante de ce modèle qui, comme on le verra, a un comportement asymptotique très différent du processus du votant de base. On présentera enfin un modèle hiérarchique de dynamique de reforestation, un modèle de proie-prédateur, et un modèle de diffusion d'épidémie.

Seules les propriétés des modèles de contact et des modèles de votant seront présentées ici. Nous décrivons les résultats de comportement asymptotique en temps grand du système : états absorbants, vie (ou mort) du processus, lois stationnaires, coexistence de plusieurs états, seuil critique.

Dans un domaine dont une caractéristique est la simplicité de l'énoncé d'un résultat et la difficulté à le prouver, nous ne prétendons pas entrer dans la subtilité des outils utilisés (percolation, schéma de dualité, marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$). Par contre, nous présentons les éléments de base utiles à la définition et à une bonne compréhension de ces modèles .

Nous exposons complètement deux résultats importants n'exigeant pas la connaissance d'un matériel mathématique trop conséquent. Le premier établit que, pour $S = \mathbb{Z}^d$, l'ensemble des règles locales caractérisent bien globalement le système. Ce résultat repose sur un argument de localisation dû à Harris ([1], 1972). Le deuxième résultat établit la non-coexistence asymptotique (clustering) des deux états 0 et 1 pour le processus de contact de base lorsque le taux de naissance λ est inférieur à un seuil critique λ_c ([2], 1974). Nous indiquerons comment évaluer numériquement un tel seuil critique λ_c ([12]).

Le cas intéressant pour les applications est celui où $S \subset \mathbb{Z}^d$ est fini mais de grande taille. Or, pour un même modèle, les comportements asymptotiques d'un système fini et d'un système infini sont radicalement différents. En effet, il est facile de voir que si S est fini, le système a un durée de vie finie[1]. Ce n'est pas le cas pour un système infini. En conséquence, l'asymptotique $T \to \infty$ pour le système infini sur $\mathbb{Z}^d$ n'apportera aucune information quant au comportement du système pour S fini et fixé. Une alternative est de faire tendre simultanément S vers $\mathbb{Z}^d$ et T vers ∞ (mais avec T modérément grand), et de comparer les comportements du modèle pour le système fini $(S; T)$ et $(\mathbb{Z}^d; T)$: évaluation de la durée de vie en fonction du nombre de sites de S, description des états transitoires (métastablité de ces états). Cette deuxième approche du cas S fini est difficile et c'est aujourd'hui un domaine actif de la recherche. Nous présenterons deux résultats sur l'évaluation (en fonction de la taille de S) de la durée de vie du processus : le premier pour le processus de contact ([8]) ; le deuxième pour le modèle du votant (temps de consensus,[9]).

Cette présentation est une invitation au domaine des systèmes de particules en interaction. Elle ne prétend à aucune originalité. Elle répond à une question de nos collègues économistes quant à la "modélisation spatiale" de la diffusion de standards technologiques. Nous pensons que ces modéles, flexibles dans leur interprétation et dans leur utilisation, devraient contribuer à une meilleure compréhension de certains phénomènes de concurrence spatiale en sciences sociales ou en économie.

Les résultats présentés ici (et beaucoup d'autres !) sont exposés dans une abondante littérature, toujours en développement, féconde et originale dans ses méthodes. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux articles et ouvrages cités en référence, en particulier au très joli cours de Saint Flour de R. Durrett

[1]à condition qu'il y ait un état absorbant et que la dynamique soit irréductible. C'est bien le cas pour les processus de contact et pour les processus du votant.

qui nous a permit de structurer cette présentation ([14], 1995).

2 Notations, modèles

2.1 Processus markovien de sauts sur espace d'états fini

Un processus markovien de sauts $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ (noté par la suite p.m.s.) sur un espace d'états fini[2] E ($Y_t \in E$) est un processus de Markov homogène, vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute suite croissante de temps $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$:

$$\begin{aligned} P(Y_{t_n} &= i_n \mid Y_{t_{n-1}} = i_{n-1}, Y_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \cdots, Y_{t_1} = i_1) \\ &= P(Y_{t_n} = i_n \mid Y_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = P_{t_n - t_{n-1}}(i_{n-1}, i_n) \end{aligned}$$

La transition P_t est caractérisé par ses taux de changements en temps t petit :

$$P(Y_t = j \mid Y_0 = i) = c_{i,j} \times t + o(t); \quad i \neq j; i, j \in E \tag{1}$$

$$P(Y_t = j \mid Y_0 = i) = 1 - c_{i,i} \times t + o(t); \quad i \in E \tag{2}$$

où on a posé $c_{i,i} = -\sum_{j : j \neq i} c_{i,j}$. Notons $C = (c_{i,j})_{i,j \in E}$. E étant fini, il est facile de vérifier que la transition :

$$P_t(i, j) = \exp\{Ct\}$$

vérifie (1). Il suffit de voir que

$$\exp\{Ct\} = I + Ct + o(t)$$

(1) est caractéristique d'un processus Y de Markov homogène de générateur infinitésimal C (cf Cocozza, [16], §8).

On peut donner l'interprétation suivante du modèle : plus $c_{i,j}$ est grand, plus vite le saut $i \mapsto j$ sera probable, tandis que si $c_{i,j} = 0$, ce saut est impossible. Si $Y_0 = i$, ces différents changements d'états $(i \mapsto j)_j$ se trouvent en concurrence et, p.s. l'un d'eux gagnera.

Simulation de Y

[2] Les processus markoviens de sauts peuvent être construits pour un espace d'état E infini dénombrable (cf [16]). Mais cette construction ne peut pas être utile à l'étude d'un système de particules infini puisque, dans ce cas, l'espace d'états $E = F^S$ est infini mais non dénombrable.

Supposons que $Y_0 = i_0$. Posons $T_0 = 0$, $X_0 = i_0$ et définissons, par la récurrence suivante sur n, la suite $(T_n, X_n = i_n)_{n>0}$ des (instants $\times$ états) de changement :

(1) Pour chaque $j \neq i_n$, t.q. $c_{i_n,j} > 0$, on tire des temps exponentiels[3] indépendants $T^j \sim \mathrm{Exp}(c_{i_n,j})$. Si $c_{i_n,j} = 0$, on pose $T^j = +\infty$.

(2) On pose : $T_{n+1} = \inf\{T^j \mid j : j \neq i_n\}$ et i_{n+1} le changement réalisant cet inf : $T^{i_{n+1}} = T_{n+1}$, et $X_{n+1} = i_{n+1}$.

(3) Sur $T_n \leq s < T_{n+1}$, on définit $Y_s = i_n$, et $Y_{T_{n+1}} = i_{n+1} = X_{n+1}$.

(4) On recommence en (1).

Pour $q = (-c_{ii})$, $i \in E$, définissons la matrice de transition Q sur E :

$$\begin{cases} \text{Si } q_i \neq 0 : Q_{ij} = \frac{c_{ij}}{q_i} \text{ pour } i \neq j, \text{ et } Q_{ii} = 0 \\ \text{Si } q_i = 0 : Q_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j, \text{ et } Q_{ii} = 1 \end{cases}$$

Proposition 1 ([16], th. 8.3)

(1) Le processus Y ainsi construit est un processus markovien de sauts d'espace d'états E et de générateur infinitésimal C. Ses transitions vérifient (1).

(2) Le processus des sauts $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un chaîne de Markov sur E, homogène, de matrice de transition Q.

(3) Conditionnellement à X, les intervalles de temps inter-sauts $T_{n+1}, n \geq 0$, sont exponentiels indépendants, de paramètre $q(X_n)$.

A ce stade, il est important de faire plusieurs remarques.

Remark 1 Temps discret, temps continu.

Travailler avec un modèle en temps continu permet d'éviter les difficultés liés à l'apparition d'éventuels temps ex aequo : si les temps (par exemple géométriques) sont à états discrets $\mathbb{N}$ (ou $\pm\mathbb{N}$), des ex aequo peuvent apparaître et il faut décider d'une règle de choix entre ceux-ci lorsqu'il y a "collision". En ce sens, les modèles de p.m.s. à temps continu sont mathématiquement plus simples à étudier que les modèles de "chaîne" de Markov à temps discret. Il n'empêche que la discrétisation en temps est un outil numérique et informatique.

Remark 2 L'espace des états E est fini

Si E n'est plus fini, la construction précédente n'est plus possible puisque alors, p.s., $T = 0$. Pour les systèmes de particules, $E = F^S$. Si S est fini,

[3] Une loi exponentielle T de paramètre $c > 0$ est une loi sur $\mathbb{R}^+$ caractérisée par $P(T \geq t) = \exp\{-ct\}$. Elle est d'espérance c^{-1}. Elle modélise les phénomènes sans mémoire, vérifiant : $P(T \geq t + s \mid T \geq s) = P(T \geq t)$.

E l'est aussi et la construction précédente s'applique. Sinon, on devra avoir recours à un argument de localisation.

Remark 3 Changement d'échelle de temps

Le taux de changement en temps petit est $c_{i;j} \times t$. Pour $a > 0$, c'est encore $\frac{c_{i;j}}{a} \times (at)$: le changement d'échelle $t \mapsto at$ et le changement simultané des taux $c_{i;j} \mapsto \frac{c_{i;j}}{a}$ laissent invariant le système. D'autre part, le comportement asymptotique $(t \to \infty)$ d'un système C est identique à celui du système $a^{-1}C$: par homogénéité, cela nous permettra de réduire de un le nombre de paramètres du modèle, sans perte de généralité sur le modèle et la nature des résultats asymptotiques.

2.2 Système de particules : le cas général

L'espace d'état du processus est $E = F^S$; $F = \{0; 1; \cdots; \kappa - 1\}$. E est infini dès que S l'est. Les probabilités qui définissent l'évolution du système sont locales, markoviennes et invariantes pour la translation de S.

Voisinages. Soit N un voisinage de l'origine 0 de $\mathbb{Z}^d$, $0 \notin N$. On prendra toujours N fini, symétrique et irréductible (l'itération de l'addition sur N engendre tout S). Notons $\partial x = x + N$ $(\partial 0 = N)$ et notons N le cardinal N. Classiquement ∂x est un voisinage aux plus proches voisins de x :

$$\partial x = \{y \in \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_p \leq r\}$$

cela pour une p-norme et un réel $r > 0$ donnés. Par exemple, sur $\mathbb{Z}^2$, on considérera le voisinage aux $4 -$plus proches voisins $(p = r = 1)$, ou aux $8 -$plus proches voisins $(p = \infty; r = 1)$.

Règles locales, invariance par translation. Notons z_0 l'état du système en $t = 0$, $z_0(x)$ l'état du système en x en $t = 0$. L'éventuel changement en x est quantifié par des fonctions de taux $c_i(x; z_0(\partial x))$; pour $i \neq z_0(x)$:

$$P(Z_t(x) = i \mid z_0) = P(Z_t(x) = i \mid z_0(\partial x)) = c_i(x; z_0(\partial x))t + o(t) \qquad (3)$$

Dans la situation la plus générale, ces fonctions de taux sont en nombre κ, chacune dépendant de κ^N paramètres. Mais pour les modèles étudiés par la suite, cette dimension sera beaucoup plus réduite du fait d'hypothèses d'isotropie ou de comportement local moyen.

Si S est fini, l'espace d'état E du système étant fini, les équations (3) définissent un processus markovien de sauts : à tout moment, $|S| \times (\kappa - 1)$ lois exponentielles $T^{x;i}$ concourent, une seule sera gagnante définissant le saut et l'instant de saut du processus. Seul un changement en un unique (site$\times$modalité) est possible : si c'est (x,i) qui gagne, le changement est $z_0 \mapsto z_0^{(x,i)}$ où seul l'état $z_0(x)$ en x change pour i :

$$z_0^{(x,i)}(y) = \begin{cases} z_0(y) & \text{si } y \neq x \\ i & \text{sinon} \end{cases}$$

Si S est infini, l'argument de localisation de Harris permettra de démontrer que (3) caractérisent bien globalement le système. Spécifions maintenant la forme de (3) pour quelques modèles classiques.

2.3 Les processus de contact

2.3.1 Le processus de contact de base : deux états $\{0,1\}$

Pour fixer les idées, plaçons dans le contexte de la modélisation du développement spatial d'une espèce végétale.

Un site x de $S = \mathbb{Z}^d$ est interprété comme une parcelle unitaire sur laquelle est présente ($z(x) = 1$) ou non ($z(x) = 0$) une espèce végétale (cette espèce n'a pas de concurrente). L'espace d'état est $F = \{0,1\}$. Il y a deux fonctions de taux :

$$\begin{cases} c_0(x, z_0(\partial x)) = \delta \text{ si } z_0(x) = 1 \\ c_1(x, z_0(\partial x)) = \lambda n_1(z_0(\partial x)) \text{ si } z_0(x) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

où $n_1(z_0(\partial x))$ est le nombre de voisins de x où l'espèce est présente au temps 0.

La première équation de (4) indique un taux de mort δ constant, indépendant de la configuration de voisinage : relativement à la disparition de la plante, il n'y a pas compétition entre les placettes voisines.

La deuxième équation de (4) traduit que le taux de naissance est proportionnel au nombre $n_1(z_0(\partial x))$ de voisins de x où l'espèce est présente : plus il y a de placettes y voisines de x occupées par la plante, plus grande est la chance de naissance d'une plante en x.

Une interprétation de c_1 est la suivante. Plaçons nous sur $\mathbb{Z}^2$ et considérons la relation aux quatre plus proches voisins. Posons $\beta = 4\lambda$. Une plante présente en y donne naissance à une graine (et une seule) avec un taux β. Cette graine choisit au hasard l'une des quatre placettes voisines et germe. Si la placette choisie était vide (état 0), l'état devient 1. Sinon, rien n'est changé.

Ce modèle dépend apparemment de deux paramètres (δ, λ). En fait, on peut fixer $\delta = 1$ sans changer le comportement asymptotique du système[4].

[4] Par changement d'échelle de temps λ devient $\tilde{\lambda} = \lambda\delta^{-1}$. De façon du duale, on aurait pu fixer $\lambda = 1$ et $\tilde{\delta} = \delta\lambda^{-1}$.

Le modèle dépend alors du seul paramètre $\tilde{\lambda}$. La discussion sur “coexistence d’états” se fera donc en fonction de λ (avec l’apparition d’un seuil critique λ_c), de la dimension d de $\mathbb{Z}^d$ et du voisinage $\mathcal{N}$.

Un exemple simulé : La figure 1 (cf. [14]) illustre l’évolution d’un processus de contact pour $d = 1$, $\partial x = \{x - 1; x + 1\}$; $\delta = 1$ et $\lambda = 2$. Au temps $t = 0$, tous les sites de l’intervalle $[180; 540]$ sont occupés. Le temps est déroulé de $t = 0$ à $t = 720$. Il y aura coexistence des deux états. De plus, on peut constater une croissance linéaire du domaine d’occupation de l’espèce comme le prédit Durrett [3].

2.3.2 Le processus de contact à seuil

Le cadre est identique au précédent à la différence que le taux de naissance c_1 est caractérisé à partir d’un seuil θ par :

$$c_1(x; z_0(\partial x)) = N\lambda \text{ si } n_1(z_0(\partial x)) \geq \theta; \text{ et si } z_0(x) = 0 \tag{5}$$

où N est le cardinal de $\mathcal{N}$. L’interprétation de (5) est la suivante : une plante en y donne naissance à des graines (cette fois-ci en grand nombre) avec un taux λ. Si tel est le cas, les parcelles voisines sont toutes ensemencées, et x voisine de y passera à l’état 1 si elle était à 0 (sinon elle reste à 1). Pour un même paramètre $(\delta; \lambda)$, et $\theta = 1$, la propagation de l’espèce est plus importante pour le modèle de contact à seuil que pour le modèle de contact simple.

2.3.3 Le processus de contact multitype

Cette fois-ci $\kappa \geq 2$ espèces végétales différentes sont en compétition, 0 repérant l’absence de chacune de ces espèces sur une placette. Pour fixer les idées, supposons que $\kappa = 2$ espèces sont en compétition : $F = \{0; 1; 2\}$. Le processus de contact multitype est caractérisé par les taux suivants[5]

$$\begin{cases} c_0(x; z_0(\partial x)) = \delta_{z_0(x)} \text{ si } z_0(x) \neq 0 \\ c_i(x; z_0(\partial x)) = \lambda_i n_i(z_0(\partial x)) \text{ si } z_0(x) = 0,\ i = 1; 2 \end{cases} \tag{6}$$

Chaque espèce a son propre taux de mort et la fonction de taux de diffusion d’une espèce est identique à celle du processus de contact de base pour cette espèce. Notons qu’il n’y a pas de “transition de mutation” du type $1 \mapsto 2$ ou $2 \mapsto 1$.

[5]Par la suite, il est toujours implicitement entendu que les taux n’apparaissant pas dans la définition d’un modèle sont nuls.

2.4 Les processus du votant

2.4.1 Le modèle du votant de base

Considérons $\mathbb{Z}^d$ comme un réseau régulier de maisons, l'occupant de la maison x ayant à faire un choix entre ≥ 2 candidats (ou standards) : $F = \{1, 2, \cdots, \}$. Les occupants interagissent selon les règles suivantes :

$$c_i(x; z_0(\partial x)) = n_i(z_0(\partial x)) \text{ si } z_0(x) \neq i,\ i = 1; \tag{7}$$

où $n_i(z_0(\partial x))$ est le nombre de voisins de x d'opinion i à l'instant 0. Dans un tel modèle, il n'y a pas de candidats a priori dominants (modèle du votant non-biaisé). Un paramètre λ aurait pu figurer comme facteur multiplicatif dans la définition de ces transitions. Mais, par changement d'échelle de temps, on sait que ce n'est pas essentiel pour l'étude asymptotique du système.

Exemple de simulation : La figure 2 ([14]) donne l'état du système au temps $t = 500$ pour un processus de votant à 5 opinions sur le tore $\{0; 1; 2; \cdots; 119\}^2$, $d = 2$. La distribution initiale est le produit, en chaque site, des distributions uniformes sur les 5 opinions. Théoriquement (voir plus loin), il y aura consensus pour t assez grand. La figure 2 montre que après 50 itérations, le consensus n'apparaît pas. Un résultat de Cox ([9]) décrit plus loin dit que le consensus sera atteint en $\tau \simeq aN^2 \ln N$ pour $d = 2$ (avec la constante a donnée par Cox, $4\log(\frac{5}{4}) \times \frac{2}{\pi}(120)^2 \ln(120) \simeq 39173$). Entre ces deux temps, une question importante et ouverte est : "à quoi ressemblent les trajectoires intermédiaires ?"

2.4.2 Le modèle du votant à seuil

Dans le contexte précédent, les nouvelles fonction de taux dépendent d'un paramètre de seuil θ :

$$c_i(x; z_0(\partial x)) = \begin{cases} 1 \text{ si } n_i(z_0(\partial x)) \geq \theta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{8}$$

Deux simulations pour $d = 1$.

La figure 3 illustre l'évolution du modèle de votant à seuil à deux opinions, pour le voisinage aux 2 − p.p.v., $\partial x = \{x - 1; x + 1\}$, un seuil $\theta = 1$, $d = 1$ et $S = \{0; 1; 2; \cdots; 719\}$. La distribution initiale est i.i.d. uniforme $\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$ sur tous les sites. La ligne du haut correspond à $t = 0$; celle du bas à $t = 690$. On constate qu'il se forme rapidement des amas, ce qui fait penser que l'on se dirige vers un consensus. C'est effectivement ce que la théorie annonce.

Si on passe à un voisinage aux 4 − p.p.v., $\partial x = \{x - 2; x - 1; x + 1; x + 2\}$, toutes choses égales par ailleurs, la figure 4 montre que l'évolution est radicalement différente : ici, il y aura coexistence des deux opinions.

Deux simulations pour $d = 2$.

La figure 5 correspond au cas où il y a 2 opinions, le seuil est $\theta = 2$, le voisinage est aux $8-$p.p.v., sur le tore $\{0; 1; 2; \cdots ; 89\}^2$. La loi initiale est le produit de lois uniformes. La figure 5 correspond à l'itération $t = 50$. Ici, comme conjecturé, on observe la coexistence des deux opinions.

La figure 6 donne en $t = 50$ l'état d'un système sur $\{0; 1; 2; \cdots ; 179\}^2$ mais pour $\theta = 3$. Comme conjecturé, on se dirige vers le consensus.

Bien que nous n'en discuterons pas les propriétés, nous présentons trois autres modèles : le premier modélise une dynamique de reforestation après incendie ; le deuxième est un modèle de proie-prédateur ; le troisième est un modèle de diffusion d'épidémie. Pour les propriétés de ces modèles, le lecteur se reportera à [14].

2.5 Dynamiques de reforestation

$F = \{0; 1; 2\}$, et interprétons 0 pour herbe, 1 pour buisson, 2 pour arbre. Après un feu de forêt, il est raisonnable de modéliser la dynamique de reforestation de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0(x; z_0(\partial x)) = \delta_{z_0(x)} \text{ si } z_0(x) \neq 0 \\ c_1(x; z_0(\partial x)) = \lambda_1 n_1(z_0(\partial x)) \text{ si } z_0(x) = 0 \\ c_2(x; z_0(\partial x)) = \lambda_2 n_2(z_0(\partial x)) \text{ si } z_0(x) = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right. \tag{9}$$

Chaque espèce 1 ou 2 a son propre tauxde mort. Le côté hiérarchique du modèle apparaît à deux niveaux : on ne passe pas de l'état arbre à l'état buisson ; par contre l'inverse est possible.

Une simulation. La figure 7 donne, après 100 itérations, la configuration d'une dynamique du type reforestation sur $\{0; 1; 2; \cdots ; 89\}^2$, $\lambda_1 = \frac{5}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1.9}{4}$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$. L'herbe est en blanc, les buissons en gris et les arbres en noir.

2.6 Modèle de proie-prédateur

Imaginons que x est une placette cubique de l'océan, vide (0), occupée par des poissons (1) ou occupée par un requin (2) : $F = \{0; 1; 2\}$. Un exemple de dynamique de proie-prédateur est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0(x; z_0(\partial x)) = \delta_1 \text{ si } z_0(x) = 1 \\ c_0(x; z_0(\partial x)) = \delta_2 + \delta n_2(z_0(\partial x)) \text{ si } z_0(x) = 2 \\ c_i(x; z_0(\partial x)) = \lambda_i n_i(z_0(\partial x)) \text{ si } z_0(x) = i - 1; \ i = 1; 2 \end{array} \right. \tag{10}$$

δ_2 est le taux de mort naturelle des requins, et δ le taux de mort résultant d'une compétition des requins entre eux. Les seules naissances possibles sont $0 \mapsto 1$ (les poissons occupent les espaces libres) et $1 \mapsto 2$ (les requins s'installent là où il y a du poisson).

Une simulation. La figure 8 donne la configuration après 50 itérations d'un système de proie-prédateur sur $\{0, 1, 2, \cdots, 79\}^2$, avec comme taux : $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$ et $\delta = \frac{1}{4}$. Les poissons sont gris, les requins noirs et les espaces libres blancs.

2.7 Modèle de diffusion d'épidémie

Lors d'une épidémie d'une maladie, un individu est caractérisé par trois états : 0 pour un individu sain-susceptible, 1 pour un individu malade infecté, et 2 pour un individu sain-non susceptible (c.a.d. en période d'immunité). Sur $F = \{0, 1, 2\}$, les changements possibles et les taux associés suivants définissent une diffusion spatiale de la maladie :

$$\begin{cases} 0 \to 1 \text{ au taux } \lambda n_1(z_0(\partial x)) \\ 1 \to 2 \text{ avec le taux fixe } \delta \\ 2 \to 1 \text{ avec le taux fixe } \alpha \end{cases} \tag{11}$$

La présence de plus ou moins de malades autour d'un individu sain-succeptible influence l'éventuelle infection de cet individu. Pour les deux autres transitions, les taux de guérison (δ) et de perte d'immunité (α) ne sont pas influencés par l'état des voisins.

3 Le cas $S = \mathbb{Z}^d$: exemples de comportements asymptotiques

3.1 Etat absorbant et lois stationnaire

Soit $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ un système de particules sur $E = F^S$. Une loi π sur E est une loi stationnaire pour Z si, lorsque la loi initiale de Z_0 est π, alors la loi de Z_t, à tout instant $t \geq 0$ est encore π. Très souvent, dans les dynamiques markoviennes homogènes, π apparaît (sous certaines conditions) comme étant une loi limite de Z_t pour $t \to +\infty$. Il peut y avoir plusieurs lois invariantes, et celles-ci peuvent dépendre (ou non) (de la loi) de l'état initial Z_0. L'identification de ces lois stationnaires est la question qui nous intéresse ici.

Remarquons d'abord que certaines lois stationnaires sont "triviales", associées aux états absorbants de Z. Un état $z = (z(x); x \in S)$ est appelé état absorbant de la dynamique si, quand on y est, on ne peut en sortir.

Notons $e = (z(x) \equiv e, \forall x \in S)$ un état constant de E, $e \in F$. Il est facile de vérifier les affirmations suivantes : pour les trois types de processus de contact (4), (5) et (6), 0 est absorbant, et c'est le seul état absorbant. Pour les processus de votant et pour chaque $i \in \{1, 2, \cdots, \ \}$, i est absorbant : il y a états absorbants.

Pour tout état absorbant e, il est clair que la mesure de Dirac δ_e est une loi stationnaire de la dynamique : c'est ce type de loi stationnaire qu'on appelera loi stationnaire triviale. Une question importante est la suivante :

"Existe t-il une loi stationnaire non triviale"

On parlera alors de coexistence, puisque dans ce cas, il y a coexistence de plusieurs états. Dans le cas contraire, on dira qu'il y a non-coexistence d'états différents ("clustering" dans la terminologie anglaise), c.a.d. :

$$\forall x, y \in S, \lim_{t \to \infty} P(Z_t(x) \neq Z_t(y)) = 0$$

3.2 Le cas $F = \{0, 1\}$: système attractif, mesure stationnaire dominante

On se restreint ici au cas où $F = \{0, 1\}$ et on interprète : 1 =site occupé et 0 =site non-occupé. Dans ce contexte binaire, Z_t peut être caractérisé comme la partie suivante de S

$$Z_t = \{x \in S \text{ t.q. } Z_t(x) = 1\}$$

Définissons l'ordre sur $E = F^S$:

$$z \leq z' \Leftrightarrow \forall x \in S;\ z(x) \leq z'(x)$$

avec l'ordre naturel sur $\{0, 1\}$. On dira que les taux de naissance sont croissants si :

$$z \leq z' \text{ et } z(x) = z'(x) = 0 \text{ entraine : } c_1(x; z) \leq c_1(x; z')$$

On dira que les taux de mort sont décroissants si :

$$z \leq z' \text{ et } z(x) = z'(x) = 1 \text{ entraine : } c_0(x; z) \geq c_0(x; z')$$

Une dynamique avec des taux de naissance croissants et des taux de mort décroissants sera appelée une dynamique attractive. Il est facile de constater que les trois processus de contact sont attractifs. Pour une telle dynamique, on a :

Proposition 2 Soient $z_0 \le z'_0$ deux états initiaux. Si la dynamique est attractive, alors il existe un espace de probabilité sur lequel on peut construire les deux trajectoires issues de z_0 et de z'_0 t.q. à tout instant, on garde ce classement : $\forall t \ge 0;\ z_t \le z'_t$.

Dans le paragraphe consacré à l'existence et à l'unicité de la loi du système, on constatera que la construction proposée réalise une telle évolution.

Notons 1_A l'indicatrice d'un ensemble A, Z^A le processus d'état initial $Z_0 = 1_A$. L'intérêt de la propriété d'attractivité est de pouvoir définir la notion de loi stationnaire dominante : si l'état initial est $\mathbf{1} = 1_S$ (état qui domine tous les autres), et si on sait démontrer que $Z^1_t \Rightarrow Z^1_\infty$, alors Z^1_∞ est une loi stationnaire dominant toutes les autres. En particulier, il suffira de vérifier que Z^1_∞ charge deux états différents pour prouver qu'il y a coexistence.

3.3 Coexistence : le cas des processus de contact

3.3.1 Le processus de contact de base

Soit Z le processus de contact (4) sur $\mathbb{Z}^d$ de taux de naissance λ, le taux de mort δ étant fixé à 1. Pour $A \subset S$, notons :

$$\tau^A = \inf\{t \ge 0 : Z^A_t \equiv 0\}$$

τ^A est le temps de mort du processus Z^A. Partant de la configuration initiale $1_{\{0\}}$, définissons :

$$\lambda_c = \inf\{\lambda \ge 0 : P(Z^{\{0\}}_t \ne 0 \text{ pour tout } t) > 0\} = P(\tau^{\{0\}} = \infty) > 0$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3 Processus de contact de base

(1) $\frac{1}{4} \le \lambda_c < \infty$.

(2) Si $\lambda \le \lambda_c$, pour toute partie A de $\mathbb{Z}^d$, $Z^A_\infty = 0$: le processus meurt $p.s.$ et il ne peut pas y avoir coexistence des deux états 0 et 1.

(3-1) Si $\lambda > \lambda_c$, Z^1_∞ est une loi invariante non triviale : la coexistence de 0 et de 1 est possible.

(3-2) Plus précisément, on a : $Z^A_\infty = P(\tau^A < \infty)\delta_0 + P(\tau^A = \infty)Z^1_\infty$

Nous établirons la partie minoration de (1). On décrira également comment évaluer numériquement le seuil critique λ_c (pour $d = 2$, et le voisinage aux 4 p.p.v., on a $\lambda_c \simeq 0.412$).

Pour souligner à quel point un tel résultat fut difficile à démontrer, reprenons les termes de R. Durrett [10] :

"The last result (ici le résultat (3-2)) took fifteen years to envolve to its current form. Harris (1974), Griffeath (1978), Durrett (1980), Durrett and Griffeath (1982), and Durrett and Schonman (1987) proved increasingly more general result before Bezuidenhout and Grimmett (1990) finished the problem and in addition proved that at $\lambda = \lambda_c$, $P(\tau^{\{0\}} = \infty) = 0$".

Ce point (3-2) précise qu'il n'existe qu'une seule loi invariante non triviale pour le processus de contact de base, et que si le processus survit, alors, pour t grand, il ressemble au processus démarrant de la configuration initiale constituée de 1 partout : à la condition qu'il assure la coexistence asymptotique, l'état initial n'est pas mémorisé dans le comportement limite.

La situation est fondamentalement différente pour le processus de contact multitype et pour les processus du votant : pour ces systèmes, quand les paramètres permettent une coexistence, il y aura une infinité de lois stationnaires de coexistence, et cette fois, la configuration initiale est mémorisée dans le comportement limite.

3.3.2 Processus de contact multitype

Limitons-nous au modèle (6) à deux espèces 1 et 2, 0 repérant l'état "vide" : $F = \{0; 1; 2\}$. Pour $\theta \in [0; 1]$, et $\theta_1 = \theta; \theta_2 = 1 - \theta$, on notera Z_0^θ l'état initial correspondant à des tirages i.i.d. $(0; \theta_1; \theta_2)$ sur F. Soit λ_c le seuil critique du modèle de contact à une espèce.

Proposition 4 On suppose que les deux espèces ont le même taux de mort : $\delta_1 = \delta_2$.

(1) Si $\lambda_1 > \lambda_2$, et si l'état initial est Z_0 est invariante par translation avec $P(Z_0(x) = 1) > 0$, alors la variété 2 va disparaître : $P(Z_t = 2) \xrightarrow{t \to \infty} 0$.

Supposons maintenant que les deux espèces concourent sur un pied d'égalité : $\delta_1 = \delta_2$ et $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_c$.

(2-a) Si $d \leq 2$, il ne peut y avoir coexistence.

(2-b) Si $d \geq 3$, Z_1^θ est non triviale, vérifiant

$$P(Z_1^\theta = i) = \begin{cases} 1 - \rho & \text{si } i = 0 \\ \rho\theta_i & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

où ρ est la densité d'équilibre d'un site occupé dans le processus de contact à une espèce.

Remark 4 Non coexistence des deux espèces si $d \leq 2$

Le résultat (2-a) est troublant : il dit que pour $d \leq 2$ et pour le modèle de contact multitype, deux espèces (même sur un pied d'égalité) ne coexisterons jamais.

Remark 5 Différence entre le processus de contact unitype ou multitype

Le résultat (2-b) est de nature très différente du résultat de coexistence pour le processus de contact à une seule espèce : pour ce dernier, il n'y a qu'une seule loi invariante stationnaire non triviale, et de plus, la condition initiale est sans importance sur l'état en temps grand. Pour le processus multitype, il y a une infinité (paramétrée par $\theta \in [0;1]$) de lois stationnaires non triviales, et ici, la condition initiale est mémorisée dans le comportement asymptotique.

Remark 6 La dichotomie $d \leq 2$ et $d \geq 3$

L'obtention de ces résultats soulignant la dichotomie $d \leq 2$ et $d \geq 3$ est difficile. Elle repose sur la construction d'une structure de percolation intermédiaire et sur une relation de dualité qui permet de "réduire" le problème à celui de la récurrence ou non d'une marche aléatoire sur Z^d. Soit $\xi = (\xi_n)$ la marche aléatoire sur Z^d définie par la loi de saut uniforme sur le voisinage N : si $\xi_n = x$; alors ξ_{n+1} est la loi uniforme sur ∂x. La marche aléatoire est récurrente si p.s. elle boucle en un temps fini (c.a.d. s'il existe m et k t.q. $\xi_{k+m} = \xi_k$). Sinon, elle est transitoire. La dichotomie résulte alors du résultat suivant sur les marches aléatoires sur Z^d : si $d \leq 2$, la marche aléatoire est récurrente ; si $d \geq 3$, elle ne l'est pas. Un ivrogne retrouvera p.s. ses clefs sur terre, mais jamais dans l'espace !

3.4 Processus du votant

3.4.1 Modèle du votant de base

Considérons un modèle du votant de base (7) à deux candidats : $F = \{0; 1\}$. Soit Z_0^θ la sur E produit de loi i.i.d. $\{\theta_1; \theta_2\}$ $(\theta_1 + \theta_2 = 1)$ sur $\{0; 1\}$. Ici, le modèle est libre de tout paramètres : les deux candidats concourent sur un pied d'égalité. Le résultat suivant montre que le processus du votant de base a le même comportement que celui du processus de contact à deux variétés.

Proposition 5 Modèle du votant

(1) Si $d \leq 2$, il ne peut y avoir coexistence.

(2) Si $d \geq 3$ et pour la condition initiale Z_0^θ, il y a coexistence : Z_1^θ est non triviale, vérifiant, $P(Z_1^\theta(x) = i) = \theta_i$, $i = 0; 1$.

3.4.2 Modèle du votant à seuil

Considérons maintenant le modèle du votant à seuil (8), pour un seuil $\theta = 1$. Cette fois-ci, le comportement va être différent,

Proposition 6 Modèle du votant à seuil $\theta = 1$ (Liggett, [13])

(1) Pour $d = 1$ et $N = \{-1, +1\}$, il y a non-coexistence.

(2) Dans tous les autres cas, il y a coexistence : il existe une mesure stationnaire Z_∞ de densité uniforme sur $\{0, 1\}$ en chaque site.

Durrett conjecture l'unicité de la mesure invariante ergodique. Pour $N = \{k\, x\, k_p \le r\}$ et $r \ge 1$, "autres cas" signifie que $r \ge 2$ pour $d = 1$. Par exemple, il y a coexistence si $d = 1$ pour le voisinage $N = \{-2, -1, +1, +2\}$, ou si $d = 2$ et pour le voisinage est aux 4-p.p.v..

Que dire pour les autres valeur du seuil θ? Dans le cas de la dimension $d = 2$ et du voisinage aux 8-p.p.v. sur $\mathbb{Z}^2$, $N = \{x : \|x\|_\infty \le 1\}$, Durrett avance la conjecture suivante :

$$\begin{cases} \text{Coexistence pour } \theta = 1, 2 \\ \text{Non coexistence pour } \theta = 3, 4 \\ \text{Fixation pour } \theta \ge 5 \end{cases}$$

Les conjectures pour $\theta = 1$ et pour $\theta \ge 5$ sont démontrées dans [14]. Fixation signifie que chaque site changera de valeur un nombre fini de fois. Par exemple, si $\theta \ge 5$, les sites à la valeur 1 de la configuration ci-dessous ne peuvent plus changer de valeur quelque soient les valeurs ailleurs, pour la configuration,

$$\begin{matrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & 1 & 1 & * & * \\ * & 1 & 1 & 1 & 1 & * \\ * & 1 & 1 & 1 & 1 & * \\ * & * & 1 & 1 & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{matrix}$$

4 Le cas S infini : Existence du système de particules

4.1 Construction d'un système de particules

La simulation de la dynamique d'un s.d.p. (3) s'inspire de celle d'un p.s.m. (1). Pour déterminer le saut et l'instant de saut après $t = 0$, on fait concourir entre elles des lois exponentielles $T^{x,i}$ indépendantes, de paramètres $c_i(x, z(\partial x))$. Mais ici, l'ensemble des sites étant infini, $\inf_x T^{x,i} = 0$ puisqu'il y a une accumulation de sauts en 0_+.

Pour surmonter ce problème, on va démontrer le résultat de localisation finie : à configuration initiale z_0 fixée, il existe un $t_0 > 0$ et une partition

$S = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ de l'espace des sites en une réunion dénombrable de parties finies S_n telle que pendant l'intervalle de temps $[0; t_0[$, le système évolue de façon indépendante sur chaque parties S_n. Le procédé de simulation sur $[0; t_0[$ est alors celui de p.m.s., indépendants, sur chaque S_n. On recommence sur $[t_0; 2t_0[$, et ainsi de suite.

4.2 Le graphe aléatoire de Harris

Soit $t_0 > 0$ fixé, et z_0 la configuration du s.d.p. en $t = 0$. Pour tout x, on tire des lois exponentielles $\{T^{x,i}; i \neq z_0(x)\}$ toutes indépendantes entre elles pour $x \in S$ et $i \in F$, $T^{x,i} \sim Exp(c_i(x; z_0(\partial x)))$. On définit alors la relation de voisinage suivante sur S :

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in N \text{ et de plus } \left\{ \begin{array}{l} \exists i \neq z_0(x) \text{ t.q. } T^{x,i} < t_0; \text{ ou bien} \\ \exists i \neq z_0(y) \text{ t.q. } T^{y,i} < t_0 \end{array} \right.$$

Cette relation définit un graphe non orienté G_{t_0} (on devrait en toute rigueur noter $G_{t_0}(\{T^{x,i}; x \in S; i \in F\})$). Ce graph s'appauvrit lorsque t_0 décroit : si $t \leq s$, $G_t \subset G_s$. On peut donc espérer que pour un choix de t_0 assez petit, les composantes connexes (S_n) de ce graphe vont toutes être finies, nous fournissant la partition annoncée $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ de S. Tel est bien le cas :

Proposition 7 (Harris, 1974, [1])
Il existe $t_0 \geq 0$ tel que, presque sûrement, les composantes connexes $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ de S sont toutes finies.

Démonstration : Un chemin $x \mapsto y$ de S sans boucle et de longueur n est la donnée d'une suite

$$x = y_0 \sim y_1 \sim y_2 \cdots \sim y_n = y, \text{ avec } y_l \neq y_m \text{ si } 0 \leq l < m \leq n.$$

Notons C_x la composante connexe de x pour le graphe G_{t_0}. On veut montrer que, pour t_0 assez petit, on a $p.s. : |C_x| < \infty$. Introduisons l'événement auxiliaire :

$$L_n(x) = \{\exists y \in S \text{ et } x \mapsto y \text{ sans boucle, de longueur } 2n - 1\}$$

On a :

$$\{|C_x| = \infty\} = \cap_{n\geq 0} L_n(x)$$

Reste à évaluer la probabilité de $L_n(x)$. Si on montre que cette probabilité décroit vers 0, le résultat sera établi.

Commençons par évaluer la probabilité que deux sites généraux soient connectés :

$$1 - P(x \sim y) = P\{[\cap_i (T^{x,i} \geq t_0)] \cap [\cap_i (T^{y,i} \geq t_0)]\}$$

L'indépendance des événements et le fait que $c = \sup\{c_i(x; z_0(\partial x)); i \in F; x \in S\} < \infty$ (F fini, localité des règles et invariance par translation), conduit à la majoration :

$$P(x \sim y) \le \ (1 - e^{-2\ t_0}), \text{ où } \ = \mathrm{card}(F)$$

Un chemin $x \mapsto y$ de longueur $2n - 1$ issu de x est la donnée d'une suite

$$x = y_0; (y_0; y_1); (y_2; y_3); \cdots (y_{2n-2}; y_{2n-1}); y_{2n-1} = y$$

Si le chemin est sans boucle, les différentes couples $(y_l; y_{l+1})$ sont indépendants. La probabilité de réalisation d'un chemin spécifié sans boucle et de longueur $(2n - 1)$ est donc majorée par

$$(1 - e^{-2\ t_0})^n$$

Notons N le cardinal du voisinage N. Un majorant du nombre de chemins issu de x, sans boucle, de longueur $(2n - 1)$, est N^{2n-1}. On en déduit donc :

$$P(L_n(x)) \le N^{2n-1}(1 - e^{-2\ t_0})^n$$

Un choix $t_0 > 0$ t.q. $N(1 - e^{-2\ t_0}) \le \frac{1}{2}$ assure une décroissance exponentielle vers 0 de $P(L_n(x))$ et donc :

$$P(\{|C_x| = \infty\}) = 0$$

Remark 7 Eclaircissement d'un processus de Poisson et construction du système de particules

Un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^+$ d'intensité 1 peut être définit comme une succession de points $\{(T_n)_{n>0}\}$ t.q. T_1 et $(T_{n+1} - T_n); n \ge 1$ sont i.i.d.Exp(1).

Cette dualité {P.P. , LoisExp} permet de justifier la propriété d'éclaircissement suivante du P.P. (thinning property) : soit $(U_n)_{n>0}$ une suite i.i.d. de lois uniformes sur $[0; 1]$, suite indépendante du P.P.$\{(T_n)_{n>0}\}$. Soit $p \in [0; 1]$ une probabilité. On décide d'éclaircir le P.P. en éffaçant un point T_n avec la probabilité $(1 - p)$:

$$\text{Si } U_n \ge (1 - p), \text{ effacer le point } T_n$$

Le nouveau processus obtenu est un P.P. d'intensité p, et donc les nouveaux intervalles inter-points forment une suite i.i.d. Exp(p).

Cette propriété peut être utilisée pour la simulation du s.d.p.. Tout d'abord, par changement d'échelle de temps, on se ramène au cas où :

$$c = \sup\{c_i(x; z_0(\partial x)); i \in F; x \in S\} \leq 1$$

On commence par simuler des processus de Poisson $\{(T_n^{x;i})_{n \geq 0}; x \in S; i \in F\}$, tous d'origine 0, d'intensité 1 et indépendants. Les sauts en x auront lieu sur l'ensemble $\{T_n^{x;i}; n \geq 1\}$, mais après effaçage avec une probabilité $(1 - c_i(x; z_t(\partial x))$ (afin d'engendrer la loi exponentielle de bon paramètre), et compétition entre eux des divers $\{T^{y;j}; y \in C_x$ et $j \in F\}$.

5 $S = Z^d$: non coexistence pour le processus de contact

La construction précédente conduit directement aux deux résultats suivants :

- Si la loi de Z_0 est stationnaire, il en est de même pour Z_t.
- $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov : pour $u < s < t$, connaissant $Z_s = z_s$, z_u n'apporte aucune information quant à Z_t.

Z étant un processus de Markov, on peut lui associer le semi-groupe d'opérateurs $(T_t)_{t \geq 0}$, où T_t est défini sur l'espace $F_B(E; R)$ des fonctions de $E = F^S$ dans R ne dépendant que d'un nombre fini de sites de S :

$$T_t f(z) = E(f(Z_t) \mid Z_0 = z)$$

Pour un s.d.p. général, on vérifie par calcul direct que le générateur infinitésimal L de ce semi-groupe est :

$$Lf(z) \doteq \frac{d}{dt}\{T_t f(z)\}\,|_{t=0^+} = \sum_{x \in S; i \in F} c_i(x; z(\partial x))\{f(z^{x;i}) - f(z)\} \qquad (12)$$

Plaçons nous maintenant dans le cadre du processus de contact de base (4) à deux états $\{0; 1\}$. Ce processus est attractif (taux de mort fixe, taux de naissance croissant). Reprenant alors l'algorithme de construction du système, on constate que si on a deux états initiaux classés $z_0 \leq z_0'$, ce classement subsistera à tout instant : $z_t \leq z_t'$.

On dispose alors des outils nécessaires à la démontration du résultat suivant

Proposition 8 [2] Non-coexistence pour le processus de contact

Si $\lambda |N| < \delta$, alors pour tout couple de sites différents x et y : $\lim_{t \to \infty} P(Z_t(x) \neq Z_t(y)) = 0$.

Démonstration : Considérons d'abord la situation du processus démarrant de la configuration 1 constituée de 1 partout. $P(Z_t^1(x)=1)$ est alors indépendante de x. Notant $x \sim y$ la relation de voisinage $x - y \in N$ et utilisant la relation (12) et la définition des taux (4) pour le processus de contact, on obtient facilement([6]) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(Z_t^1(x) &= 1) = -\delta P(Z_t^1(x)=1) + \lambda \sum_{y:y\sim x} P(Z_t^1(x)=0; Z_t^1(y)=1)\\ &\leq -\delta P(Z_t^1(x)=1) + \lambda |N| P(Z_t^1(y)=1)\\ &\leq (\lambda |N| - \delta) P(Z_t^1(x)=1)\end{aligned}$$

Donc, si $\lambda|N| < \delta$, $P(Z_t^1(x)=1) \to 0$ exponentiellement si $t \to \infty$.

Démarrons maintenant d'une configuration initiale z, configuration vérifiant toujours : $z \leq 1$. Puisque $Z_t^z \leq Z_t^1$, $P(Z_t^z(x)=1) \to 0$ si $t \to \infty$. ∎

6 Estimation du seuil critique λ_c

Une procédure d'estimation numérique du seuil critique λ_c est proposée dans ([12]) pour le processus de contact. La méthode est générale et peut s'adapter à d'autres modèles. Elle est basée sur l'estimation empirique par simulation sur un domaine $[0, N]^d$ de la probabilité $P(Z_\infty(x)=1)$.

Considérons le processus de contact de base (4) sur $\mathbb{Z}^2$, pour la relation aux 4-p.p.v. et les paramètres $\delta = 1$ et λ. La théorie nous dit que $0.25 \leq \lambda_c \leq 1$.

Partant de la valeur 1 partout, une simulation pour $\lambda > \lambda_c$ conduit à la coexistence, alors que $\lambda < \lambda_c$ conduit à l'état 0. Une première phase est donc d'essayer des valeurs λ et d'observer s'il y a ou non coexistence. Pour une simulation sur le Tore $\{1, 2, \cdots, 200\}^2$, sur une durée $t = 1,200$, les auteurs constatent que pour $\lambda = 0.36$, il y a mort du processus, alors que pour $\lambda = 0.46$ il y a coexistence. La figure 9 ([12])[7] montre l'évolution et la stabilisation de la fréquence du nombre de sites occupés pour cette valeur $\lambda = 0.46$.

[6] On peut obtenir directement le résultat sans parler de générateur infinitésinal de Z. Ecrire : $P(Z_{t+\Delta}^1(x)=1) = P(Z_{t+\Delta}^1(x)=1 \mid Z_t^1(x)=1)\, P(Z_t^1(x)=1) + P(Z_{t+\Delta}^1(x)=1 \mid Z_t^1(x)=0)\, P(Z_t^1(x)=0)$. La première probabilité conditionnelle vaut $(1-\delta)\Delta + o(\Delta)$. La deuxième vaut $E(\lambda n_1(Z_t^1; x) \mid Z_t^1(x)=0)\Delta + o(\Delta)$. L'espérance vaut $\lambda \sum_{y\sim x} P(Z_t^1(y) = 1 \mid Z_t^1(x)=0)$. Ceci conduit au résultat annoncé.

[7] Les paramètres δ et λ du modèle de contact de [12] sont 4 fois ceux de notre modèle (4 comme le nombre de voisins). Il faudra en tenir compte lors de la lecture de la table 11.

Il y a moyen d'affiner l'estimation de λ_c. Faisons le changement d'échelle t.q. $\lambda = 1$ et soit $\delta_c = \lambda_c^{-1}$ le seuil critique pour le taux de mort d'une particule. On estime empiriquement pour des valeurs de δ sous le seuil critique la probabilité $p(\delta) = P(Z^{\infty}_{1}(x) = 1)$. Cette courbe empirique (cf. fig. 10) et des raisons théoriques ([4]) conduisent à penser qu'un modèle adapté pour $\delta \mapsto p(\delta)$ est :

$$p(\delta) = C(\delta_c - \delta)^b$$

La figure 10 donne l'estimation de cette courbe pour $T = 1000$ itérations sur réseau $\{1, 2, \cdots, 200\}^2$. Reste à estimer les paramètres de ce modèle. Il suffit pour cela de créer une base d'observations $\hat{p}_j(\delta_i)$ en répétant (indice $j = 1, k$) plusieurs simulations pour des valeurs δ_i (indice $i = 1, p$) proches mais inférieures à δ_c (cela afin d'assurer la coexistence et l'ergodicité). On effectue ensuite une estimation par moindres carrés (non linéaires) des paramètres (δ_c, b) du modèle :

$$y_{ij} = \log \hat{p}_j(\delta_i) = c + b \log(\delta_c - \delta_i) + \varepsilon_{ij},\ j = 1, k;\ i = 1, p$$

Le tableau 1 donne, pour $p = 6$ valeurs δ_i et pour $k = 5$ estimations $\hat{p}_j(\delta_i)$, les 5 estimations $(\hat{\delta}_{c,i}, \hat{b}_i)$ de (δ_c, b) par M.C. non-linéaires. L'estimation résultante est $\hat{\delta}_c = 2.428$ si $\lambda = 1$; soit encore $\lambda_c = 0.412$ pour $\delta = 1$.

7 Le cas où S est fini

Du point de vue pratique, le cas intéressant est celui où S est fini. L'approche habituelle est d'examiner d'abord $S = \mathbb{Z}^d$, d'étudier le système infini et de savoir si le système fini est proche du système infini.

Malheureusement, les comportements limites en t sont radicalement différents : alors que sur $\mathbb{Z}^d$ la coexistence est possible pour un processus de contact ou pour un processus du votant, elle ne le sera jamais sur S fini. Ainsi, faire tendre simplement $t \to \infty$ est trop primaire : on peut espérer que les systèmes fini et infini se ressemblent pour S grand, pour t grand mais pas trop grand.

Nous présentons deux résultats dans ce contexte. Le premier [8] établit que la vitesse d'extinction d'un processus de contact de base dépend de la position de λ par rapport au seuil critique λ_c du système infini associé. Le deuxième [9] donne la vitesse d'extinction du processus du votant.

Commençons d'abord par expliquer deux résultats : (1) comment simuler une loi π sur E à partir d'une dynamique de système de particules sous la condition de positivité : $\forall z \in E, \pi(z) > 0$ (en particulier, il n'y a pas d'état absorbant) ; (2) pourquoi il y a extinction en un temps fini pour un système fini avec état absorbant.

7.1 Simulation d'une loi $\pi > 0$ à partir d'un S. de P.

Soit π une loi sur E vérifiant la condition de positivité :

$$\forall z \in E; \pi(z) > 0$$

Cette loi peut être vue comme une loi d'Ising d'energie $U(z) = \ln \pi(z)$. Il est alors facile de vérifier ([17], §4, 4.2.4) que toute dynamique de taux c vérifiant les conditions de bilan détaillés

$$c_j(x; z) \exp U(z) = c_i(x; z^{x;j}) \exp U(z^{x;j}); \text{ pour } x \in S \text{ et } j \neq z(x) = i$$

a pour loi d'équilibre π. En particulier, le processus $Z = (Z_t)$ ne cessera d'évoluer dans le temps, convergeant vers sa loi invariante π.

Cette condition de réversibilité laisse beaucoup de liberté dans le choix des taux c. Deux choix classiques sont : (1) la dynamique de Glauber (utilisant les lois conditionnelles $\pi_i(\cdot \mid z^x)$) ; (2) une dynamique de Metropolis. Signalons qu'il est aussi possible d'utiliser une dynamique séquentielle de chaîne de Markoven temps discret ($n \in \mathbb{N}$) pour simuler π ([11], §6.2).

7.2 Extinction d'un système fini avec un état absorbant

Considérons un p.m.s. (1) sur un espace d'état E fini. Un état a est absorbant si $c_{a;j} = 0$ pour tout $j \neq a$: quand on est en a, on y reste, le processus est absorbé en a (on parle aussi d'extinction). Notons A la classe des états absorbants et supposons que $A \neq \emptyset$. Pour le processus de contact, $A = \{0\}$; pour le processus du votant sur $\{0; 1\}$, $A = \{0; 1\}$. Supposons de plus la propriété d'irréductibilité suivante : pour tout état $e \in E \setminus A$, il existe $a \in A$ et une suite $e = e_1; e_2; \cdots; e_n = a$ t.q., pour tout $l = 1; n - 1$, $c_{e_l;e_{l+1}} > 0$. En quelque sorte, il est toujours possible de cheminer vers A ; on dit que la classe $E \setminus A$ est transitoire ; la classe A elle est récurrente. Si l'état initial est $z_0 \notin A$, on note τ^{z_0} le temps d'entrée dans A :

$$\tau^{z_0} = \inf\{t \geq 0 \text{ t.q. } \exists a \in A \text{ t.q. } Z_t^{z_0} = a\}$$

Proposition 9 (Neuts [5], lemme 2.2.1 ; [16], proposition 9.13 et 9.14)
Si $A \neq \emptyset$ et si un Z est un p.m.s. irréductible, le système est p.s. absorbé en un temps fini : $P(\tau^{z_0} < \infty) = 1$.

On peut préciser ce résultat en explicitant la loi de τ^{z_0} (cf [7], [16], [18]). Pour cela, écrivons la décomposition en blocs du générateur C :

$$C = \begin{pmatrix} C_{AA} & 0 \\ C_{BA} & C_{BB} \end{pmatrix}$$

où $B = E \setminus A$. Si $z_0 \in B$ avec la loi π_B (considéré comme un vecteur ligne), alors la densité de temps d'absorption $\tau = \tau^{\pi_B}$ est

$$f_\tau(t) = \pi_B e^{C_{BB}t} C_{BA} 1_A$$

Le fait que la classe B soit transitoire équivaut au fait que les valeurs propres $(\nu_i, i \in B)$ de C_{BB} sont toutes à parties réelles strictement négatives : la densité f_τ est une somme pondérée d'exponentielles en t tendant chacune vers 0. De même, $C_{BB}^{-1} = -\int_{[0,+\infty[} e^{C_{BB}t} dt$ existe, $C_{BB}^{-2} = -\int_{[0,+\infty[} t e^{C_{BB}t} dt$ et l'espérance de τ est

$$E(\tau) = -\pi_B C_{BB}^{-1} 1_B$$

Ici, la difficulté est d'évaluer cette espérance lorsque B est de grande taille : pour un système de particules sur un ensemble S à n sites, $E = F^S$ a 2^n éléments et card$(B) = (2^n - 1)$!. Même si la majorité des coefficients de C_{BB} sont nuls (seuls sont non nuls les $c_{z,z^{x,i}} = c_i(x,z)$), le calcul de $E(\tau)$ à partir de cette formule est impossible : il faut procéder autrement.

7.3 Temps d'absorption pour le processus de contact [8]

On considère le processus de contact de base (4) associé à : $S = \{1, 2, \cdots, N\} \subset \mathbb{Z}$ $(d = 1)$, $F = \{0, 1\}$ et $\partial x = \{x-1, x+1\}$, $\delta = 1$ et λ. Notons par ailleurs λ_c le seuil critique pour le système sur $\mathbb{Z}$.

Il y a extinction lorsque tous les sites sont à l'état 0. On suppose que l'état initial est 1 (tous les sites sont occupés) et on note τ_N le temps d'extinction du processus. On a le comportement suivant de τ_N pour N grand

Proposition 10 Durée de vie du processus de contact

(1) $P(\tau_N < \infty) = 1$

(2) Si $\lambda < \lambda_c$, $\tau_N \simeq \gamma(\lambda) \log N$

(3) Si $\lambda > \lambda_c$, $\tau_N \simeq \gamma' \exp\{\alpha(\lambda) N\}$ où $\alpha(\lambda) > 0$.

Les constantes $\gamma(\lambda)$ et $\alpha(\lambda)$ sont précisées dans ([8]). Il y a cohérence entre le comportement du système fini et de son analogue infini : pour un taux de naissance faible, l'extinction est très rapide, en temps logarithmique. Au contraire, si ce taux dépasse le seuil critique, la mort aura lieu mais après un temps très grand puisque exponentiel en N.

7.4 Temps de consensus pour le processus du votant [9]

Cox étudie le temps de consensus τ_N

$$\tau_N = \inf\{t \geq 0, \text{ t.q. } Z_t^N \equiv 0 \text{ ou } \equiv 1\}$$

pour le processus du votant (10) sur le Tore S_N de $\mathbb{Z}^d$: $S_N = \mathbb{Z}^d \cap [-\frac{N}{2}; \frac{N}{2}[^d$ (avec les conditions habituelles de raccordement au bord). Les deux états absorbants sont les états de consensus 0 et 1. On suppose que la loi initiale sur S_N est le produit des lois i.i.d. $\{\theta; 1-\theta\}$ sur $F = \{0; 1\}$.

Définissons par ailleurs la vitesse $v(N)$: $v(N) = N^2$ pour $d = 1$, $v(N) = N^2 \log N$ pour $d = 2$ et $v(N) = N^d$ pour $d \geq 3$. Alors :

Proposition 11 Temps de consensus pour le processus du votant

Il existe une variable aléatoire $\tau > 0$, d'espérance finie t.q. on a la convergence en loi suivante :

$$\frac{\tau_N}{v(N)} \Rightarrow \tau$$

L'espérance de τ est, pour une constante $a > 0$, $E(\tau) = -a(\theta \log \theta + (1-\theta)\log(1-\theta))$. La constante a et la loi de τ sont précisées dans ([9]).

Ici, la cohérence entre systèmes fini et infini n'est pas claire. En particulier, dans la discussion sur le comportement asymptotique du système en fonction de d, $d = 2$ se rattache ici à $d \geq 3$ (à un effet logarithmique près), alors que dans le cas infini elle se rapprochait de $d = 1$. Remarquons aussi que le temps de consensus est, relativement au cardinal N^d de S_N, très grand en dimension $d = 1$.

8 Quelques images

Les figures 1 à 8 sont tirées du cours de Durrett [14], les figures 9, 10 et la table 11 de [12] (pour obtenir les figures, retourner aux références indiquées, ou vous adresser à l'auteur).

Figure 1 : Evolution du processus de contact aux 2-p.p.v. sur $\mathbb{Z}$ $(d = 1)$ entre l'instant $t = 0$ et $T = 72$.

Les paramètres sont : $\delta = 1$; $\lambda = 2 > \lambda_c$; à l'instant initial, tout l'intervalle $[180; 540]$ est occupé. La théorie dit qu'il y a coexistence et croissance linéaire [3] du domaine d'extension de l'espèce. C'est bien ce qu'on observe.

Figure 2 : Modèle du votant à 5 opinions sur le tore $\{0, 1, \cdots, 119\}^2$ et à l'itération $t = 500$

La distribution initiale est le produit des distributions uniformes en chaque site. Théoriquement, on va vers un consensus, mais on en est encore loin (cf. [9], consensus à $t \approx 40.000$).

Figures 3 et 4 : Evolution (de $t = 0$ à $t = 690$) de deux modèles du votant à seuil à deux opinions et pour $d = 1$

Le paramètre de seuil est $\theta = 1$; $S = \{0, 1, \cdots, 119\}$; la distribution initiale est le produit des distributions uniformes en chaque site.

Pour la figure 3 : $\partial x = \{x - 1, x + 1\}$, il se forme rapidement des amas et on se dirige vers le consensus.

Pour la figure 4 : $\partial x = \{x - 2, x - 1, x + 1, x + 2\}$, il y a coexistence des deux opinions.

Figures 5 et 6 : Modèles du votant à seuil et à deux opinions (8-p.p.v., $d = 2$, à l'instant $t = 50$)

$S = \{0, 1, \cdots, 89\}^2$; loi initiale est le produit des lois uniformes.

Pour la figure 5 : le seuil vaut $\theta = 2$; Durrett conjecture la coexistence.

Pour la figure 6 : $S = \{0, 1, \cdots, 179\}^2$; le seuil vaut $\theta = 3$; il y a formation d'amas ; Durrett conjecture la non-coexistence.

Figure 7 : Etat de la dynamique de reforestation à l'instant $t = 100$ sur $S = \{0, 1, \cdots 89\}^2$

Les paramètres sont : $\delta_1 = \delta_2 = 1$; $\lambda_1 = \frac{5}{4}(0 \mapsto 1)$; $\lambda_2 = \frac{1,9}{4}(0 \mapsto 2)$. L'herbe est blanche, les buissons gris et les arbres noirs.

Figure 8 : Etat du modèle proie-prédateur à l'itération $t = 50$

Les paramètres sont : $\delta_1 = \delta_2 = 1$ et $\delta = \frac{1}{4}$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Les poissons sont gris, les requins noirs, et les sites non occupés sont blancs.

Figures 9 et 10, Table 11 : Estimation du seuil critique λ_c du modèle de contact aux 4-p.p.v sur $\{1, 2, \cdots, 200\}^2$.

La figure 9 donne l'évolution entre $t = 0$ et $t = 200$ de la fréquence d'occupation pour $\lambda = 0.46$ $(\delta \equiv 1)$. On en déduit que $\lambda_c < 0.46$.

La figure 10 est celle de l'estimation empirique de la courbe $\delta \mapsto p(\delta)$ de la probabilité d'occupation des sites. Pour $\delta \geq \delta_c$, cette probabilité approche 0 très vite. Pour $\delta < \delta_c$, on retiendra le modèle fractionnaire $\ln p(\delta) = a + b \ln(\delta_c - \delta)$.

La table 11 donne les estimations de (δ_c, b) pour 8 valeurs δ_i (sur la ligne 1). Les estimations par simulations des $p(\delta_i)$ sont données lignes 2 à 6 ; celles de $(\hat{\mu}_i; \hat{\theta}_i)$ lignes 7 à 11. On trouve : $\lambda_c = 0.412$ (le $\frac{1}{4}$ du paramètre de [12]).

Références

[1] Harris T.E. (1972), Nearest neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattice, Adv. in Maths., 9, 66-89

[2] Harris T.E. (1974), Contact interactions on a lattice, Ann. Prob., 2, 969-988

[3] Durrett R. (1980), On the growth of the one dimensional contact processes, Ann. of Proba., 12, 999-1040

[4] Janssen H.K. (1981), On the non-equilibrium phase transition in reaction-di¤usion systems with absorbing state, Z. Phys. B42, 151-154

[5] Neuts M.F. (1981), Matrix-Geometric solutions in stochastic models, J. Hopkins Univ. Press, Baltimore.

[6] Liggett T.M. (1985), Interacting particle systems, Springer

[7] Fredkin D.R. et Rice J. (1986), On aggregated Markov processes, J. Appl. Prob., 23, 208-214

[8] Durrett R. et Liu X.F. (1988), The contact process on …nite set, Ann. Prob., 16, 1158-1173

[9] Cox J.T. (1989), Coalescing random walks and voter model consensus times on the torus in Z^d, Ann. of Proba., Vol 17, n.4, 1333-1366

[10] Durrett R. (1991), Stochastic models of growth and competition, Proc. Int. Congress Maths., Kyoto, 1990, 1049-1056

[11] Guyon X. (1992), Champ aléatoire sur un réseau, Masson

[12] Buttell L., Cox J.T. et Durrett R. (1993), Estimating the critical value of stochastic growth models, J.A.P. 30, 455-461

[13] Liggett T.M. (1993), Coexistence in threshold voter models, Ann. of Proba.

[14] Durrett R. (1995), Ten lectures on particles systems, Saint Flour (1993), L.N.M. n. 1608, 97-201, Springer

[15] Durrett R. et Levin S.A. (1995), Stochastic spatial models : a user's guide to ecological applications, Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. B, 343, 329-350

[16] Cocozza C. (1997), Processus stochastiques et …abilité des systèmes, Springer

[17] Ycart B. (1997), Algorithmes markoviens, Cours au Dept. de Ingeneria Matematica, Univ. de Chile, Dec 97.

[18] Cocozza C. et Guyon X. (1998), Quelques résultats sur les processus de Markov agrégés, prépub. SAMOS.