Université Paris I - Panthéon Sorbonne
Magistère II
Séries chronologiques — Année universitaire 2003-2004

Partiel Mai 2004
Quelques éléments de correction

Exercice 1

1) La représentation du processus $(X_t)_{t\in Z}$ vérifiant $\left(1-\frac{1}{4}L^2\right)X_t = \varepsilon_t$ est canonique puisque les racines de $\left(1-\frac{1}{4}z^2\right) = \left(1-\frac{1}{2}z\right)\left(1+\frac{1}{2}z\right)$ sont -2 et 2, donc strictement supérieures à 1 en valeur absolue.

2) A partir du calcul des autocovariances, on obtient les autocorrélations simples jusqu'à l'ordre 3 suivantes :

$$\begin{array}{rcll}
\gamma(1) & = & 0.25\gamma(1) & \Longrightarrow \gamma(1)=0 \Longrightarrow \rho(1)=0 \\
\gamma(2) & = & 0.25\gamma(0) & \Longrightarrow \rho(2)=0.25 \\
\gamma(3) & = & 0.25\gamma(1) & \Longrightarrow \rho(3)=0
\end{array}$$

Les autocorrélations partielles jusqu'à l'ordre 3 sont données par :

$$\begin{array}{rcl}
r(1) & = & \rho(1)=0 \\
r(2) & = & (\phi_2 =)0.25 \\
r(3) & = & 0
\end{array}$$

Ensuite, pour $h \geq 3$, on obtient :

$$\rho(h) = 0.25\rho(h-2)$$

L'équation caractéristique associée est donnée par :

$$z^h - 0.25z^{h-2} = 0 \text{ ou } z^2 - 0.25 = 0$$

et les racines sont 1/2 et $-1/2$. Ainsi,

$$\rho(h) = A\left(\frac{1}{2}\right)^h + B\left(-\frac{1}{2}\right)^h$$

sachant que $\rho(1)=0$ et $\rho(2)=1/4$, on trouve $A=B=1/2$, donc :

$$\rho(h) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^h + \left(-\frac{1}{2}\right)^h\right]$$

3) En notant $\hat{X}_T(h) = E(X_{T+h}|X_T, X_{T-1}, \ldots)$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\hat{X}_T(1) & = & 0.25X_{T-1} \\
\hat{X}_T(2) & = & 0.25X_T \\
\hat{X}_T(3) & = & 0.25\hat{X}_T(1) = 0.25^2X_{T-1}
\end{array}$$

A partir de $h=3$, on obtient :

$$\hat{X}_T(h) = 0.25\hat{X}_T(h-2)$$

soit, en reconnaissant que la fonction de prévision satisfait la même équation caractéristique que la fonction d'autocorrélation :

$$\hat{X}_T(h) = A\left(\frac{1}{2}\right)^h + B\left(-\frac{1}{2}\right)^h$$

Sachant que $\hat{X}_T(1) = \frac{1}{4}2 = \frac{1}{2}$ et $\hat{X}_T(2) = 0.25X_T$, on obtient $A = \frac{1+X_T}{2}$ et $B = \frac{X_T-1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\hat{X}_T(h) &= \left(\frac{1}{2}\right)^h \text{ si } X_T = 1 \\
\hat{X}_T(h) &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^h + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^h \text{ si } X_T = 2
\end{aligned}$$

Exercice 2

1) La série de taux de chômage aux Etats-Unis entre 1960 et 2005, semble plutôt stationnaire, tout en présentant une forte autocorrélation. Le taux de chômage est très sensible à la conjoncture (baisse du taux de chômage dans les années 60 avec la fin des Trentes Glorieuses, puis augmentations lors des chocs pétroliers, recul durant les années 80, réaugmentation lors de la récession du début des années 90, qui débute avec la Guerre du Golf, baisse du chômage lors de l'expansion liée à la nouvelle économie, puis récession de 2001).

2) Dans le modèle "Trend", le test de racine unitaire conduit à conclure que la série est $I(1)+T^2$ sous H_0 et $I(0)+T$ sous H_1. Au vue de la représentation graphique, ces hypothèses ne sont pas pertinentes.
Le test de racine unitaire dans ce modèle "Trend" nous conduit à accepter l'hypothèse de racine unitaire mais aussi l'hypothèse jointe de racine unitaire et de nullité de la tendance déterministe. On passe alors au modèle "Single Mean" : on accepte l'hypothèse de racine unitaire au seuil de 1%, mais aussi la non pertinence de ce modèle (nullité de la constante et racine unitaire par le test de Fisher), puis on accepte l'hypothèse de racine unitaire dans le modèle "Zero Mean". On conclut donc que la série est $I(1)$ au seuil de 1%. En revanche, on rejette l'hypothèse de racine unitaire dans le modèle "Single Mean" au seuil de 5%, et on conclut que la série de taux de chômage est $I(0) + C$. Ainsi, les conclusions du test dépendent du seuil que l'on retient.

3) Au seuil de 1%, on conclut que la série de taux de chômage a une racine unitaire, elle présente donc de l'hystérèse. En revanche, au seuil de 5%, on conclut que la série est stationnaire (autour d'une constante), ce qui va dans le sens de la présence d'un taux de chômage naturel, et de variations stationnaires autour de celui-ci.

4) L'estimation d'un modèle AR(1) sur le taux de chômage u_t conduit à un coefficient autorégressif significatif, mais on remarque qu'il est très proche de 1 (0.97!). Le modèle estimé est donné par :

$$\hat{u}_t = 0.15 + 0.97u_{t-1}$$

Le test d'absence d'autocorrélation dans les résidus estimés $\hat{\varepsilon}_t$ du modèle AR(1) (*Autocorrelation Check of Residuals*) indique que les résidus sont autocorrélés (on rejette l'hypothèse nulle).

5) La décroissance des autocorrélations de $\hat{\varepsilon}_t$ fait penser à un processus AR. Une seule autocorrélation partielle étant significativement non nulle, on peut penser à un AR(1) avec comme coefficient autorégressif estimé $\phi = \rho(1) = 0.62$. Ainsi, $\hat{\varepsilon}_t = 0.62\hat{\varepsilon}_{t-1} + \hat{\eta}_t$. Le modèle estimé précédemment sur le taux de chômage u_t était :

$$u_t = 0.15 + 0.97u_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t = 0.15 + 0.97u_{t-1} + (1 - 0.62L)^{-1}\hat{\eta}_t$$

Ainsi, le modèle peut être réécrit :

$$u_t = 0.15(1 - 0.62) + (0.62 + 0.97)u_{t-1} - 0.97 \times 0.62u_{t-2} + \hat{\eta}_t$$

6) L'allure de l'histogramme des résidus estimés laisse penser que la distribution ne suit pas un loi Normale. De plus, les coefficients de *Skewness* et de *Kurtosis* sont éloignés de 0, indiquant la présence d'asymétrie et d'aplatissement, qui ne sont pas compatibles avec une distribution normale.
La proc arima sur les résidus au carré indique la présence d'autocorrélation de type AR(1), ce qui conduit à penser que les résidus au carré dépendent des résidus au carré décalés d'une période, et donc qu'il y a de l'hétéroscédasticité conditionnelle de type ARCH.

7) Il semblerait, d'après le coefficient autorégressif estimé pour l'AR sur le taux de chômage américain et d'après les résultats des tests de racine unitaire, qu'il y ait une racine unitaire dans le processus du taux de chômage. Il conviendrait alors de le différencier pour le rendre stationnaire et rechercher un modèle ARMA stationnaire sur $u_t - u_{t-1}$.