Université Paris I - Panthéon Sorbonne
Magistère II
Séries chronologiques — Année universitaire 2000-2001

Partiel Juin 2001
Quelques éléments de correction

Exercice 1

1) Les deux processus $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$ sont des AR(1) stationnaires. Leur prévision optimale est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{T+1} &= \rho_1 x_T \\ \hat{y}_{T+1} &= \rho_2 y_T\end{aligned}$$

Ainsi, $z_{T+1} = \rho_1 x_T + \rho_2 y_T$ et la variance de l'erreur de prévision est :

$$V_D = var(u_{T+1} + v_{T+1}) = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

2) D'après les définitions des processus $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$, on a :

$$z_t = x_t + y_t = (1-\rho_1 L)^{-1} u_t + (1-\rho_2 L)^{-1} v_t$$

soit :

$$\begin{aligned}(1-\rho_1 L)(1-\rho_2 L) z_t &= (1-\rho_2 L) u_t + (1-\rho_1 L) v_t \\ (1-(\rho_1+\rho_2)L + \rho_1\rho_2 L^2) z_t &= u_t - \rho_2 u_{t-1} + v_t - \rho_1 v_{t-1}\end{aligned}$$

3) Comme $\eta_t = u_t - \rho_2 u_{t-1} + v_t - \rho_1 v_{t-1}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= var(\eta_t) = \sigma_u^2(1+\rho_2^2) + \sigma_v^2(1+\rho_1^2) \\ \gamma(1) &= cov(\eta_t, \eta_{t-1}) = -\rho_2\sigma_u^2 - \rho_1\sigma_v^2 \\ \gamma(h) &= cov(\eta_t, \eta_{t-h}) = 0 \quad h > 1\end{aligned}$$

Pour que le processus $\{z_t\}$ soit un AR(2), il faut que η_t soit un BB, donc que $\gamma(1) = -\rho_2\sigma_u^2 - \rho_1\sigma_v^2 = 0$.

4) Puisque $\gamma(1) \neq 0$ et $\gamma(h) = 0$ pour $h > 1$, alors $\{\eta_t\}$ suit un MA(1) du type :

$$\eta_t = (1-\theta L)\varepsilon_t$$

On détermine $(\theta, \sigma_\varepsilon^2)$ par identification des autocovariances :

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma(1) &= -\theta\sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

On choisit la racine θ qui est inférieure à 1, et dans ce cas, le processus ε_t est l'innovation de η_t.

Ainsi, z_t est un ARMA(2,1) et la représentation est canonique puisque $|\rho_1| < 1,\ |\rho_2| < 1,\ |\theta| < 1$.

5)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= (1-\theta L)^{-1}\eta_t \\
&= \frac{u_t - \rho_2 u_{t-1} + v_t - \rho_1 v_{t-1}}{1-\theta L} \\
&= u_t + \frac{\theta-\rho_2}{1-\theta L} u_{t-1} + v_t + \frac{\theta - \rho_1}{1-\theta L} v_{t-1}
\end{aligned}$$

6) La prévision optimale de z_t pour $t = T+1$ sachant l'information jusqu'en T basée sur l'écriture ARMA(2,1) est :

$$\hat{z}_{T+1} = (\rho_1 + \rho_2) z_T - \rho_1 \rho_2 z_{T-1} - \theta \varepsilon_T$$

et la variance de l'erreur de prévision est alors :

$$V_A = var(\varepsilon_{T+1}) = \sigma_u^2 \left(1 + \frac{(\theta-\rho_2)^2}{(1-\theta L)^2}\right) + \sigma_v^2 \left(1 + \frac{(\theta - \rho_1)^2}{(1-\theta L)^2}\right)$$

Ainsi, on a : $V_A - V_D = \sigma_u^2 \frac{(\theta-\rho_2)^2}{(1-\theta L)^2} + \sigma_v^2 \frac{(\theta-\rho_1)^2}{(1-\theta L)^2} > 0$
On a $V_A = V_D$ si $\theta = \rho_1 = \rho_2$, car dans ce cas, le processus ARMA(2,1) se simplifie en processus AR(1) pour z_t.

Exercice 2

1) Pour un processus AR(2) qui s'écrit :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

on sait que $\phi_2 = r(2)$ et $\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1)$ donc $\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$.
On obtient alors $\phi_1 = (1-\phi_2)\rho(1)$.

2) Pour un processus MA(1) qui s'écrit :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

on a :

$$r(1) = \rho(1) = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

ainsi, θ_1 est la racine (inférieure à 1) de l'équation $\theta_1^2 + 4\theta_1 + 1 = 0$.

Exercice 3

1) $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$ sont intégrés d'ordre 1 puisque leur différence première est stationnaire.
On peut réécrire:

$$\begin{aligned}
x_t(1-L) &= u_t(1-L) + 0.2u_{t-1} + 0.4v_{t-1} \Rightarrow x_t = u_t + (1-L)^{-1}(0.2u_{t-1} + 0.4v_{t-1}) = u_t + D_t \\
y_t(1-L) &= v_t(1-L) + 0.2u_{t-1} + 0.4v_{t-1} \Rightarrow y_t = v_t + (1-L)^{-1}(0.2u_{t-1} + 0.4v_{t-1}) = v_t + D_t
\end{aligned}$$

où $\{D_t\}$ est un processus défini par :

$$(1-L)D_t = 0.2u_{t-1} + 0.4v_{t-1}$$

Le processus $\{D_t\}$ est intégré d'ordre 1.
Ainsi, $x_t - y_t = u_t - v_t$ est stationnaire, cela signifie que x_t et y_t possèdent une composante stochastique non stationnaire commune qui peut être éliminée facilement en prenant l'écart des deux processus. On dit que les deux processus sont cointégrés.