Université Paris I - Panthéon Sorbonne
Magistère II
Séries chronologiques — Année universitaire 2000-2001

Partiel Juin 2001

Exercice 1

On considère deux processus stationnaires indépendants $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$, tels que :

$$\begin{aligned}(1-\rho_1 L)x_t = u_t \quad &, \quad |\rho_1|<1 \\ (1-\rho_2 L)y_t = v_t \quad &, \quad |\rho_2|<1\end{aligned}$$

avec u_t et v_t deux processus bruits blancs centrés de variance respective σ_u^2 et σ_v^2.

On note $z_t = x_t + y_t$.

On suppose que les x_t et les y_t sont observés jusqu'à la date T et on souhaite prévoir z_{T+1}.

1) Déterminer les prévisions optimales de x_{T+1} et y_{T+1} fondées sur $(x_t, y_t; t \leq T)$. En déduire $\hat{z}_T(1)$, la prévision de z_{T+1} construite à partir de $(x_t, y_t; t \leq T)$. Quelle est la variance (notée V_D par la suite) de l'erreur de prévision?

2) Montrer que le processus $\{z_t\}$ satisfait la relation :

$$\Phi(L)z_t = \eta_t$$

avec $\Phi(L) = 1-(\rho_1+\rho_2)L + \rho_1\rho_2 L^2$ et $\eta_t = u_t - \rho_2 u_{t-1} + v_t - \rho_1 v_{t-1}$.

3) Déterminer le corrélogramme du processus $\{\eta_t\}$. Quelle relation doivent satisfaire $\rho_1, \rho_2, \sigma_u^2, \sigma_v^2$ pour que le processus $\{z_t\}$ soit un AR(2)?

4) Montrer que $\{\eta_t\}$ vérifie :

$$\eta_t = (1-\theta L)\varepsilon_t$$

avec $|\theta| \neq 1$ et $\{\varepsilon_t\}$ un processus bruit blanc de variance σ_ε^2.
Comment peut-on déterminer $(\theta, \sigma_\varepsilon^2)$ en fonction de $\rho_1, \rho_2, \sigma_u^2$ et σ_v^2?
Expliquer pourquoi on peut toujours supposer $|\theta| < 1$. Dans ce cas, quelle est la propriété vérifiée par le processus bruit blanc $\{\varepsilon_t\}$?

En déduire que, dans le cas général, le processus agrégé $\{z_t\}$ est un ARMA(p,q), avec p et q à déterminer. La représentation est-elle canonique?

5) Montrer qu'on a la relation :

$$\varepsilon_t = u_t + \frac{\theta-\rho_2}{1-\theta L}u_{t-1} + v_t + \frac{\theta-\rho_1}{1-\theta L}v_{t-1}$$

6) En déduire une expression de $V_A - V_D$, V_A étant la variance de l'erreur de prévision de z_{T+1}, lorsqu'on utilise la prévision optimale fondée sur les variables agrégées $(z_t; t \leq T)$.
Vérifier que $V_A - V_D$ est positif ou nul. Dans quel cas a-t-on $V_A = V_D$?

Exercice 2

1) Pour un processus $\{x_t\}$, on estime le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 $\hat{\rho}(1) = 0.42$ et le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre 2 $\hat{r}(2) = -0.2$.
Si on suppose que x_t peut être modélisé par un AR(2), donner (en expliquant précisément votre démarche) une estimation des coefficients autorégressifs ϕ_1 et ϕ_2.

2) Pour un processus $\{y_t\}$, on estime le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre 1 $\hat{r}(1) = 0.25$.
Si on suppose que y_t peut être modélisé par un MA(1), donner (en expliquant précisément votre démarche) une estimation du coefficient θ_1.

Exercice 3

Rappel : *On dit qu'un processus X_t est intégré d'ordre d, noté I(d), si $(1-L)^d X_t$ est stationnaire.*

1) Soit deux processus $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$ définis par :

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + u_t - 0.8u_{t-1} + 0.4v_{t-1} \\ y_t &= y_{t-1} + v_t + 0.2u_{t-1} - 0.6v_{t-1} \end{aligned}$$

avec $\{u_t\}$ et $\{v_t\}$ deux processus bruits blancs.

- Donner l'ordre d'intégration des processus $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$.
- Montrer que l'on peut écrire $x_t = u_t + D_t$ et $y_t = v_t + D_t$ où $\{D_t\}$ est un processus défini par :
$$(1-L)D_t = 0.2u_{t-1} + 0.4v_{t-1}$$
- Que peut-on dire du processus $\{D_t\}$?
- Montrer qu'on peut trouver une combinaison linéaire de x_t et de y_t qui soit stationnaire (*on dit alors que x_t et y_t sont cointégrés, c'est-à-dire qu'il existe une combinaison linéaire des deux variables intégrées qui est intégrée d'ordre inférieur*).
- Comment peut-on interpréter ce résultat?

2) On dispose de séries de consommation des ménages (C) et de revenu des ménages (R). Commenter les sorties du logiciel SAS suivantes (pages 3 à 6) et préciser la nature de C et de R (vous justifierez vos réponses).

On régresse C_t sur R_t par la méthode des MCO (voir résultats de la régression page 7) et on récupère les résidus estimés de la régression, notés RES. Etudier la nature du processus suivi par ces résidus de régression (vous préciserez aussi ce que l'on conclut de la lecture de "Autocorrelation Check for White Noise").

Que pouvez-vous en conclure?