

Partiel 3 Juin 2002

3 heures

Exercice 1 (6 points)

Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus AR(2) vérifiant :

$$X_t = \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{8}X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où ε_t est un bruit blanc centré, de variance égale à 1.

- 1) Vérifier que la représentation AR(2) est canonique. Que signifie ce résultat relativement au bruit blanc ε_t ?
- 2) Déterminer les autocorrélations du processus et représenter l'autocorrélogramme (précisément au moins jusqu'à l'ordre 3).
- 3) On note $\hat{X}_t(h)$ la prévision optimale de X_{t+h} faite à la date t à partir de l'ensemble d'information $\{X_t, X_{t-1}, \dots\}$. Déterminer l'expression générale de $\hat{X}_t(h)$ (en fonction de X_t et X_{t-1}).

Exercice 2 (10 points)

-I- Soit le processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, défini par $Y_t = f(t) + Z_t$ avec Z_t un processus stationnaire centré et f une fonction déterministe définie par $f(t) = T_k(t) + S(t)$, T_k étant un polynôme de degré k fixé et S une fonction périodique de période 4 non nulle.

- 1) Y est-il un processus stationnaire? Justifier.
- 2) Peut-on modéliser Y par un modèle ARMA(p,q)? Justifier.
- 3) On décide d'appliquer l'opérateur linéaire $(1 - L)^k(1 - L^4)$ à Y . Justifier ce choix de différenciation (vous étudierez notamment les propriétés de cette transformation en considérant le cas où $k = 1$).
- 4) Présenter précisément une procédure alternative à adopter pour modéliser le processus Y .

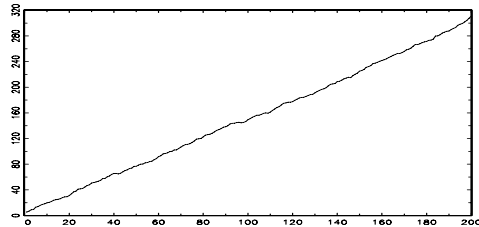
-II- On suppose qu'on a réussi à extraire $f(t)$ à Y_t . On s'intéresse alors à la modélisation de Z_t . On obtient les autocorrélogrammes simple et partiel suivants :

1) En vous basant sur ces graphes, proposez deux modèles ARMA(p,q) possibles pour la modélisation de la série Z_t . Justifier soigneusement votre réponse.

2) Pour chacun des modèles identifiés, quels sont les paramètres à estimer? A partir des valeurs fournies précédemment, proposez une estimation de ces paramètres (sans oublier le bruit blanc).

Exercice 3 (4 points)

On cherche à caractériser la non-stationnarité de la série x représentée ci-dessous.



Une personne, sachant se servir un peu de SAS, vous fournit les résultats suivants (dans la régression, t désigne le temps). Sur cette base, caractérisez la non-stationnarité de la série en expliquant précisément votre démarche (et en commentant bien évidemment les résultats suivants). Vous donnerez aussi l'écriture des processus postulés ainsi que leur transformation.

EXERCICE 3

The ARIMA Procedure

Name of Variable = x
 Mean of Working Series 152.2701
 Standard Deviation 85.97128
 Number of Observations 200

Autocorrelations

Lag	Covariance	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	Std Error
0	7391.060	1.00000											*****											0
1	7272.868	0.98401										.	*****											0.070711
2	7155.965	0.96819									.	.	*****											0.121172
3	7040.783	0.95261									.	.	*****											0.155102
4	6925.753	0.93704									.	.	*****											0.182020
5	6813.296	0.92183									.	.	*****											0.204724
6	6699.943	0.90649									.	.	*****											0.224521
7	6587.183	0.89124									.	.	*****											0.242130
8	6476.148	0.87621									.	.	*****											0.258011
9	6364.609	0.86112									.	.	*****											0.272484
10	6253.401	0.84608									.	.	*****											0.285767
11	6142.392	0.83106									.	.	*****											0.298029
12	6030.301	0.81589									.	.	*****											0.309399

".," marks two standard errors

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
1	0.98401										.	*****											
2	-0.00256										.		.										
3	-0.00066										.		.										
4	-0.00726										.		.										
5	0.00300										.		.										
6	-0.01161										.		.										
7	-0.00540										.		.										
8	-0.00072										.		.										
9	-0.00993										.		.										
10	-0.00669										.		.										
11	-0.00724										.		.										
12	-0.01266										.		.										

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	-----Autocorrelations-----																				
6	1102.10	6	<.0001	0.984	0.968	0.953	0.937	0.922	0.906															
12	2029.66	12	<.0001	0.891	0.876	0.861	0.846	0.831	0.816															

The ARIMA Procedure

Name of Variable = x
 Period(s) of Differencing 1
 Mean of Working Series 1.533545
 Standard Deviation 0.938461
 Number of Observations 199
 Observation(s) eliminated by differencing 1

Autocorrelations

Lag	Covariance	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	Std Error
0	0.880708	1.00000											*****											0
1	-0.046609	-.05292									.	*		.										0.070888
2	-0.040707	-.04622									.	*		.										0.071086
3	0.019303	0.02192									.			.										0.071237
4	-0.059952	-.06807									.	*		.										0.071271
5	0.0088784	0.01008									.			.										0.071597
6	-0.071045	-.08067									.	**		.										0.071604
7	-0.031404	-.03566									.	*		.										0.072059
8	-0.012295	-.01396									.			.										0.072148
9	-0.015868	-.01802									.			.										0.072162
10	0.081698	0.09276									.	**		.										0.072184
11	0.058111	0.06598									.	*		.										0.072781
12	-0.022975	-.02609									.	*		.										0.073081

".," marks two standard errors

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
1	-0.05292											. *											
2	-0.04916										. *												
3	0.01684										. *												
4	-0.06859										. *												
5	0.00459										. *												
6	-0.08775										. **												
7	-0.04215										. *												
8	-0.03263										. *												
9	-0.02166										. *												
10	0.07890										. **												
11	0.07139										. *												
12	-0.01836										. *												

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	-----Autocorrelations-----						
6	3.42	6	0.7549	-0.053	-0.046	0.022	-0.068	0.010	-0.081	
12	6.68	12	0.8777	-0.036	-0.014	-0.018	0.093	0.066	-0.026	

The ARIMA Procedure

Name of Variable = x

Period(s) of Differencing 2
 Mean of Working Series 3.059354
 Standard Deviation 1.289508
 Number of Observations 198
 Observation(s) eliminated by differencing 2

Autocorrelations

Lag	Covariance	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	Std Error
0	1.662832	1.00000												*****										0
1	0.722528	0.43452										. *		*****										0.071067
2	-0.134004	-0.08059									. **													0.083412
3	-0.080224	-0.04825									. *													0.083805
4	-0.094837	-0.05703									. *													0.083945
5	-0.109612	-0.06592									. *													0.084140
6	-0.183525	-0.11037									. **													0.084401
7	-0.162947	-0.09799									. **													0.085127
8	-0.072617	-0.04367									. *													0.085694
9	0.028170	0.01694									. *													0.085807
10	0.208898	0.12563									. ***													0.085824
11	0.185312	0.11144									. **													0.086747
12	0.011487	0.00691									. *													0.087467

"," marks two standard errors

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
1	0.43452										. *		*****										
2	-0.33209									*****			. *										
3	0.19772									. *			****										
4	-0.21317									****			. *										
5	0.10081									. *			***										
6	-0.22017									****			. *										
7	0.10315									. *			***										
8	-0.14308									***			. *										
9	0.15208									. *			***										
10	0.01556									. *			. *										
11	0.04502									. *			. *										
12	-0.06205									. *			. *										

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	-----Autocorrelations-----						
6	43.81	6	<.0001	0.435	-0.081	-0.048	-0.057	-0.066	-0.110	
12	52.22	12	<.0001	-0.098	-0.044	0.017	0.126	0.111	0.007	

The ARIMA Procedure

Name of Variable = res

Period(s) of Differencing 1
 Mean of Working Series 0.04514
 Standard Deviation 0.938461
 Number of Observations 199
 Observation(s) eliminated by differencing 1

Autocorrelations

Lag	Covariance	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	Std Error
0	0.880708	1.00000											*****											0
1	-0.046609	-.05292										. *												0.070888
2	-0.040707	-.04622										. *												0.071086
3	0.019303	0.02192										. *												0.071237
4	-0.059952	-.06807										. *												0.071271
5	0.0088784	0.01008										. *												0.071597
6	-0.071045	-.08067										. **												0.071604
7	-0.031404	-.03566										. *												0.072059
8	-0.012295	-.01396										. *												0.072148
9	-0.015868	-.01802										. *												0.072162
10	0.081698	0.09276										. **												0.072184
11	0.058111	0.06598										. *												0.072781
12	-0.022975	-.02609										. *												0.073081

"," marks two standard errors

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
1	-0.05292										. *												
2	-0.04916										. *												
3	0.01684										. *												
4	-0.06859										. *												
5	0.00459										. *												
6	-0.08775										. **												
7	-0.04215										. *												
8	-0.03263										. *												
9	-0.02166										. *												

The ARIMA Procedure

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
10	0.07890										. **												
11	0.07139										. *												
12	-0.01836										. *												

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	-----Autocorrelations-----					
6	3.42	6	0.7549	-0.053	-0.046	0.022	-0.068	0.010	-0.081
12	6.68	12	0.8777	-0.036	-0.014	-0.018	0.093	0.066	-0.026